18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Neun und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Berlin, 1850.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à PARIS chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des neun und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
3.	Note sur un système de certaines formules. M. *A. Cayley* à Cambridge.	I.	14
4.	Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques. Par le même.	I.	16
5.	Über die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten nach einer Methode der Einschliefsung in Grenzen. Von Herrn Dr. *M. Ohm*, Prof. der Mathematik an der Universität zu Berlin.	I.	23
7.	De integralibus $\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$ et $\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$, et aliis, quae cum ipsis sunt connexa, commentatio analytica. Auct. *Gudermann*, Monast. Guelph.	I.	50
8.	Ableitung einiger bestimmten Integrale aus den Formeln der Abhandlung No. 18. im 37ten Bande dieses Journals. Von Herrn Dr. *Dienger* in Sinsheim bei Heidelberg.	I.	62
9.	Einiges zur Zahlenlehre. Von demselben.	I.	67
12.	Moyens pour trouver l'expression de la $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière de l'équation linéaire $y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots+Sy'+Ty=0$, à l'aide des $n-1$ valeurs $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ qui satisfont à cette équation. Par Mr. le Dr. *C. J. Malmstèn*, prof. des Mathém. à l'Univers. d'Upsàla.	II.	91
13.	De l'équation différentielle $x^{n-1}(a_n+b_n x).y^{(n)}+x^{n-2}(a_{n-1}+b_{n-1}x).y^{(n-1)}+\ldots+(a_1+b_1 x)y'+b_0 y=0.$ Par le même.	II.	99
14.	De l'équation différentielle $y_x'' + \frac{y_x'}{x} + Ax^m y = 0.$ Par le même.	II.	108
15.	Note sur les fonctions Elliptiques. Par le même.	II.	116
16.	Abrifs einer Theorie der elliptischen Functionen. Von Herrn Prof. *E. Heine* zu Bonn.	II.	122
18.	Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln. Von Herrn *S. Aronhold* zu Berlin.	II.	140
19.	Über die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhangt. Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.	II.	160
20.	Lehrsätze. Von demselben.	II.	180
22.	Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhangt, nebst Anwendungen derselben auf die Zahlentheorie. (Als Fortsetzung der Abhandlung No. 19. in diesem Bande.) Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.	III.	224
23.	Schlufs dieser Abhandlung.	IV.	275

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
24.	Über die in der *Gaufsischen* „Summatio quarumdam serierum singularium" vorkommenden Reihen. Von Herrn Prof. ***E. Heine*** in Bonn.	IV.	288
25.	Über die Reduction der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder. Von Herrn Prof. ***C. G. J. Jacobi*** zu Berlin. (Gelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9ten November 1848.)	IV.	290
27.	Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze. Von Herrn Dr. ***G. Eisenstein,*** Docent an der Universität zu Berlin.	IV.	351

2. Geometrie.

1.	Note sur quelques formules relatives aux coniques. Par M. ***A. Cayley*** à Cambridge.	I.	1
2.	Sur le problème des contacts. Par le même.	I.	4
6.	Die Gesetze der Succession einer Reihe sphärischer Kreise, von welchen jeder den nächstfolgenden und zugleich zwei feste Kreise berührt, deren einer im Innern des andern enthalten ist. Von dem Herrn Professor Dr. *Gudermann* zu Münster.	I.	42
17.	Théorème relatif au cercle qui passe par trois points d'une ellipse. Par Mr. *Joachimsthal* de Berlin.	II.	138
19.	Über die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhangt. Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.	II.	160
22.	Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhangt, nebst Anwendung derselben auf die Zahlentheorie. (Als Fortsetzung der Abhandlung No. 19. in diesem Bande.) Von demselben.	III.	224
23.	Schlufs dieser Abhandlung.	IV.	275
28.	Lettre de Mr. ***G. Salmon*** de Dublin à l'éditeur de ce journal.	IV.	365

3. Mechanik.

26.	Sur la rotation d'un corps. Extrait d'une lettre addressée à l'académie des sciences de Paris par Mr. ***C. G. J. Jacobi*** (lu dans la séance du 30 juillet 1849).	IV.	293

II. Angewandte Mathematik.

10.	An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. By the late ***George Green,*** fellow of Gonville- and Cains-Colleges at Cambridge.	I.	73
21.	Über Sparcassen. Vom Herausgeber.	III.	183

Verschiedenes.

11.	Notiz. Von Herrn Dr. ***Preufs,*** Königl. Professor und Historiographen zu Berlin.	I.	90

Fac simile einer Handschrift von ***Klügel.*** . . . . . I.
– – – – – – ***Mollweide.*** . . . . . II.
– – – – – – ***J. A. Euler.*** . . . . . III.
– – – – – – ***La Condamine.*** . . . . . IV.

1.

Note sur quelques formules relatives aux coniques.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Soit, comme à l'ordinaire:

$$(1.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = BC - F^2, \\ \mathfrak{B} = CA - G^2, \\ \mathfrak{C} = AB - H^2, \\ \mathfrak{F} = GH - AF, \\ \mathfrak{G} = HF - BG, \\ \mathfrak{H} = FG - CH, \\ K = ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH, \end{cases}$$

et désignons pour abréger, les fonctions

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy,$$
$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z + F(\beta z + \gamma y) + G(\gamma x + \alpha z) + H(\alpha y + \beta x);$$
$$A(\beta z - \gamma y)^2 + B(\gamma x - \alpha z)^2 + C(\alpha y - \beta x)^2 + 2F(\gamma x - \alpha z)(\alpha y - \beta x)$$
$$+ 2G(\alpha y - \beta x)(\beta z - \gamma y) + 2H(\beta z - \gamma y)(\gamma x - \alpha z);$$

etc.

par

$$Ax^2 + \cdots; \quad A\alpha x + \cdots; \quad A(\beta z - \gamma y)^2 + \cdots; \quad \text{etc.}$$

Cela posé, soient $\mathfrak{A}+\mathrm{a}$, $\mathfrak{B}+\mathrm{b}$, $\mathfrak{C}+\mathrm{c}$, $\mathfrak{F}+\mathrm{f}$, $\mathfrak{G}+\mathrm{g}$, $\mathfrak{H}+\mathrm{h}$, $K+\mathrm{k}$ ce que deviennent $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, K, en écrivant $A+\alpha^2$, $B+\beta^2$, $C+\gamma^2$, $F+\beta\gamma$, $G+\gamma\alpha$, $H+\alpha\beta$ au lieu de A, B, C, F, G, H. Alors on aura d'abord

$$(2.)\quad \mathrm{k} = \mathfrak{A}\alpha^2 + \cdots$$

et les quantités a, b, c, f, g, h seront données par l'équation

$$(3.)\quad \mathrm{a}x^2 + \cdots = A(\beta z - \gamma y)^2 + \cdots,$$

ou si l'on veut, par celle-ci:

$$(4.)\quad \mathrm{a}xx_1 + \cdots = A(\beta z - \gamma y)(\beta z_1 - \gamma y_1) + \cdots$$

(savoir en considérant ces équations comme identiques par rapport à x, y, z et x, y, z, x_1, y_1, z_1 respectivement).

On obtient sans difficulté les équations identiques:

$$(5.)\quad (A\alpha\alpha_1+\cdot\cdot)(Axx_1+\cdot\cdot)-(A\alpha x+\cdot\cdot)(A\alpha_1x_1+\cdot\cdot) = \mathfrak{A}(\beta z_1-\gamma y_1)(\beta_1 z-\gamma_1 y)+\cdot\cdot,$$

$$(6.)\quad (\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}xx_1+\cdot\cdot)-(\mathfrak{A}\alpha x+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha_1x_1+\cdot\cdot) = K[A(\beta z_1-\gamma y_1)(\beta_1 z-\gamma_1 y)+\cdot\cdot].$$

Comme on sait, la condition sous laquelle la droite $lx+my+nz=0$ touche la conique $U=Ax^2+\cdot\cdot=0$ peut être présentée sous la forme $\mathfrak{A}l^2+\cdot\cdot=0$. Donc la condition pour que cette droite touche la conique $U+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0$, est

$$(7.)\quad \mathfrak{A}l^2+\cdot\cdot+A(\gamma m-\beta n)^2+\cdot\cdot=0.$$

En réduisant au moyen de l'équation $(\mathfrak{A}\alpha^2+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}l^2+\cdot\cdot)=K[A(\gamma m-\beta n)^2+\cdot\cdot]$ (qui n'est qu'un cas particulier de l'équation (6.)), cette condition devient:

$$(8.)\quad (K+\mathfrak{A}\alpha^2+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}l^2+\cdot\cdot)-(\mathfrak{A}\alpha l+\cdot\cdot)^2=0.$$

Pour trouver la condition sous laquelle les coniques

$$U+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0,\qquad U+(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z)^2=0$$

se touchent, on n'a qu'à remarquer que l'équation de la tangente commune est, ou $(\alpha-\alpha_1)x+(\beta-\beta_1)y+(\gamma-\gamma_1)z=0$, ou $(\alpha+\alpha_1)x+(\beta+\beta_1)y+(\gamma+\gamma_1)z=0$. En ne considérant que la première de ces droites, on a pour la condition cherchée:

$$(9.)\quad \mathfrak{A}(\alpha-\alpha_1)^2+\cdot\cdot+\mathfrak{A}(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2+\cdot\cdot=0.$$

En réduisant cette équation au moyen du même cas particulier de l'équation (6.), la condition dont il s'agit se réduit à

$$(10.)\quad (K+\mathfrak{A}\alpha^2+\cdot\cdot)(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)-(K+\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\cdot\cdot)^2=0.$$

On sait que les coordonnées X, Y, Z du pôle de la droite $lx+my+nz=0$, par rapport à la conique $U=0$, peuvent être trouvées par l'équation

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z=\mathfrak{A}l\lambda+\cdot\cdot$$

(considérée comme identique par rapport à λ, μ, ν). Delà les coordonnées Y, Y, Z du pôle de cette même droite par rapport à la conique

$$U+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0,$$

se trouveront par l'équation

$$(11.)\quad \lambda X+\mu Y+\nu Z=\mathfrak{A}l\lambda+\cdot\cdot+A(\gamma m-\beta n)(\gamma\mu-\beta\nu)\cdot\cdot$$

(considérée comme identique par rapport à λ, μ, ν). Cette équation peut aussi être présentée sous la forme

$$(12.)\quad K(\lambda X+\mu Y+\nu Z)=(K+\mathfrak{A}\alpha^2+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}l\lambda+\cdot\cdot)-(\mathfrak{A}\alpha\lambda+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha l+\cdot\cdot),$$

ce qui peut être démontré facilement au moyen d'un cas particulier de l'équation (6.).

Si les deux droites $lx+my+nz=0$, $l'x+m'y+n'z=0$, touchent la conique $U=0$, l'équation de la droite qui passe par les points de contact, sera $A(mn'-m'n)x+\cdots=0$. Donc: si ces deux droites touchent la conique $U+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0$, l'équation de la droite qui passe par les deux points de contact, sera

$$(13.)\quad A(mn'-m'n)x+\cdots+(\alpha x+\beta y+\gamma z)\cdot[\alpha(mn'-m'n)+\beta(nl'-n'l)+\gamma(lm'-l'm)]=0.$$

Les formules obtenues seront utiles pour la solution du problème du mémoire suivant. Je les ai rapprochées ici pour ne pas interrompre cette solution.

Cambridge, 19ième Mai 1848.

2.

Sur le problème des contacts.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Je me propose ici la solution analytique du problème suivant:

„Étant données trois coniques inscrites à une même conique: trouver une autre conique, aussi inscrite à cette conique, qui touche les trois coniques inscrites; et tirer de là les constructions géométriques ordinaires."

Je commence par récapituler quelques unes des propriétés d'un système de trois coniques inscrites à la même conique.

Un système de six droites qui passent trois à trois par quatre points, s'appelle *quadrangle*. Les points de rencontre des côtés opposés sont les *centres* du quadrangle; les *côtés* du triangle formé par ces trois centres sont les *axes* du quadrangle. De même, un système de six points situés trois à trois sur quatre droites, s'appelle *quadrilatère*. Les droites qui passent par les angles opposés sont les *axes;* et les angles du triangle formé par les trois axes sont les *centres* du quadrilatère.

Deux coniques quelconques se coupent en quatre points qui forment un quadrangle inscrit aux deux coniques. Elles ont quatre tangentes communes qui forment un quadrilatère circonscrit aux deux coniques. Le quadrangle inscrit et le quadrilatère circonscrit ont les même centres et les mêmes axes.

Si deux coniques sont circonscrites ou inscrites l'une à l'autre, la droite qui passe par les deux points de contact s'appelle *chorde de contact*, et le point de rencontre des deux tangentes communes s'appelle *centre de contact*.

Cela posé: les coniques circonscrites à deux coniques données, peuvent être divisées en trois classes: une conique circonscrite appartient à une quelconque de ces trois classes, selon que les points de rencontre des chordes de contact de la conique circonscrite et de chacune des deux coniques données coïncide avec un quelconque des trois centres du quadrangle inscrit, ou du quadrilatère circonscrit; ou, si l'on veut, selon que la droite qui passe par les centres de contact de la conique circonscrite et des deux coniques données, coïncide avec un quelconque des trois axes du quadrangle inscrit, ou du quadrilatère circonscrit.

En considérant les deux coniques données, et une conique circonscrite, nous dirons que les deux côtés du quadrangle inscrit qui se coupent dans le point d'intersection des deux chordes de contact, sont les *axes de symptose* des deux coniques données, et que les deux angles du quadrilatère circonscrit, situés sur la droite qui passe par les deux centres de contact, sont les *centres d'homologie* des deux coniques données.

Soient maintenant inscrites trois coniques à la même conique. En combinant deux à deux ces trois coniques, les six axes de symptose se couperont trois à trois en quatre points que nous nommerons *centres de symptose*, et les six centres d'homologie seront situés trois à trois sur quatre droites que nous appelerons *axes d'homologie.*

Soient

$$U + V_1^2 = 0, \quad U + V_2^2 = 0, \quad U + V_3^2 = 0$$

les équations des trois coniques inscrites, où

$$\begin{aligned} U &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy, \\ V_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ V_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ V_3 &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Si

$$lx + my + nz = 0$$

est l'équation d'une tangente commune aux coniques $U + V_1^2 = 0$, $U + V_2^2 = 0$, les formules de la „Note sur quelques formules etc." en adoptant la notation de cette note, donneront les équations

$$\begin{aligned} (K + \mathfrak{A}\alpha_1^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{A}l^2 + \cdot\cdot) - (\mathfrak{A}\alpha_1 l + \cdot\cdot)^2 &= 0, \\ (K + \mathfrak{A}\alpha_2^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{A}l^2 + \cdot\cdot) - (\mathfrak{A}\alpha_2 l + \cdot\cdot)^2 &= 0, \end{aligned}$$

qui serviront à déterminer les valeurs de l, m, n; on obtient par là l'expression

$$\sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_2^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha_1 l + \cdot\cdot)} - \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_1^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha_2 l + \cdot\cdot)},$$

qui fait voir que l'équation $lx + my + nz = 0$ est satisfaite en écrivant

(1.) $$\begin{aligned} x : y : z \\ = \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_1^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha_1 + \mathfrak{H}\beta_1 + \mathfrak{G}\gamma_1)} - \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_2^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha_2 + \mathfrak{H}\beta_2 + \mathfrak{G}\gamma_2)} \\ : \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_1^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{H}\alpha_1 + \mathfrak{B}\beta_1 + \mathfrak{F}\gamma_1)} - \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_2^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{H}\alpha_2 + \mathfrak{B}\beta_2 + \mathfrak{F}\gamma_2)} \\ : \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_1^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{G}\alpha_1 + \mathfrak{F}\beta_1 + \mathfrak{C}\gamma_1)} - \sqrt{(K + \mathfrak{A}\alpha_2^2 + \cdot\cdot)(\mathfrak{G}\alpha_2 + \mathfrak{F}\beta_2 + \mathfrak{C}\gamma_2)}, \end{aligned}$$

et ces équations qui peuvent aussi être présentées sous la forme plus simple

$$(2.)\quad \begin{aligned} &Ax+Hy+Gz : Hx+By+Fz : Gx+Fy+Cz \\ &= \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2\cdot\cdot)}\,\alpha_2 - \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_2^2\cdot\cdot)}\,\alpha_1 \\ &: \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2\cdot\cdot)}\,\beta_2 - \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_2^2\cdot\cdot)}\,\beta_1 \\ &: \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2\cdot\cdot)}\,\gamma_2 - \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_2^2\cdot\cdot)}\,\gamma_1, \end{aligned}$$

correspondent à un centre d'homologie des deux coniques $U+V_1^2=0$, $U+V_2^2=0$.

En mettant, pour abréger,

$$(3.)\quad \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)}=p_1,\quad \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_2^2+\cdot\cdot)}=p_2,\quad \sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha_3^2+\cdot\cdot)}=p_3,$$

on obtient facilement pour une des axes d'homologie des trois coniques, l'équation

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

et celles des trois autres axes d'homologie en peuvent être tirées en changeant les signes de p_1, p_2, p_3.

Remarquons que l'équation

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} . & 1 & 1 & 1 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

est celle de la polaire d'un des centres de symptose des trois coniques par rapport à la conique circonscrite $U=0$, savoir de celle qui est donnée par le système $V_1=V_2=V_3$, et que les équations des trois autres polaires correspondantes se trouveront en changeant les signes de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ou de $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ou de $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Cherchons le pôle de l'axe d'homologie dont nous venons de trouver l'équation, par rapport à une quatrième conique inscrite $U+V^2=0$ ($V=\alpha x+\beta y+\gamma z$). En exprimant cette équation par $lx+my+nz=0$, on obtiendra les coordonnées de ce pôle au moyen de l'équation

$$(6.)\quad K(\lambda X+\mu Y+\nu Z)=p^2(\mathfrak{A}l\lambda+\cdot\cdot)-(\mathfrak{A}\alpha\lambda+\cdot\cdot)(\mathfrak{A}\alpha l+\cdot\cdot),$$

où, pour abréger, on a mis $p=\sqrt{(K+\mathfrak{A}\alpha^2+\cdot\cdot)}$. (Mémoire cité; équation (12.).) Mais ici on a

$$lx+my+nz = \begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ce qui donne immédiatement

$$\mathfrak{A}l\lambda+\cdots = K\begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ \lambda & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mu & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \nu & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}\alpha l+\cdots = K\begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

et de là on obtient

$$(7.)\quad \lambda X+\mu Y+\nu Z = p^2\begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ \lambda & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mu & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \nu & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\mathfrak{A}\alpha\lambda+\cdots)\begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Savoir, en considérant cette équation comme identique par rapport à λ, μ, ν, on obtient les coordonnées X, Y, Z du point dont il s'agit. En prenant particulièrement ce pôle par rapport à la conique $U+V_2^2=0$, cette équation se réduit à

$$(8.)\quad \frac{1}{p_1}(\lambda X+\mu Y+\nu Z) = p_1\begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ \lambda & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \mu & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \nu & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\mathfrak{A}\alpha_1\lambda+\cdots)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

où, si l'on veut, X, Y, Z seront déterminés par les expressions

$$(9.)\quad \begin{cases} \alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z = -p_1^2+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdots = -K \\ \alpha_2 X+\beta_2 Y+\gamma_1 Z = -p_1p_2+\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdots \\ \alpha_3 X+\beta_3 Y+\gamma_3 Z = -p_1p_3+\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdots \end{cases}$$

Le facteur $\frac{1}{p_1}$ a été supprimé. Delà on obtient aussi l'équation de la droite menée par ce point, savoir par le pôle de l'axe d'homologie par rapport à la conique $U+V_1^2=0$, et par le centre de symptose $V_1=V_2=V_3$. En effet, cette équation est

$$(10.)\quad \begin{vmatrix} V_1, & V_2, & V_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ p_1^2-\mathfrak{A}\alpha_1^2-\cdots, & p_1p_2-\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2-\cdots, & p_1p_3-\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3-\cdots \end{vmatrix} = 0.$$

On pourrait également chercher le point d'intersection de la polaire du centre de symptose $V_1 = V_2 = V_3$ par rapport à $U + V_1^2 = 0$, et de l'axe d'homologie; ce point serait évidemment le pôle de la droite exprimée par la dernière équation, par rapport à $U + V_1^2 = 0$.

Ces résultats seront utiles pour l'interprétation de la formule relative à la conique qui touche les trois coniques données et que nous irons chercher maintenant.

Représentons par $U + V^2 = 0$ l'équation de cette conique; l'équation (10.) du mémoire cité donnera les expressions

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \cdots = -K + pp_1, \\ \mathfrak{A}\alpha\alpha_2 + \cdots = -K + pp_2, \\ \mathfrak{A}\alpha\alpha_3 + \cdots = -K + pp_3, \end{cases}$$

auxquelles nous ajouterons l'équation qui donne la valeur de p, savoir

$$(12.)\quad \mathfrak{A}\alpha^2 + \cdots = -K + p^2.$$

Il n'y a qu'à substituer dans cette dernière équation les valeurs de α, β, γ que donnent les trois autres. Par là on obtient, pour déterminer p, une équation du second degré et de la forme

$$(13.)\quad K^2L - 2KpM + p^2N = 0;$$

c'est-à-dire, en fesant $M^2 - NL = \Omega^2$, $\Delta = \dfrac{L}{\Omega + M}$, on aura $p = \Delta K$ et delà

$$(14.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \cdots = K(\Delta p_1 - 1), \\ \mathfrak{A}\alpha\alpha_2 + \cdots = K(\Delta p_2 - 1), \\ \mathfrak{A}\alpha\alpha_3 + \cdots = K(\Delta p_3 - 1), \end{cases}$$

où Δ est une quantité connue, dont la valeur sera donnée dans la suite. Pour le moment il suffit de remarquer qu'en changeant à la fois les signes de p_1, p_2, p_3, Ω, cette quantité Δ ne change que de signe. Au lieu de chercher les valeurs de α, β, γ, il vaut mieux d'éliminer ces quantités entre ces dernières équations et l'équation $V = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Cela donne, pour trouver V, l'équation

$$(15.)\quad \begin{vmatrix} V, & K(\Delta p_1 - 1), & K(\Delta p_2 - 1) & K(\Delta p_3 - 1) \\ x & \mathfrak{A}\alpha_1 + \mathfrak{H}\beta_1 + \mathfrak{G}\gamma_1, & \mathfrak{A}\alpha_2 + \mathfrak{H}\beta_2 + \mathfrak{G}\gamma_2, & \mathfrak{A}\alpha_3 + \mathfrak{H}\beta_3 + \mathfrak{G}\gamma_3 \\ y & \mathfrak{H}\alpha_1 + \mathfrak{B}\beta_1 + \mathfrak{F}\gamma_1, & \mathfrak{H}\alpha_2 + \mathfrak{B}\beta_2 + \mathfrak{F}\gamma_2, & \mathfrak{H}\alpha_3 + \mathfrak{B}\beta_3 + \mathfrak{F}\gamma_3 \\ z & \mathfrak{G}\alpha_1 + \mathfrak{F}\beta_1 + \mathfrak{C}\gamma_1, & \mathfrak{G}\alpha_2 + \mathfrak{F}\beta_2 + \mathfrak{C}\gamma_2, & \mathfrak{G}\alpha_3 + \mathfrak{F}\beta_3 + \mathfrak{C}\gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut aussi être écrite comme suit:

$$(16.)\quad \begin{vmatrix} V & \Delta p_1-1, & \Delta p_2-1, & \Delta p_3-1 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En mettant $V=0$, on aura l'équation de la chorde de contact de la conique cherchée et de la conique circonscrite $U=0$. En remarquant que l'équation de la conique cherchée peut être mise sous la forme $V=\sqrt{-U}$, l'équation de cette conique se présentera sous la forme très simple:

$$(17.)\quad \begin{vmatrix} \sqrt{-U} & \Delta p_1-1, & \Delta p_2-1, & \Delta p_3-1 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin, si on le veut, sous la forme plus usitée:

$$(18.)\quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} 2U + \begin{vmatrix} . & \Delta p_1-1, & \Delta p_2-1, & \Delta p_3-1 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

La première de ces deux formes est peut-être la plus élégante.

Les propriétés géométriques sont absolument indépendantes de la valeur de la quantité Δ. Mais pour compléter la solution, je vais donner l'expression de cette quantité. Pour cela, remarquons qu'en mettant pour abréger:

$$(19.)\quad \Pi = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$l_1 = \beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2, \quad l_2 = \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3, \quad ..$$
$$m_1 = \gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda = l_1(pp_1-K)+l_2(pp_2-K)+l_3(pp_3-K),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura d'abord l'équation identique

$$-K\Pi(\alpha x+\beta y+\gamma z) = \begin{vmatrix} . & pp_1-K, & pp_2-K, & pp_3-K \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ou ce qui est le même:

$$K\Pi(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$
$$=\lambda.(Ax+Hy+Gz)+\mu.(Hx+By+Fz)+\nu.(Gx+Fy+Cz).$$

Cela donne

$$\Pi(\mathfrak{A}\alpha^2+..)=\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma, \qquad K\Pi(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)=(A\lambda^2+..),$$

c'est-à-dire

$$K\Pi^2.(\mathfrak{A}\alpha^2+..)=A\lambda^2+..,$$

et en vertu de cette expression l'équation qui sert à déterminer p, se réduit à

$$(20.) \qquad K^2\Pi^2+A\lambda^2+..-K\Pi^2.p^2=0.$$

En la comparant avec l'équation $K^2L-2KpM+p^2N=0$, on obtient

$$(21.) \quad \begin{cases} L = & \Pi^2+[A(l_1+l_2+l_3)^2+..], \\ M = & [A(l_1+l_2+l_3)(l_1p_1+l_2p_2+l_3p_3)+..], \\ N = & -K\Pi^2+[A(l_1p_1+l_2p_2+l_3p_3)^2+..], \end{cases}$$

et delà par une transformation dejà employée:

$$(22.) \quad M^2-NL=\Omega^2=\Pi^2.\begin{Bmatrix} -[A(l_1p_1+l_2p_2+l_3p_3)^2+..] \\ +K[A(l_1+l_2+l_3)^2+..]+K\Pi^2 \\ -[\mathfrak{A}(p_1(\alpha_2-\alpha_3)+p_2(\alpha_3-\alpha_1)+p_3(\alpha_1-\alpha_2))^2+..] \end{Bmatrix}.$$

Mais l'interpretation de ce résultat paraît être difficile.

En revenant sur l'équation trouvée pour la conique qui touche les trois coniques données, remarquons que les signes de α_1, β_1, γ_1, ou de α_2, β_2, γ_2, ou de α_3, β_3, γ_3, peuvent être changés conjointement. Cela revient en effet à écrire $-V_1$, ou $-V_2$, ou $-V_3$ au lieu de $+V_1$, ou de $+V_2$, ou de $+V_3$, ce qui ne change pas les coniques inscrites. Mais il est facile de voir qu'en changeant à la fois les signes de V_1, V_2, V_3, on ne change pas l'équation de la conique dont il s'agit; cette équation ne change non plus, en changeant à la fois les signes de p_1, p_2, p_3, Ω; de manière que l'équation trouvée correspond réellement à 32 coniques différentes. En distinguant ces 32 coniques par des symboles de la forme

$$(\pm V_1, \pm V_2, \pm V_3, \pm p_1, \pm p_2, \pm p_3, \pm\Omega):$$

quatre symboles tels que

$$(V_1, V_2, V_3, p_1, p_2, p_3, \Omega),$$
$$(-V_1, -V_2, -V_3, p_1, p_2, p_3, \Omega),$$
$$(V_1, V_1, V_3, -p_1, -p_2, -p_3, -\Omega),$$
$$(-V_1, -V_2, -V_3, -p_1, -p_2, -p_3, -\Omega)$$

ne se rapporteront qu'à une seule coniqne. Nous appelerons *paires de coniques* deux coniques quelconques exprimées par des symboles de la forme

$$(V_1,\ V_2,\ V_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \pm\Omega).$$

Donc les 32 coniques forment 16 paires, groupées quatre à quatre de deux manières différentes. Savoir: pour former un groupe, quatre paires telles que

$$(\pm V_1,\ \pm V_2,\ V_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \pm\Omega),$$

ou quatre paires telles que

$$(V_1,\ V_2,\ V_3,\ \pm p_1,\ \pm p_2,\ p_3,\ \pm\Omega)$$

peuvent être combinées. Ces deux espèces de groupes peuvent être distinguées par les noms ***groupes par rapport à un axe d'homologie,*** et ***groupes par rapport à un centre de symptose.*** En effet: considérons une paire de coniques, par exemple celle qui est représentée par les symboles $(V_1, V_2, V_3, p_1, p_2, p_3, \pm\Omega)$. Les équations des deux coniques de la paire sont les mêmes aux valeurs de A près; il est donc évident que les chordes de contact de ces deux coniques avec la conique circonscrite $U=0$, doivent se rencontrer au point d'intersection des droites

$$\begin{vmatrix} . & 1 & 1 & 1 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} . & p_1 & p_2 & p_3 \\ Ax+Hy+Gz & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Hx+By+Fz & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Gx+Fy+Cz & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La première de ces équations se rapporte à la polaire d'un des centres de symptose des trois coniques inscrites par rapport à la conique circonscrite; la seconde se rapporte à un des axes d'homologie. On a donc le théorème suivant.

„Les points de rencontre des 16 chordes de contact des paires de coniques sont les points de rencontre des polaires des quatre centres de symptose par rapport à la conique circonscrite, avec les quatre axes d'homologie."

Cela suffit pour expliquer la manière dont les deux espèces de groupes ont été distinguées.

Cherchons l'équation de la droite menée par les points de contact d'une des coniques inscrites (par exemple celle que donne l'équation $U+V_1^2=0$) avec deux coniques de la même paire. En représentant par

$$U+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0 \quad \text{et} \quad U+(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2=0$$

les équations de ces deux coniques: les équations des tangentes communes seront

$$(\alpha-\alpha_1)x+(\beta-\beta_1)y+(\gamma-\gamma_1)z=0 \text{ et } (\alpha'-\alpha_1)x+(\beta'-\beta_1)y+(\gamma'-\gamma_1)z=0.$$

et l'équation de la droite qui passe par les points de contact de ces deux droites avec la conique $U+V_1^2=0$ est:

$$(23.)\quad A(\beta\gamma'-\beta'\gamma)x+\cdots+A(\gamma_1(\beta'-\beta)-\beta_1(\gamma'-\gamma))x+\cdots$$
$$+(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z)[\alpha_1(\beta\gamma'-\beta'\gamma)+\beta_1(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)+\gamma_1(\alpha\beta'-\alpha'\beta)]=0.$$

Pour réduire cette équation, en exprimant par Π, l_1, m_1 etc. les valeurs plus haut, mettons $\lambda=l_1(\Delta p_1-1)+l_2(\Delta p_2-1)+l_3(\Delta p_3-1)$ etc., et soient λ', μ', ν' ce que deviennent les valeurs de λ, μ, ν en écrivant Δ' au lieu de Δ. On aura

$$\Pi\alpha = A\lambda+H\mu+G\nu \text{ etc.}$$

et des expressions pareilles des valeurs de λ', μ', ν'. Delà on tire

$$\Pi^2.(\beta\gamma'-\beta'\gamma)=(\mu\nu'-\mu'\nu)\mathfrak{A}+(\nu\lambda'-\nu'\lambda)\mathfrak{H}+(\lambda\mu'-\lambda'\mu)\mathfrak{G},$$

etc.,

$$\mu\nu'-\mu'\nu=(m_2n_3-m_3n_2)((\Delta p_2-1)(\Delta' p_3-1)-(\Delta' p_2-1)(\Delta p_3-1))+\text{etc.}$$
$$=\Pi(\Delta'-\Delta).[\alpha_1(p_2-p_3)+\alpha_2(p_3-p_1)+\alpha_3(p_1-p_2)],$$

etc.,

c'est-à-dire, en supprimant le facteur commun $\frac{\Delta'-\Delta}{\Pi}$:

$$\beta\gamma'-\beta'\gamma=(\mathfrak{A}\alpha_1+\mathfrak{H}\beta_1+\mathfrak{G}\gamma_1)(p_2-p_3)$$
$$+(\mathfrak{A}\alpha_2+\mathfrak{H}\beta_2+\mathfrak{G}\gamma_2)(p_3-p_1)$$
$$+(\mathfrak{A}\alpha_3+\mathfrak{H}\beta_3+\mathfrak{G}\gamma_3)(p_1-p_2)$$

etc.

Aussi on aura, en supprimant le même facteur:

$$\gamma_1(\beta'-\beta)-\beta_1(\gamma'-\gamma)=(l_1p_1+l_2p_2+l_3p_3)(\gamma_1H-\beta_1G)$$
$$+(m_1p_1+m_2p_2+m_3p_3)(\alpha_1G-\gamma_1A)$$
$$+(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3)(\beta_1A-\alpha_1H).$$

Delà on obtient immédiatement

$$A(\beta\gamma'-\beta'\gamma)x+\cdots=K[V_1(p_2-p_3)+V_2(p_3-p_1)+V_3(p_1-p_2)],$$

et par une réduction un peu plus difficile:

$$A(\gamma_1(\beta'-\beta)-\beta_1(\gamma'-\gamma))x+\cdots$$
$$=(l_1p_1+l_2p_2+l_3p_3)[z(\mathfrak{H}\alpha_1+\mathfrak{B}\beta_1+\mathfrak{F}\gamma_1)-y(\mathfrak{G}\alpha_1+\mathfrak{F}\beta_1+\mathfrak{C}\gamma_1)]$$
$$+(m_1p_1+m_2p_2+m_3p_3)[x(\mathfrak{G}\alpha_1+\mathfrak{F}\beta_1+\mathfrak{C}\gamma_1)-z(\mathfrak{A}\alpha_1+\mathfrak{H}\beta_1+\mathfrak{G}\gamma_1)]$$
$$+(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3)[y(\mathfrak{A}\alpha_1+\mathfrak{H}\beta_1+\mathfrak{G}\gamma_1)-x(\mathfrak{H}\alpha_1+\mathfrak{B}\beta_1+\mathfrak{F}\gamma_1)]$$
$$=V_1[p_2(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdots)-p_3(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdots)]+V_2[p_3(\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdots)-p_1(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdots)]$$
$$+V_3[p_1(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdots)-p_2(\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdots)]$$

et enfin

$$(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z)[\alpha_1(\beta\gamma'-\beta'\gamma)+\beta_1(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)+\gamma_1(\alpha\beta'-\alpha'\beta)]$$
$$=V_1[(\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdots)(p_2-p_3)+(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdots)(p_3-p_1)+(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdots)(p_1-p_2)].$$

Donc, en réunissant ces expressions des trois parties de l'équation dont il s'agit, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned}(24.)\qquad & V_1[(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)(p_2-p_3)-(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdot\cdot)p_1+(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdot\cdot)p_1]\\ &+V_2[(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)p_3-(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)p_1]\\ &+V_3[(K+\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdot\cdot)p_1-(K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)p_2]=0.\end{aligned}$$

En mettant p_1^2 au lieu de $K+\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot$ et en supprimant le facteur commun p_1, on aura

$$\begin{aligned}V_1[p_1p_2-(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdot\cdot)-p_1p_3+(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdot\cdot)]+V_2[p_1p_3-(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdot\cdot)-K]\\ +V_3[K-p_1p_2+(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdot\cdot)]=0,\end{aligned}$$

et en remettant $p_1^2-(\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot)=K$, on obtient pour l'équation dont il s'agit:

$$(25.)\qquad \begin{vmatrix} V_1, & V_2, & V_3\\ 1, & 1, & 1\\ p_1^2-(\mathfrak{A}\alpha_1^2+\cdot\cdot), & p_1p_2-(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2+\cdot\cdot), & p_1p_3-(\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3+\cdot\cdot)\end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est celle de la droite menée par les points de contacts de deux coniques de la même paire avec la conique $U+V_1^2=0$. Elle est la même qui a été déjà obtenue pour la droite résultante d'une certaine construction géométrique; on est donc arrivé au théorème connu suivant.

„La droite menée par le pôle d'un axe d'homologie par rapport à une des trois coniques inscrites, et par un centre de symptose, rencontre cette même conique en deux points qui sont les points de contact de cette conique avec deux coniques de la même paire."

Ou ce qui revient au même:

„Le point de rencontre de la polaire d'un centre de symptose, par rapport à une des trois coniques inscrites, et d'un axe d'homologie, est le point de rencontre des tangentes communes de cette même conique et de deux coniques de la même paire."

Cambridge, 19. Mai 1848.

3.

Note sur un système de certaines formules.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Les formules dont il s'agit se rapportent à la théorie de la composition des formes quadratiques. Je les présente ici pour faire voir la relation qui existe entre elles et quelque formules de mon mémoire sur les hyperdéterminants (tome XXX. p. 1). En adoptant la notation de ce mémoire, et en mettant

$$(1.)\quad \begin{cases} 2A = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&1\\1&2&2\end{Bmatrix}}, & 2B = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{Bmatrix}}, & 2C = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}2&1&1\\2&2&2\end{Bmatrix}}, \\ 2A' = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&1\\2&1&2\end{Bmatrix}}, & 2B' = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{Bmatrix}}, & 2C' = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&2&1\\2&2&2\end{Bmatrix}}, \\ 2A'' = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&1\\2&2&1\end{Bmatrix}}, & 2B'' = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{Bmatrix}}, & 2C'' = \overset{\dagger}{\begin{Bmatrix}1&1&2\\2&2&2\end{Bmatrix}}, \end{cases}$$

savoir en mettant, pour abréger,

$$(2.)\quad \begin{cases} a = 111, & e = 112, \\ b = 211, & f = 212, \\ c = 121, & g = 122, \\ d = 221, & h = 222; \end{cases}$$

$$(3.)\quad \begin{cases} A = ag - ce, & 2B = ah + bg - de - cf, & C = bh - df, \\ A' = af - be, & 2B' = ah + cf - bg - de, & C' = ch - dg, \\ A'' = fg - eh, & 2B'' = ah + de - bg - cf, & C'' = bc - ad, \end{cases}$$

on aura identiquement:

$$(4.)\quad \begin{cases} AA' = A''a^2 + 2B''ae + C''e^2, \\ AB' = A''ac + B''(ag + ce) + C''eg, \\ AC' = A''c^2 + 2B''cg + C''g^2; \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} BA' = A''ab + B''(af + be) + C''ef, \\ BB' + \Theta = A''ad + B''(ah + de) + C''eh, \\ BB' - \Theta = A''be + B''(bg + cf) + C''fg, \\ BC' = A''cd + B''(ch + dg) + C''gh; \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} CA' = A''b^2 + 2B''bf + C''f^2, \\ CB' = A''bd + B''(bh + df) + C''fh, \\ CC' = A''d^2 + 2B''dh + C''h^2; \end{cases}$$

$$(7.)\quad \Theta = B^2 - AC = B'^2 - A'C' = B''^2 - A''C''$$
$$= \tfrac{1}{4}\{a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2$$
$$- 2ahbg - 2ahcf - 2ahde - 2bgcf - 2bgde - 2cfde$$
$$+ 4adfg + 4bech\}.$$

En regardant la seconde et la troisième des équations (5.) comme équivalentes avec la seule équation $2BB' = A''(ad+be) + B''(ah+de+bg+cf) + C''(eh+fg)$, on trouvera que les systèmes (4. 5. et 6.) répondent à la transformation

$$(8.)\quad A''z_1^2 + 2B''z_1z_2 + C''z_2^2 = (Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2)(A'y_1^2 + 2B'y_1y_2 + C'y_2^2),$$
$$z_1 = ax_1x_2 + by_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1y_2,$$
$$z_2 = ex_1x_2 + fy_1x_2 + gx_1y_2 + hy_1y_2,$$

qui appartient à une théorie dont celle des transformations linéaires n'est qu'un cas particulier.

Je profite de cette occasion pour donner une addition au „Note sur les hyperdéterminants" (tome XXXIV.). J'y ai dit (§. III.) que je ne pouvais pas expliquer la raison de ce que la courbe de sixième ordre donnée par les équations $ae - 4bd + 3c^2 = 0$ et $ace + 2bed - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0$, ait une osculatrice développable qui n'est que du sixième ordre, et que cette réduction s'opérait en partie au moyen des quatre points de rebroussement de la courbe. En effet, cette courbe, considérée comme l'intersection de deux surfaces, l'une du second et l'autre du troisième ordre, a six droites que dans le mémoire cité dans cette note j'ai nommé ***droites par deux points***. Cela suffit pour compléter la réduction dont il s'agit. M. ***Salmon***, a qui je dois cette remarque, m'a fait voir aussi que l'expression que j'ai donnée pour le nombre des points de rebroussement de la courbe, dans le cas d'une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre, combinée avec les formules du mémoire mentionné, suffit pour former le tableau complèt des singularités de la famille de surfaces développables dont il s'agissait, savoir:

m,	n,	r,	α,	β,	g,	h,
$3(m-2)$,	m,	$2(m-1)$,	0,	$4(m-3)$,	$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$,	$\frac{9n^2-53n+80}{2}$,

x,	y,
$2(n-2)(n-3)$,	$2(n-1)(n-3)$.

Ici, dans la ligne supérieure, m, n, r, α, β, g, h, x, y ont les mêmes significations que dans le mémoire dont je viens de parler; et dans la ligne inférieure, m est le degré de l'équation primitive.

Cambridge, 22. Mai 1848.

4.

Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Les fonctions

$$\{\lambda, \mu, x, y\}$$

$$= P_{0,0} - \left(\frac{1}{1} P_{1,0} x + \frac{1}{1} P_{0,1} y\right) + \left(\frac{1}{1.2} P_{2,0} x^2 + \frac{1}{1.1} P_{1,1} xy + \frac{1}{1.2} P_{0,2} y^2\right) - \text{etc.},$$

où $P_{0,0} = 1$ et les autres coefficients sont donnés par l'équation à différences

$$\begin{aligned}
&[-l\lambda - m\mu + (l-m)^2] P_{l,m} \\
&+ l(\lambda - 2l + 2m + 2)(\lambda - 2l + 2m + 1) P_{l-1,m} \\
&+ m(\mu + 2l - 2m + 2)(\mu + 2l - 2m + 1) P_{l,m-1} \\
&- 16lm[\lambda\mu - (2l + 2m - 4)(\lambda + \mu)] P_{l-1,m-1} = 0,
\end{aligned}$$

jouent, comme je crois, un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques *).

En effet, en fesant $x = \sqrt{k} \sin \operatorname{am} u$, $\alpha = k + \frac{1}{k}$ et en représentant par $\varkappa$ le dénominateur de la fonction $\sqrt{k} \sin \operatorname{am} nu$ (où n est un entier positif quelconque), on aura

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_s + \cdots,$$

cette série étant continuée jusqu'au terme $\varkappa_{\frac{1}{2}n}$ ou $\varkappa_{\frac{1}{2}(n-1)}$, selon que n est pair

---

*) La fonction $\{\lambda, \mu, x, y\}$ satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}
&-(\lambda(\lambda-1)x + \mu(\mu-1)y + 16\lambda\mu . xy) u \\
&+(-(\lambda-1) + (4\lambda-6)x + (4\mu+2)y + 32(\lambda+\mu)xy) y \cdot \frac{du}{dx} \\
&+(-(\mu-1) + (4\lambda+2)x + (4\mu-6)y + 32(\lambda+\mu)xy) y \cdot \frac{du}{dy} \\
&+(1-4x-4y)\left(x^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2} - 2xy \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy} + y^2 \cdot \frac{d^2u}{dy^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

qui peut être tirée de l'équation

$$n(n-1)x^2u + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\frac{du}{dx} + (1 - \alpha x^2 + x^4)\frac{d^2u}{dx^2} - 2n(\alpha^2 - 4)\frac{du}{d\alpha} = 0$$

(voyez le mémoire cité plus bas), mais qu'on obtient plus facilement au moyen de l'équation aux différences à laquelle satisfont les coefficients $P_{l,m}$.

ou impair, et la fonction $\mathfrak{z}_s$ étant donnée par l'équation

$$\mathfrak{z}_s = (-1)^{(n+1)s}(4\alpha)^{s(n-2s)}x^{2ns}\cdot\left\{n^2-2ns,\ 2ns,\ \frac{x^2}{4\alpha},\ \frac{1}{4\alpha x^2}\right\},$$

où cependant les termes qui contiennent des puissances négatives de α doivent être négligés. Ces formules reviennent à celles que j'ai présentées dans la „Note sur les fonctions elliptiques" (tome XXXVII.).

En revenant aux fonctions $\{\lambda, \mu, x, y\}$, j'ai trouvé les deux formules

$$\begin{aligned}
P_{l,0} &= \lambda[\lambda-l-1]^{l-1},\\
P_{l,1} &= \mu\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}\\
&\quad + l\lambda[\lambda-l-1]^{l-3}\{(18l-16)\lambda-(16\lambda^2-10l-4)\}\\
&\quad - \frac{10l\lambda\mu}{\lambda+\mu}\lambda[\lambda-l]^{l-2}
\end{aligned}$$

(où selon la notation de *Vandermonde* la factorielle $p(p-1)\cdots(p-q+1)$ est exprimée par $[p]^q$). Delà, et en calculant la valeur de $P_{2,2}$ à l'aide de l'équation à différences, on obtient:

$$\begin{aligned}
P_{0,0} &= 1,\\
P_{1,0} &= \lambda,\\
P_{0,1} &= \mu,\\
P_{2,0} &= \lambda(\lambda-3),\\
P_{1,1} &= \left(\lambda\mu+2-\frac{10\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right),\\
P_{0,2} &= \mu(\mu-3),\\
P_{3,0} &= \lambda(\lambda-4)(\lambda-5),\\
P_{2,1} &= \lambda\left((\lambda-3)\mu+40-\frac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right),\\
P_{1,2} &= \mu\left((\mu-3)\lambda+40-\frac{20\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right),\\
P_{0,3} &= \mu(\mu-4)(\mu-5),\\
P_{4,0} &= \lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7).\\
P_{3,1} &= \lambda\left(\mu(\lambda-4)(\lambda-5)+114\lambda-330-\frac{30\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\lambda-3)\right),\\
P_{2,2} &= \left(\lambda(\lambda-3).\mu(\mu-3)+152\lambda\mu+336-\frac{40\lambda^2\mu^2+1156\lambda\mu}{\lambda+\mu}+\frac{200\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right),\\
P_{1,3} &= \mu\left(\lambda(\mu-4)(\mu-5)+114\mu-330-\frac{30\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\mu-3)\right),\\
P_{0,4} &= \mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7).
\end{aligned}$$

La première partie de cette table se trouve dans la note cité.

Nous remarquerons en passant que pour $y = 0$, on a

$$\{\lambda, \mu, x, 0\} = (\tfrac{1}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} - x)})^{\lambda}.$$

On sait que la théorie de la multiplication des fonctions circulaires dépend de la fonction $(x + \sqrt{(x^2 - 1)})^{\lambda}$ ou, en fesant $\frac{1}{4}x^2 = \mathrm{x}$, de la fonction $(\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} - \mathrm{x})})^{\lambda}$. Cela fait espérer que l'on parviendra par les fonctions $\{\lambda, \mu, x, y\}$ à la théorie complète de la multiplication des fonctions elliptiques.

J'ai calculé les valeurs qui servent à trouver les dénominateurs $\mathfrak{z}$ de $\operatorname{sin am} nu$, où n est un quelconque des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Les voici:

$$n = 1, \quad \mathfrak{z}_0 = 1, \quad +\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0,$$

$$n = 2, \quad \mathfrak{z}_0 = 1, \quad -\mathfrak{z}_1 = -x^4, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_1,$$

$$n = 3, \quad \mathfrak{z}_0 = 1, \quad +\mathfrak{z}_1 = 4\alpha x^6 - (6x^4 + 3x^8), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1,$$

$$n = 4, \quad \mathfrak{z}_0 = 1, \quad -\mathfrak{z}_1 = -16\alpha^2 x^8 + 4\alpha(8x^{10} + 8x^6) - (20x^{12} + 26x^8 + 20x^4),$$
$$\mathfrak{z}_2 = x^{16}, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2,$$

$$n = 5, \quad \mathfrak{z}_0 = 1,$$
$$\mathfrak{z}_1 = \quad 64\alpha^3 x^{10}$$
$$-16\alpha^2(15x^{12} + 10x^8)$$
$$+ \ 4\alpha(90x^{14} + 92x^{10} + 35x^6)$$
$$- \quad (275x^{16} + 300x^{12} + 125x^8 + 50x^4),$$
$$\mathfrak{z}_2 = \quad 16\alpha^2 x^{20}$$
$$-4\alpha(5x^{22} + 20x^{18})$$
$$+ \quad (5x^{24} + 62x^{20} + 170x^{16}),$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2,$$

$$n = 6, \quad +\mathfrak{z}_0 = 1,$$
$$-\mathfrak{z}_1 = -256\alpha^4 x^{12}$$
$$+ \ 64\alpha^3(24x^{14} + 12x^{10})$$
$$- \ 16\alpha^2(252x^{16} + 210x^{12} + 54x^8)$$
$$+ \quad 4\alpha(1520x^{18} + 1584x^{14} + 576x^{10} + 112x^6)$$
$$- \quad (5814x^{20} + 7704x^{16} + 2400x^{12} + 444x^8 + 105x^4)$$
$$+\mathfrak{z}_2 = \quad 256\alpha^4 x^{24}$$
$$- \ 64\alpha^3(12x^{26} + 24x^{22})$$
$$+ \ 16\alpha^2(54x^{28} + 210x^{24} + 252x^{20})$$
$$- \quad 4\alpha(112x^{30} + 576x^{26} + 1584x^{22} + 1520x^{18})$$
$$+ \quad (105x^{32} + 444x^{28} + 2400x^{24} + 7704x^{20} + 5814x^{16}),$$
$$-\mathfrak{z}_3 = -x^{36},$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 - \mathfrak{z}_4,$$

$$n = 7,\quad \mathfrak{z}_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 = {} & 1024\alpha^5 x^{14} \\ & -256\alpha^4(35x^{16}+14x^{12}) \\ & +64\alpha^3(1120x^{18}+196x^{14}+77x^{10}) \\ & -16\alpha^2(5425x^{20}+5040x^{16}+1575x^{12}+210x^8) \\ & +4\alpha(35525x^{22}+41300x^{18}+14934x^{14}+2604x^{10}+294x^6) \\ & -(166257x^{24}+260750x^{20}+220395x^{16}+14756x^{12} \\ & \qquad +1304x^8+196x^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_2 = {} & 4096\alpha^6 x^{28} \\ & -1024\alpha^5(21x^{30}+28x^{26}) \\ & +256\alpha^4(189x^{32}+470x^{28}+350x^{24}) \\ & -64\alpha^3(952x^{34}+3192x^{30}+4550x^{26}+2576x^{22}) \\ & +16\alpha^2(2940x^{36}+11200x^{32}+21750x^{28}+25452x^{24}+12397x^{20}) \\ & -4\alpha(5733x^{38}+22064x^{34}+44324x^{30}+82488x^{26}+96761x^{22} \\ & \qquad +40964x^{18}) \\ & +(7007x^{40}+59388x^{36}+35231x^{32}+41132x^{28}+278173x^{24} \\ & \qquad +302918x^{20}+94962x^{16}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_3 = {} & 64\alpha^3 x^{42} \\ & -16\alpha^2(7x^{44}+42x^{40}) \\ & +4\alpha(14x^{46}+236x^{42}+819x^{38}) \\ & -(7x^{48}+308x^{44}+4053x^{40}+9842x^{36}),\end{aligned}$$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3.$$

Pour rassembler tous mes résultats, je veux citer ceux que j'ai donné dans le „Cambridge and Dublin Mathematical Journal." En écrivant la lettre p au lieu de n (symbole qui représente le carré du nombre n de ce mémoire), et en changeant les signes des termes alternatifs, on aura pour solution particulière de l'équation

$$p(p-1)x^2z+(p-1)(ax-2x^3)\frac{dz}{dx}+(1-\alpha x^2+x^4)\frac{d^2z}{dx^2}-2p(\alpha^2-4)\frac{dz}{d\alpha}=0$$

(savoir pour la solution qui pour $p=n^2$ se réduit au dénominateur de $\sin\mathrm{am}\,u$) la valeur

$$z = 1-C_2\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}+C_6\cdot\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\text{etc.},$$

les coefficients étant déterminés au moyen de l'expression

$$C_{r+2} = -(2r+1)(2r+2)(p-2r)(p-2r-1)C_r+(2r+2)(p-2r-2)\alpha C_{r+1} \\ -2p(\alpha^2-4)\frac{dC_{r+1}}{d\alpha}.$$

Cela donne les valeurs particulières suivantes:

$$C_2 = 2p(p-1),$$
$$C_3 = 8p(p-1)(p-4)\alpha,$$
$$C_4 = 4p(p-1)(p-4)(p+75) + 32p(p-1)(p-4)(p-9)\alpha^2,$$
$$C_5 = 96p(p-1)(p-4)(p-9)(p+44)\alpha + 128p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)\alpha^3,$$
$$C_6 = +24p(p-1)(p-4)(p-9).(17p^2+403p+9000) + 960p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p+41)\alpha^2 + 512p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p-25)\alpha^4,$$
$$C_7 = 96p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16).(79p^2+2825p+36180)\alpha + 7168p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p-25)(p+42)\alpha^3 + 2048p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p-25)(p-36)\alpha^5,$$
$$C_8 = +48p(p-1)(p-4)(p-9).(283p^4-26978p^3+277827p^2-5491932p+127764000) + 3840p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p-25).(23p^2+1069p+23436)\alpha^2 + 15360p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p-25)(p-36)(3p+133)\alpha^4 + 8192p(p-1)(p-4)(p-9)(p-16)(p-25)(p-36)(p-49)\alpha^6$$

etc.

On remarquera que dans ces formules le premier terme de C_8 ne contient pas, comme on pourrait l'attendre, le facteur $(p-25)$. Cela vient de ce que le coefficient C_8 est composé des coefficients des termes correspondants de $\mathfrak{x}_0$ et $\mathfrak{x}_1$, tandis que les coefficients C_7 etc. sont tout simplement des coefficients de $\mathfrak{x}_0$. La suite des coefficients C offre plusieurs discontinuités de cette sorte. Par exemple on obtient généralement

$$C_r = (-)^{r+1}.\begin{cases} 2^{2r-3}p(p-1^2)\ldots.(p-(r-1)^2)\,C_r^1\alpha^{r-2} \\ +2^{2r-6}p(p-1^2)\ldots.(p-(r-2)^2)\,C_r^2\alpha^{r-4} \\ +2^{2r-9}p(p-1^2)\ldots.(p-(r-3)^2)\,C_r^3\alpha^{r-6} \\ +\text{ etc.}\end{cases}$$

Mais le terme suivant ne contient pas le facteur $p(p-1^2)\ldots.(p-(r-4)^2)$. Quant à la loi des coefficients C_r^1, C_r^2, C_r^3, on a

$$C_r^1 = 1,$$
$$C_r^2 = (r-3)(n(2r-7)+(r-1)(8r-7)),$$
$$C_r^3 = (r-4)(r-5)(n^2(4r^2-24r+51)+n(32r^3-220r^2+412r-255) + 2(r-1)(r-2)(32r^2-88r+51)).$$

Également, en ordonnant la série suivant les puissances descendantes de x, la quantité z étant la solution particulière qui pour $p = n^2$ (n impair) se réduit au dénominateur de $\sin \mathrm{am}\, nu$, on aura

$$z = (-1)^{\frac{1}{2}\sqrt{(p-1)}} \cdot \sqrt{p} \cdot \left(x^{p-1} - D_1 \cdot \frac{x^{p-3}}{1.2.3} + D_2 \cdot \frac{x^{p-5}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \right),$$

où les coefficients D sont donnés par l'expression

$$D_{r+2} = -(2r+3)(2r+2)(p-2r-2)(p-2r-1)D_r + (2r+3)(p-2r-3)\alpha D_{r+1} - 2p(\alpha^2-4)\frac{dD_{r+1}}{d\alpha},$$

ce qui donne les valeurs particulières suivantes:

$$\begin{aligned}
D_1 &= (p-1)\alpha, \\
D_2 &= 2(p-1)(p+6) \\
&\quad + (p-1)(p-9)\alpha^2, \\
D_3 &= 6(p-1)(p-9)(p+10)\alpha \\
&\quad + (p-1)(p-9)(p-25)\alpha^3, \\
D_4 &= -36(p-1).(p^3-12p^2+36p+420) \\
&\quad +12(p-1)(p-9)(p-25)(p+14)\alpha^2 \\
&\quad + (p-1)(p-9)(p-25)(p-49)\alpha^4, \\
D_5 &= -12(p-1)(p-9).(47p^3-355p^2+3188p+31500)\alpha \\
&\quad +20(p-1)(p-9)(p-25)(p-49)(p+18)\alpha^3 \\
&\quad + (p-1)(p-9)(p-25)(p-49)(p-81)\alpha^5, \\
D_6 &= -24(p-1)(p-9).(23p^4+2375p^3-14638p^2-116100p+693000) \\
&\quad -12(p-1)(p-9).(493p^4-8882p^3+70317p^2-361641p-7276500)\alpha^2 \\
&\quad +30(p-1)(p-9)(p-25)(p-49)(p-81)(p+22)\alpha^4 \\
&\quad + (p-1)(p-9)(p-25)(p-36)(p-49)(p-81)(p-121)\alpha^6,
\end{aligned}$$

etc.

Les mêmes remarques sont applicables aux coefficients C. Seulement la discontinuité a lieu ici dès le coefficient D_4. Il paraît que c'est cause de cette discontinuité, que le signe négatif se présente aux premiers termes des coefficients D_4 etc. En effet, on a généralement:

$$\begin{aligned}
D_r &= (p-1)(p-9)..(p(2r-1)^2)\alpha^r \\
&\quad +(p-1)(p-9)..(p(2r-3)^2)r(r-1)(p+4r-2)\alpha^{r-2} \\
&\quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ici la discontinuité se présente déjà dans le terme suivant, qui ne contient pas le facteur $(p-1)(p-9)\ldots.(p-(2r-5)^2)$. Et c'est précisément le terme suivant qui devient négatif dans les expressions de D_4, D_5 et D_6. Mais tout cela est moins important que la théorie des séries partielles $\varkappa_s$, sur lesquelles les recherches ultérieures seront à fonder.

Londres, 58. Chancery Lane, 15. Nov. 1848.

Problème.

Donner la solution de l'équation à différences

$$\begin{aligned}&(-l\lambda-m\mu+(l-m)^2)\,P_{l,m}\\&+\,l(\lambda-2l+2m+2)(\lambda-2l+2m+1)\,P_{l-1,m}\\&+m(\mu+2l-2m+2)(\mu+2l-2m+1)\,P_{l,m-1}\\&-16lm(\lambda\mu-(2l+2m-4)(\lambda+\mu))\,P_{l-1,m-1}=0\end{aligned}$$

dans laquelle $P_{0,0}=1$. (Voyez la „Note sur quelques formules etc.")

5.

Über die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten nach einer Methode der Einschliefsung in Grenzen.

(Von Herrn Dr. *M. Ohm,* Prof. der Mathematik an der Universität zu Berlin.)

§. 1.

Im 4ten Heft 36ten Bandes dieser Zeitschrift, in der Abhandlung: „Über das Verhalten der Gamma-Functionen zu den Producten äquidifferenter Factoren," sehen wir eine, zwar vollkommen gründliche Theorie der Factoriellen und Facultäten geliefert, dabei aber gleichzeitig bemerkt, dafs der dort eingehaltene Weg nicht der kürzeste sei, sondern dafs der einfachste Weg in einer eigenen Schrift über „bestimmte Integrale" betreten werden solle. — In der eben erwähnten Abhandlung wurden nach und nach folgende Definitionen aufgestellt:

$$1. \quad a^{n|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots[a+(n-1)r],$$

wenn n positiv ganz ist;

$$2. \quad a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}},$$

wenn m und n positiv ganz sind, $m-n$ aber beliebig *positiv ganz,* 1, 0 oder *negativ ganz* gedacht wird;

$$3. \quad 1^{n|1} = n! = \Gamma_{1+n} = \int_0^\infty e^{-z}.z^n.dz,$$

wenn $1+n$ *positiv* ganz oder gebrochen ist;

$$4. \quad a^{n|r} = r^n.\frac{\left(\frac{a}{r}+n-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!},$$

wenn r und $\frac{a}{r}+n$, wie $\frac{a}{r}$ selbst *positiv* ganz oder gebrochen sind, so dafs der Exponent n nun schon negativ sein kann, aber an sich noch $< \frac{a}{r}$ sein mufs. — Ferner

$$5. \quad a^{n|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+nr)^{\nu|r}}\cdot(a+\nu r)^{n|r},$$

wenn ν beliebig und so grofs genommen wird, übrigens positiv ganz, dafs

$\frac{a}{r}+\nu+n$, eben so wie $\frac{a}{r}+\nu$ zugleich mit r ***positiv*** werden, übrigens ganz oder gebrochen, während a und n jetzt beliebig reell gedacht sind, positiv oder negativ ganz oder gebrochen; — endlich, wenn r ***negativ***,

$$6. \qquad a^{n|r} = [a+(n-1)r]^{n|-r},$$

wo $-r$ dann positiv ist, die Factorielle rechts also bereits eine bestimmte Bedeutung hat.

Durch diese 6 Definitionen war die allgemeinste reelle Factorielle $a^{n|r}$ definirt, so dafs ihre Bedeutung feststand, in jedem Falle, wo a, n und r ***beliebig reell*** gegeben sind.

Für alle diese Factoriellen wurde nun bewiesen die Gültigkeit der drei Grundgesetze:

$$\text{I.} \qquad a^{n|r} = [a+(n-1)r]^{n|-r},$$

$$\text{II.} \qquad a^{m|r}.(a+mr)^{n|r} = a^{n|r}.(a+nr)^{m|r} = a^{m+n|r},$$

$$\text{III.} \qquad a^{n|r} = h^n.\left(\frac{a}{h}\right)^{n\left|\frac{r}{h}\right.},$$

jedoch letzteres mit der Beschränkung, dafs h nur positiv sein darf, so oft der Exponent n (positiv oder negativ) ***gebrochen*** ist.

Der binomische Lehrsatz für Factoriellen

$$\text{IV.} \qquad (a+b)^{n|r} = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot a^{n-\mathfrak{b}|r}.b^{\mathfrak{b}|r}\right] *)$$

gilt nur

α) wenn n positiv ganz ist und r beliebig,

β) wenn n beliebig gebrochen oder ganz, positiv oder negativ, aber r mit $r-a-b$ zugleich ***negativ*** ist.

Ist dagegen n negativ ganz, oder positiv oder negativ gebrochen, und r ***positiv***, so gilt derselbe Satz IV. im Allgemeinen nicht mehr, sondern es tritt dann an dessen Stelle der folgende:

$$\text{V.} \qquad (a+b)^{n|r}.\frac{\sin\frac{a}{r}\pi.\sin\left(\frac{a+b}{r}+n\right)\pi}{\sin\left(\frac{a}{r}+n\right)\pi.\sin\frac{a+b}{r}\pi} = S\left[\frac{n^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot a^{n-\mathfrak{b}|r}.b^{\mathfrak{b}|r}\right],$$

wenn nur $r-a-b$ mit r zugleich positiv ist; und in dieser Gleichung geht

*) Die ***kleinen deutschen*** Buchstaben stellen hier allemal ***alle*** Werthe vor, welche nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, ... in inf. sind und ***nie*** negativ; und das Summenzeichen S stellt allemal die Summe ***aller*** für diese Werthe der kleinen deutschen Buchstaben hervorgehenden Glieder vor.

der Ausdruck zur Linken nur dann in $(a+b)^{n|r}$ über, wenn $\frac{b}{r}$ oder n positiv oder negativ ganz ist, so dafs die Formel V. für einen positiven ganzen Werth von n auch noch wahr bleibt.

§. 2.

Zugleich findet man aus diesen Definitionen für jeden reellen Werth von a, m und r,

$$(\odot.) \qquad a^{m|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+mr)^{\nu|r}} \cdot (\nu r)^m \quad \text{für} \quad \nu = \pm\infty,$$

je nachdem r $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, d. h. der Werth des Ausdrucks zur Rechten (wo im Zähler und im Nenner ein Product von $\pm\nu$ äquidifferenten Factoren vorkommt *)) nähert sich dem nach §. 1. definirten Werthe von $a^{m|r}$ desto mehr, je gröfser die ganze Zahl ν genommen wird, und kommt für $\pm\nu = \infty$ demselben unendlich nahe.

Es ist nun offenbar, dafs man die ganze Lehre der Factoriellen viel einfacher und doch eben so gründlich bekommt, wenn man *diese* Gleichung $(\odot.)$ unmittelbar vom Anfang an als Definition der Factorielle $a^{m|r}$ zu Grunde legt; — und man ist dazu um so berechtigter als das Gesetz §. 1. II., welches man aus der Betrachtung der Producte äquidifferenter Factoren unmittelbar abstrahirt, sogleich (wenn ν statt n geschrieben wird)

$$a^{m|r} = \frac{a^{\nu|r}}{(a+mr)^{\nu|r}} \cdot (a+\nu r)^{m|r}$$

liefert, dieser letztere Factor $(a+\nu r)^{m|r}$ aber, so lange m ganz und endlich ist, offenbar desto näher und unendlich nahe mit $(\nu r)^m$ zusammenfällt, je gröfser ν und wenn zuletzt ν unendlich grofs gedacht wird **).

---

*) Dies gilt, auch wenn ν deshalb negativ genommen werden mufs, weil r negativ ist, doch noch, nur dafs dann die Factorielle im Nenner, ein Product von $-\nu$ Factoren im Zähler bildet, und umgekehrt, während jetzt $-\nu$ positiv ganz ist.

**) Wir wollen diese Gelegenheit wahr nehmen, einen von den Analysten zwar gekannten, aber nirgends noch entschieden ausgesprochenen Umstand, hier besonders und ausdrücklich zur Sprache zu bringen. Wir haben hier die unendlichen Reihen und die Producte von unendlich vielen Factoren im Sinne; man sollte nämlich beide anders schreiben als dies gewöhnlich geschieht, um beide entschieden und bestimmt ausgedrückt zu haben. — Wenn man z. B. den Ausdruck von *Wallis* für π so schreibt:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot\ldots},$$

so ist er offenbar nicht deutlich genug geschrieben, denn der weniger Geübte könnte z. B. den Factor 1 unten, für überflüssig halten, ihn weglassen, dann aber oben und unten gleich viel Factoren nehmen, und er würde, je mehr Factoren er nimmt, desto

Auf der andern Seite giebt es aber noch immer Mathematiker, wenn auch die Anzahl derselben in den letzten 50 Jahren stets abgenommen zu haben scheint, welche dergestalt an den Methoden der Alten hängen, dafs sie eine ganze zusammenhängende und wichtige Lehre höchst ungern auf eine Definition gebaut sehen, welche, ***ihrer Ansicht nach,*** den Begriff deshalb

---

weiter von dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ zur Linken abkommen. — Besser schon wäre es, wenn man so schriebe:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots;$$

aber gewifs ist es am besten, wenn man so schreibt:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2^{\nu!2}\cdot 2^{\nu!2}}{1^{\nu!2}\cdot 3^{\nu!2}} \quad \text{für} \quad \left\{\begin{matrix}\nu = +\infty\\ \text{und ganz}\end{matrix}\right\},$$

und den Zusatz „für $\nu = +\infty$" dahin versteht, dafs dieser Ausdruck dem Werthe von $\frac{1}{2}\pi$ zur Linken für einen *sehr* grofsen positiven ganzen Werth von ν, *sehr* nahe, für einen *unendlich*-grofsen Werth von ν aber *unendlich* nahe kommt.

Ganz analog müfsten nun *numerische* und *convergente* Reihen geschrieben werden, z. B. so:

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} = e^x, \qquad \text{für} \quad \nu = +\infty \text{ und ganz},$$

oder

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{x^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} = \sin x, \quad \text{für} \quad \nu = +\infty \text{ und ganz},$$

oder

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{x^{2\mathfrak{a}}}{(2\mathfrak{a})!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} = \cos x, \quad \text{für} \quad \nu = +\infty \text{ und ganz},$$

u. s. w., weil bei der *ein für allemal gemachten Annahme,* dafs die *deutschen kleinen* Buchstaben nach und nach Null und *alle* ganzen *positiven* Zahlen 1, 2, 3, 4, etc. vorstellen (und *nie* negative), die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu$ nichts anderes sagt, als dafs $\mathfrak{a}$ nach und nach alle Werthe 0, 1, 2, 3, ... ν erhalten soll, aber keinen gröfseren Werth als ν erhalten kann, weil sonst $\mathfrak{b}$ *negativ* sein würde, was gegen die Annahme. — Diese Gleichungen sagen also nun, dafs man sich dem Werthe der Ausdrücke zur Rechten *sehr* nähere, wenn man ν *sehr* grofs nimmt, und denselben Werthen *unendlich nahe* kommt, wenn ν *unendlich grofs* genommen wird.

Bei diesen 3 Reihen ist jedoch die untergesetzte Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu$ deshalb nicht nothwendig, weil, wenn sie weggelassen wird, dem *kleinen deutschen* $\mathfrak{a}$ doch nach und nach Null und *alle* positiven ganzen Werthe bis in's Unendliche fort, gegeben werden müssen. Mit Weglassung von $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu$ mufs natürlich dann auch der Zusatz: „für $\nu=+\infty$" weggelassen werden.

Dasselbe gilt von der Gleichung

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} = \log 2, \quad \text{für} \quad \nu = +\infty \text{ und ganz}.$$

Wenn aber dieselbe Gleichung etwa so geschrieben würde, wie folgt, nämlich

$$S\left[\frac{1}{2\mathfrak{a}+1}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} - S\left[\frac{1}{2\mathfrak{a}+2}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\left\{\begin{matrix}\nu\\ \text{oder } \nu-1\end{matrix}\right\}} = \log 2, \quad \text{für} \quad \nu = \left\{\begin{matrix}+\infty\\ \text{und ganz}\end{matrix}\right\},$$

nicht fest bestimmt, weil der Ausdruck desselben *unendlich* viele Factoren enthält und daher nur dann zugelassen werden darf, wenn noch ein zweiter analoger Ausdruck gegeben und dann von dem Begriff $a^{m|r}$ selbst festgestellt wird, dafs er sich *stets zwischen diesen Grenzen aufhalte, während* diese Grenzen selbst, je gröfser ν genommen wird, desto näher an ein-

---

so dürfen die untergeschriebenen Gleichungen ($\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu$ oder $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu-1$) nicht weggelassen werden, weil diese Gleichungen anzeigen, dafs wenn man von jeder der beiden Reihen zur Linken (welche *divergent* sein würden, wenn man sie als *unendliche* Reihen sich dächte) gleich viele, nämlich $\nu+1$ Glieder nimmt, oder von der erstern Reihe $\nu+1$ Glieder, von der letztern aber nur ν Glieder, — dann diese Differenz zur Linken dem Werthe $\log 2$ *sehr* nahe kommt, wenn man ν *sehr* grofs nimmt, und *unendlich nahe* kommt, wenn man ν *unendlich grofs* nimmt.

Namentlich ist aber für jeden *endlichen* Werth von ν,

$$S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+1}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} - S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+2}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} < \log 2,$$

dagegen

$$S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+1}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu} - S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+2}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu-1} > \log 2.$$

Am unentbehrlichsten endlich erscheint diese oder eine analoge Schreibweise bei folgender Gleichung:

$$S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+1}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu-1} - S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+2}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=2\nu-1} = \tfrac{1}{2}\log 2, \quad \text{für} \quad \nu = \left\{\begin{matrix} +\infty \\ \text{und ganz}\end{matrix}\right\},$$

wo die *untergesetzten* Gleichungen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\nu-1$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=2\nu-1$ verlangen, dafs während der Minuend ν Glieder hat, der Subtrahend 2ν Glieder bekommen soll, und dafs *unter dieser Voraussetzung* der Ausdruck zur Linken dem Werthe $\frac{1}{2}\log 2$ desto näher kommt, je gröfser die positive ganze Zahl ν genommen wird. — Unvollkommener würde dieselbe Gleichung so geschrieben:

$$1-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{3}-\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\Big)+\frac{1}{5}-\Big(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\Big)+\frac{1}{7}-\cdots=\tfrac{1}{2}\log 2.$$

Folgende Gleichung endlich

$$S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+1}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m\nu-1} - S\Big[\frac{1}{2\mathfrak{a}+2}\Big]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n\nu-1} = \log 2+\tfrac{1}{2}\log\frac{m}{n}, \quad \text{für} \quad \nu = \left\{\begin{matrix} +\infty \\ \text{und ganz}\end{matrix}\right\},$$

in welcher m und n beliebige positive ganze Zahlen sein sollen, wüfste der Verfasser kaum zweckmäfsiger auszudrücken, da diese Schreibweise deutlich sehen läfst, dafs, während von der erstern Reihe $m\nu$ Glieder genommen sind, von der andern Reihe dann $n\nu$ Glieder genommen werden müssen, wenn die Differenz zur Linken, je gröfser die positive ganze Zahl ν genommen wird, desto mehr dem Werthe $\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{m}{n}$ zur Rechten sich nähern und ihm für $\nu=\infty$, unendlich nahe kommen soll.

Mit dieser Schreibweise verknüpft sich aber dann noch ein eben so einfacher als bequemer Calcul, der in dem II^ten^ Theile des „Versuchs eines etc. Systems der Mathematik" 2te Auflage, Berlin 1827, unter der Überschrift „Von den combinatorischen Agregaten" näher beschrieben steht, und welcher namentlich den grofsen Vortheil gewährt, die an sich verwickelsten Rechnungen mit endlichen oder unendlichen Reihen zuweilen durch weniges Rechnen mit den untergesetzten Gleichungen durch- und zu Ende zu führen.

ander rücken, und für $\nu = \infty$ von einander nur um unendlich wenig verschieden sind.

Selbst *Gaufs,* welcher den Begriff zur Rechten in (⊙.) in dem besonderen Falle, wo $a = r = 1$ ist, einer nähern Betrachtung unterzogen und durch Π_m bezeichnet hat, hielt es für nothwendig, vor Allem zu beweisen, dafs dieser Ausdruck Π_m, trotz seiner unendlich vielen Factoren im Zähler und im Nenner, wirklich einen bestimmten endlichen Werth habe.

Dieserhalb theilen wir nun auch noch das nachfolgende ***dritte*** Verfahren hier mit.

§. 3.

Wir setzen dabei von den Factoriellen noch gar nichts als bekannt voraus. — Wir stellen hin die Definition der positiven ganzen Factorielle in der Gleichung

$$1. \qquad a^{m|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots[a+(m-1)r];$$

wir folgern daraus

$$2. \qquad a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}}$$

und stellen diese Gleichung als Definition der ***Differenz-Factorielle*** $a^{m-n|r}$ hin, für den allgemeinen Fall, dafs (während m und n positiv ganz gedacht werden, doch) $m-n$ jede *positive* wie auch jede ***negative*** ganze Zahl vorstellt, oder die Null.

Für diese besonderen Factoriellen stellen wir zuletzt die Wahrheiten auf, wie sie hier folgen, nämlich:

$$3. \qquad a^{m|r}.(a+mr)^{n|r} = a^{m+n|r} = a^{n|r}.(a+nr)^{m|r};$$

$$4. \qquad a^{m|r} = [a+(m-1)r]^{m|-r};$$

$$5. \qquad a^{m|r} = h^m.\left(\frac{a}{h}\right)^{m\left|\frac{r}{h}\right.},$$

wo m positiv oder negativ ganz, Null oder $= 1$ ist, eben so wie n.

Um aber nun zu den positiv oder negativ ***gebrochnen*** Factoriellen zu gelangen, stellen wir die nachstehenden Betrachtungen an.

§. 4.

1) Ist a beliebig positiv, jedoch von 1 verschieden; ist x dagegen beliebig reell, so ist allemal:

$$\text{I.} \qquad a^x \gtreqless 1+x(a-1), \text{ je nachdem } x \begin{cases} = 0 \text{ oder } = 1 \text{ ist,} \\ \text{zwischen } 0 \text{ und } 1 \text{ liegt,} \\ < 0 \text{ oder } > 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

welche drei Behauptungen leicht zu beweisen sind.

2) Setzt man nun in I. $\frac{a+1}{a}$ statt a, so erhält man:

II. $\left(\frac{a+1}{a}\right)^x \gtreqless \frac{a+x}{a}$, je nachdem x $\begin{cases} = 0 \text{ oder } = 1 \text{ ist,} \\ \text{zwischen } 0 \text{ und } 1 \text{ liegt,} \\ < 0 \text{ oder } > 1 \text{ ist,} \end{cases}$

so lange nur $\frac{a+1}{a}$ positiv ist, also so lange $a < -1$ und $a > 0$, d. h. so lange a negativ und absolut > 1, oder beliebig positiv ist.

3) In dieser Vergleichung II. wollen wir für die Folge stets $a+x$ mit a zugleich positiv voraussetzen; und da dann auch $a+x+\nu$ und $a+\nu$ für jede positive ganze Zahl ν ebenfalls positiv sind, so gelten dieselben Vergleichungen II. auch noch, wenn nach und nach $a+1$, $a+2$, $a+3$, ... $a+n-1$ statt a gesetzt wird. Geschieht nun dies, und multiplicirt man dann die Ausdrücke links und rechts in allen diesen Vergleichungen mit einander, so findet man, da keiner dieser Ausdrücke negativ oder Null ist:

III. $\left(\frac{a+n}{a}\right)^x \gtreqless \frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}}$, je nachdem x $\begin{cases} = 0 \text{ oder } = 1 \text{ ist,} \\ \textit{zwischen } 0 \text{ und } 1 \text{ liegt,} \\ < 0 \text{ oder } > 1 \text{ ist;} \end{cases}$

wo a und $a+x$ beliebig positiv, und n positiv ganz gedacht sind.

4) Da x und $1-x$ beide gleichzeitig *zwischen* 0 und 1, und gleichzeitig auch *aufserhalb* der Werthe von 0 bis 1 liegen, auch gleichzeitig die beiden Werthe 0 und 1 selbst haben (nur in umgekehrter Ordnung), so kann man in der Vergleichung III. auch $1-x$ statt x setzen; setzt man dann noch gleichzeitig $a-(1-x)$, d. h. $a+x-1$ statt a, so giebt dies

IV. $\left(\frac{a+n+x-1}{a+x-1}\right)^{1-x} \gtreqless \frac{a^{n|1}}{(a+x-1)^{n|1}}$, je nachdem x etc. etc. *),

wenn nur a und $a+x-1$ positiv sind.

5) Dividirt man die IV. durch $\frac{a+n+x-1}{a+x-1}$, so erhält man:

$$\left(\frac{a+n+x-1}{a+x-1}\right)^{-x} \gtreqless \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}}, \text{ je nachdem etc. etc.;}$$

also ist auch, wenn man die 1 durch diese beiden Ausdrücke dividirt,

V. $\left(\frac{a+n+x-1}{a+x-1}\right)^{x} \gtreqless \frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}}$, je nachdem x etc. etc.,

wenn nur a und $a+x-1$ beliebig positiv sind und n positiv ganz ist. (Hier

*) Wir werden in der Folge diese Bedingungen nicht mehr ausschreiben, sondern sie stets *in derselben Folge ihrer Linien als dieselbe bleibend* stillschweigend voraussetzen.

haben die Zeichen $<$, $>$ ihre Stellung gewechselt, während die Bedingungen, denen x unterworfen ist, stets und unverändert ihre Folge-Ordnung beibehalten.)

6) Sind m und n positiv ganz oder Null, ist aber $m > n$; sind ferner a und $a+x$ beliebig positiv, so kann man in No. 3. III. statt der dortigen a und n substituiren bezüglich $a+n$ und $m-n$; und man erhält dann

VI. $$\left(\frac{a+m}{a+n}\right)^x \lessgtr \frac{(a+n+x)^{m-n|1}}{(a+n)^{m-n|1}}, \text{ je nachdem } x \text{ etc. etc.}$$

Multiplicirt man daher hier links und rechts mit dem (stets positiven) Ausdruck $\frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}}$, so giebt dies

VII. $$\frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}} \cdot \frac{(a+m)^x}{(a+n)^x} \lessgtr \frac{(a+x)^{m|1}}{a^{m|1}}, \text{ je nachdem etc. etc.;}$$

also ist auch, wenn man auf beiden Seiten mit dem (stets positiven) Ausdruck $\frac{a^{m|1} \cdot a^{n|1} \cdot (a+n)^x}{(a+x)^{m|1} \cdot (a+x)^{n|1}}$ multiplicirt,

VIII. $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot (a+m)^x \lessgtr \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}} \cdot (a+n)^x, \text{ je etc. etc.,}$$

wenn nur a und $a+x$ beliebig positiv, und m und n positiv ganz sind, oder $n = 0$, dabei aber $m > n$.

7) Sind wiederum m und n positiv ganz oder Null und ist wiederum $m > n$; sind ferner a, $a+x$ und $a+n+x-1$ positiv, so sind nothwendig auch $a+n$ und $a+m+x-1$ positiv. Man kann also in No. 5. V. statt der dortigen a und n bezüglich setzen $a+n$ und $m-n$; und man erhält nun:

IX. $$\left(\frac{a+m+x-1}{a+n+x-1}\right)^x \lessgtr \frac{(a+n+x)^{m-n|1}}{(a+n)^{m-n|1}}, \text{ je nachdem etc. etc.}$$

Multiplicirt man dieses mit dem (stets positiven) Ausdruck $\frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}}$, so giebt dies

X. $$\frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}} \cdot \frac{(a+m+x-1)^x}{(a+n+x-1)^x} \lessgtr \frac{(a+x)^{m|1}}{a^{m|1}}, \text{ je nachdem etc. etc.;}$$

folglich ist auch noch, wenn dies mit $\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}} \cdot (a+n+x-1)^x$ multiplicirt wird,

XI. $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot (a+m+x-1)^x \lessgtr \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}} \cdot (a+n+x-1)^x, \text{ je etc. etc.,}$$

wenn nur a und $a+x$ und $a+n+x-1$ beliebig positiv sind, und m und n positiv ganz sind oder Null, und $m > n$. — Dabei haben in den Formeln V.,

IX., X. und XI. die $<$, $>$ Zeichen in Vergleich mit den übrigen Formeln, die Stellung unter sich vertauscht.

8) Vertauscht man hier noch m und n mit einander, so dafs man nun $n > m$, also $m < n$ hat, so giebt dies, wenn man den Ausdruck rechts zur Linken schreibt und umgekehrt:

XII. $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot (a+m+x-1)^x \lessgtr \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}} \cdot (a+n+x-1)^x, \text{ je etc. etc.,}$$

wenn nur a und $a+x$ und $a+m+x-1$ beliebig positiv sind, und m wie n positiv ganz und $m < n$ ist. — In dieser Formel XII. ist nun wieder die Folge-Ordnung der Zeichen $<$, $>$ genau so wie in den Formeln II — IV. und VI — VIII.

9) Ist a und $a+x$ beliebig positiv und m positiv ganz, so ist allemal

XIII. $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot (a+m+x-1)^x \lessgtr \frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot (a+m)^x, \text{ je etc. etc.}$$

Denn so wie x ***zwischen*** 0 und 1 liegt, so ist $a+m+x-1 < a+m$, also auch $(a+m+x-1)^x < (a+m)^x$; folglich u. s. w.

Ist aber $x < 0$, d. h. negativ, dann ist $a+m+x-1 < a+m$, aber eben deshalb $(a+m+x-1)^x > (a+m)^x$; folglich etc. etc.

Ist endlich $x > 1$, so ist $(a+m+x-1) > a+m$, und auch $(a+m+x-1)^x > (a+m)^x$; also etc. etc.

10) Aus allem diesem folgt nun:

Sind a und $a+x$ beliebig positiv und m und n positiv ganz, übrigens beliebig und unabhängig von einander, so ist allemal

XIV. $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot (a+m+x-1)^x \lessgtr \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}} \cdot (a+n)^x; \text{ je etc. etc.}$$

Denn ist $m = n$, so ist die XIV. keine andere als die XIII. — Ist $m > n$, so folgt die XIV. unmittelbar aus der Vergleichung der XIII. mit der VIII. — Und ist $m < n$, so erhält man die XIV. unmittelbar aus der Vergleichung der XII. mit der XIII., wenn man zuvor in letzterer noch n statt m schreibt.

Diese beiden Ausdrücke zur Linken und zur Rechten der Vergleichung XIV rücken einander desto näher, je gröfser m und n gedacht werden. Sind m und n einander gleich, so ist der Quotient derselben beiden Ausdrücke $= \left(\frac{a+m+x-1}{a+m}\right)^x = \left(1+\frac{x-1}{a+m}\right)^x$ und dieser rückt der Einheit unendlich nahe

[weil (nach I.)

$$1 \lessgtr \left(\frac{a+m}{a+m+x-1}\right)^x \lessgtr 1-\frac{x(x-1)}{a+m+x-1}$$

ist], wenn m unendlich grofs gedacht wird.

11) Es giebt also allemal nur eine ***einzige*** (von a und x abhängige) Zahl $f_{a,x}$, welche *stets* zwischen den gedachten beiden obigen Ausdrücken (in XIV.) liegt (wenn sie ihnen nicht, nämlich für $x=0$ und für $x=1$, gleich ist), wie grofs man auch die Zahlen m und n nur immer annehmen möge. — Die Definition dieser Zahl $f_{a,x}$ ist also ausgesprochen in der Vergleichung

XV. $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}}\cdot(a+m+x-1)^x \lessgtr f_{a,x} \lessgtr \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}}\cdot(a+n)^x,$$ je etc. etc.,

sobald man zur Bedingung macht, dafs solche für ***alle*** beliebigen und noch so grofsen positiven ganzen Werthe von m und n gelten soll.

§. 5.

Nun kommt alles darauf an, aus dieser Definition der gedachten Zahl $f_{a,x}$ ihre Eigenschaften abzuleiten, und namentlich zunächst ***die***, dafs sie, so oft x positiv ganz gedacht wird, mit dem Producte von x äquidifferenten Factoren $a(a+1)(a+2)\ldots(a+x-1)$, welches wir oben (im §. 3.) mit $a^{x|1}$ bezeichnet haben, und für x negativ ganz mit dem ebendaselbst festgestellten Begriff von $a^{x|1}$ zusammenfällt. Dann folgt nämlich von selber, dafs sie (diese Zahl $f_{a,x}$) *als der allgemeinere Begriff* angesehen und abermals durch $a^{x|1}$ bezeichnet werden kann, während x beliebig reell (namentlich *gebrochen*), doch so ist, dafs a und $a+x$ noch positiv sind, weil wir in dem §. 4. überall diese Bedingung gemacht haben und machen mufsten, damit die obigen Schlüsse vollkommen gerechtfertigt werden konnten.

Entwickeln wir also nun die Eigenschaften der Zahl (Function) $f_{a,x}$ aus ihrer Definition XV. des §. 4. N. 11.

1) Zuvörderst erhellet, dafs wenn irgend eine Zahl z zwischen den in §. 4. N. 11. XV. bezeichneten beiden Grenzen liegt, wie grofs auch m und n gedacht werden mögen, dann allemal

$$z = f_{a,x}$$

sein müsse, weil die Grenzen einander zuletzt unendlich nahe rücken.

2) Aus der Vergleichung XV. folgt umgekehrt, wenn man die Einheit durch die drei Ausdrücke dividirt, und das Resultat zur Rechten jetzt links schreibt:

$$\frac{(a+x)^{n|1}}{a^{n|1}}\cdot(a+n)^{-x} \lessgtr \frac{1}{f_{a,x}} \lessgtr \frac{(a+x)^{m|1}}{a^{m|1}}\cdot(a+m+x-1)^{-x},\ ^*)$$

oder, wenn man mit a multiplicirt, und einen Factor noch mit in die Factoriellen hineinzieht oder heraus läfst,

$$\frac{(a+x)^{n|1}}{(a+1)^{n|1}}\cdot(a+n)^{1-x} \lessgtr \frac{a}{f_{a,x}} \lessgtr \frac{(a+x)^{m-1|1}}{(a+1)^{m-1|1}}\cdot(a+m+x-1)^{1-x}.$$

Aus dieser Vergleichung, in Verbindung mit §. 4. N. 11. XV. (wenn man daselbst $a+x$ statt a, und $1-x$ statt x setzt) und der hiesigen N. 1. folgt nun sogleich:

XVI. $$\frac{a}{f_{a,x}} = f_{a+x,1-x} \quad \text{oder} \quad f_{a,x}\cdot f_{a+x,1-x} = a,$$

wenn nur a und $a+x$ beliebig positiv sind.

3) Setzt man in XVI. $a+x$ statt a und $1-x$ statt x, so folgt noch, weil $(a+x)+(1-x)$, d. h. $a+1$ noch positiv ist, so wie a und $a+x$ positiv vorausgesetzt werden,

$$f_{a+x,x}\cdot f_{a+1,x} = a+x;$$

folglich, wenn man diese Gleichung durch die XVI. dividirt,

XVII. $$\frac{f_{a+1,x}}{f_{a,x}} = \frac{a+x}{a} \quad \text{oder} \quad a.f_{a+1,x} = f_{a,x}\cdot(a+x),$$

wenn nur a und $a+x$ positiv sind.

4) So oft x eine positive oder negative ganze Zahl, aber *nicht* $x=1$ ist, eben so oft hat man:

XVIII. $a^{x|1} > a^x$, wenn a und $a+x$ positiv,

XIX. $a^{x|1} < (a+x-1)^x$, wenn a und $a+x-1$ positiv;

wie leicht bewiesen werden kann.

Aus §. 3. N. 3. geht aber unter denselben Voraussetzungen hervor, wenn nur auch m und n beliebig positiv ganz gedacht werden:

$$a^{x|1} = \frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}}\cdot(a+m)^{x|1} = \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}}\cdot(a+n)^{x|1},$$

also nach XVIII. und XIX. auch

$$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}}\cdot(a+x+m-1)^x > a^{x|1} > \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}}\cdot(a+n)^x,$$

---

*) Wir schreiben die Bedingung:

$$\text{je nachdem } x \begin{cases} = 0 \text{ oder } = 1 \text{ ist,} \\ \text{zwischen 0 und 1 liegt,} \\ \text{aufserhalb d. R. von 0 bis 1 fällt,} \end{cases}$$

deshalb bei den einzelnen Vergleichungen *gar nicht mehr* hinzu, weil wir sie genau in derselben Folge-Ordnung stets stillschweigend hinzugefügt uns denken.

wobei $x<0$ und >1 (und ganz) gedacht worden ist. Da nun, so lange x ***ganz*** ist, der Fall, wo x ***zwischen*** 0 und 1 liegt, nicht vorkommen kann, und für $x=0$, wie für $x=1$, die 3 vorstehenden Ausdrücke offenbar einander gleich sind, so giebt diese letzte Vergleichung, wenn man sie mit §. 4. N. 11. XV. zusammenhält, nach N. 1. des laufenden Paragraphen, sogleich

XX. $$f_{a,x} = a^{x|1},$$

so oft x positiv oder negativ ganz oder Null ist. Also ist $f_{a,x}$ der allgemeinere Begriff der Factorielle $a^{x|1}$, wo a und x beliebig ganz oder gebrochen sein kann, wenn nur die Bedingungen, dafs a und $a+x$ ***positiv*** sein müssen, erfüllt sind. — Man kann also die Bedeutung von $a^{x|1}$, für einen reellen ganzen oder gebrochenen Werth von x, für welchen noch $a+x$ mit a zugleich positiv ist, dahin erweitern, dafs man von nun an die in der N. 11. des §. 4. definirte Zahl $f_{a,x}$ darunter versteht; was hiermit geschieht.

§. 6.

Nun kommt es darauf an zu untersuchen, ob für diesen allgemeineren Begriff noch dieselben Gesetze gelten, welche für die Factoriellen mit (positiven oder negativen) ***ganzen*** Exponenten im §. 3. NN. 3 — 5. bereits festgestellt worden sind.

1) Es ist aber nach XV. N. 11. des §. 4., wenn wir diesmal blofs $x>1$ voraussetzen (und a positiv),

$\alpha.$ $$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}}\cdot(a+m+x-1)^x > f_{a,x} > \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}}\cdot(a+n)^x,$$

also, wenn man mit $a+x$ multiplicirt,

$\beta.$ $$\frac{a^{m|1}}{(a+x+1)^{m-1|1}}\cdot(a+m+x-1)^x > (a+x).f_{a,x} > \frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n-1|1}}\cdot(a+n)^x.$$

Aus $(a+x+m-1)^x<(a+x+m)^x$, d. h. $<\frac{(a+x+m)^{x+1}}{a+x+m}$, folgt aber

$\gamma.$ $$\frac{a^{m|1}}{(a+x+1)^{m-1|1}}\cdot(a+x+m-1)^x < \frac{a^{m|1}}{(a+x+1)^{m|1}}\cdot(a+x+m)^{x+1}.$$

Ferner ist

$$\frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n-1|1}}\cdot\frac{a+n}{a+x+n} = \frac{a^{n+1|1}}{(a+x+1)^{n|1}},$$

also, weil $a+n<a+x+n$ ist, auch

$\delta.$ $$\frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n-1|1}}\cdot(a+n)^x > \frac{a^{n+1|1}}{(a+x+1)^{n|1}}\cdot(a+n)^x$$

und letzterer Ausdruck $= \frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n|1}} \cdot (a+n)^{x+1}$. Aus der Vergleichung $\gamma.$, $\alpha.$ und $\delta.$ mit einander folgt also um so mehr

$$\frac{a^{m|1}}{(a+x+1)^{m|1}} \cdot (a+x+m)^{x+1} > (a+x).f_{a,x} > \frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n|1}} \cdot (a+n)^{x+1},$$

wie grofs auch m und n gedacht werden mögen.

Weil aber zwischen denselben Grenzen (nach XV. §. 4. N. 11.) auch $f_{a,x+1}$ liegt, so folgt (aus §. 5. N. 1.)

XXI. $\quad f_{a,x+1} = f_{a,x} \cdot (a+x)$, d. h. $a^{x+1|1} = a^{x|1} \cdot (a+x)$,

während jedoch $x > 1$ vorausgesetzt worden ist, übrigens ganz oder gebrochen.

Liegt aber x zwischen 0 und 1 und ist a (also auch $a+x$) positiv, so ist (nach XV., wenn daselbst $m+1$ statt m gesetzt wird)

$$\frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}} \cdot (a+n)^x > f_{a,x} > \frac{a^{m+1|1}}{(a+x)^{m+1|1}} \cdot (a+x+m)^x;$$

also ist auch, wenn man mit $a+x$ multiplicirt,

$\varepsilon.$ $\quad \frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n-1|1}} \cdot (a+n)^x > f_{a,x} \cdot (a+x) > \frac{a^{m+1|1}}{(a+x+1)^{m|1}} \cdot (a+x+m)^x.$

Nun ist aber, wegen $(a+n+x)^x > (a+n)^x$, auch

$\zeta.$ $\quad \frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n|1}} \cdot (a+x+n)^{x+1} > \frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n-1|1}} \cdot (a+n)^x;$

so wie noch, wegen $(a+x+m)^x > (a+m)^x$,

$\eta.$ $\quad \frac{a^{m+1|1}}{(a+x+1)^{m|1}} \cdot (a+x+m)^x > \frac{a^{m|1}}{(a+x+1)^{m|1}} \cdot (a+m)^{x+1}.$

Also folgt aus $\zeta.$, $\varepsilon.$ und $\eta.$, dafs um so mehr sein werde:

$$\frac{a^{n|1}}{(a+x+1)^{n|1}} \cdot (a+x+n)^{x+1} > f_{a,x} \cdot (a+x) > \frac{a^{m|1}}{(a+x+1)^{m|1}} \cdot (a+m)^{x+1},$$

in welcher Vergleichung noch, wenn man will, m und n mit einander vertauscht werden können.

Da aber, der Voraussetzung zufolge, jetzt $x+1 > 1$ ist, so liegt nach XV. zwischen denselben Grenzen auch $f_{a,x+1}$, so dafs die obige XXI. nun (nach §. 5. N. 1.) auch erwiesen ist, wenn x zwischen 0 und 1 liegt.

Eben so findet sich die Gleichung XXI. noch bestätigt für $x = 0$ und für $x = 1$; folglich gilt sie für x beliebig positiv oder Null.

Ist nun a und x positiv (also auch $a+x$), so hat man, wie so eben bewiesen

$$f_{a,x} \cdot (a+x) = f_{a,x+1};$$

aber nach §. 5. N. 2. XVI. ist auch, wenn a und $a+x$ positiv sind,

$$a = f_{a,x} \cdot f_{a+x,1-x},$$

und noch, wenn man hier bezüglich $a+x$ statt a, und $-x$ statt x setzt (weil dann $a+x-x$, d. h. a (also wiederum *positives*) statt $a+x$ zu stehen kommt)

$$f_{a+x,-x} \cdot f_{a,x+1} = a+x.$$

Multiplicirt man daher diese letztern drei Gleichungen mit einander, so ergiebt sich:

$$a \cdot f_{a+x,-x} = f_{a+x,1-x},$$

wenn nur a und x positiv sind. Setzt man nun hier $a+x$ statt a, und $-x$ statt x, und setzt man das neue x negativ voraus, aber das neue $a+x$ positiv, weil das alte a, wofür jetzt $a+x$ gesetzt worden, positiv sein mufste, so ergiebt sich die Formel XXI. noch einmal unter der Voraussetzung, dafs a und $a+x$ positiv sind, auch wenn x negativ ist.

Also gilt die Formel

XXI. $$f_{a,x+1} = f_{a,x} \cdot (a+x), \quad \text{d. h.} \quad a^{x+1|1} = a^{x|1} \cdot (a+x),$$

für jeden reellen Werth von x, so lange nur $a+x$ mit a zugleich positiv ist.

2) Aus §. 5. N. 3. XVII. folgt ferner, wenn a und $a+x+1$ positiv sind (indem man daselbst $x+1$ statt x setzt),

$$(a+x+1) \cdot f_{a,x+1} = a \cdot f_{a+1,x+1};$$

nach XXI. ist dagegen (wenn $a+1$ statt a gesetzt wird) und so lange $a+1$ mit $a+x+1$ zugleich positiv ist,

$$f_{a+1,x+1} = f_{a+1,x} \cdot (a+x+1);$$

folglich ist noch, wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt, und zugleich $x-1$ statt x setzt,

XXII. $$f_{a,x} = a \cdot f_{a+1,x-1}, \quad \text{d. h.} \quad a^{x|1} = a \cdot (a+1)^{x-1|1},$$

wenn nur a und $a+x$ positiv sind, während x gebrochen und, so weit es die vorhergehende Bedingung gestattet, auch negativ sein kann.

3) Setzt man aber in der Formel XXI. nach und nach $x+1$, $x+2$, ... $x+m-1$ statt x, und multiplicirt man alle erhaltenen Gleichungen mit einander und mit der XXI., so erhält man

XXIII. $$f_{a,x+m} = f_{a,x} \cdot (a+x)^{m|1}, \quad \text{d. h.} \quad a^{x+m|1} = a^{x|1} \cdot (a+x)^{m|1},$$

wo aber nur x beliebig *reell*, dagegen m *positiv ganz* vorausgesetzt worden ist, und $a+x$ mit a zugleich positiv.

Behandelt man die XXII. ganz auf analoge Weise, indem man $a+1$, $a+2$, ... $a+m-1$ statt a setzt und gleichzeitig $x-1$, $x-2$, ... $x-m+1$ statt x, etc. etc., — so folgt noch, ***ganz unter denselben Voraussetzungen:***

XXIV. $$f_{a,x} = a^{m|1}.f_{a+m,\,x-m}, \quad \text{d. h.} \quad a^{x|1} = a^{m|1}.(a+m)^{x-m|1}.$$

Setzt man ferner in XXIII. $x+m$ statt x, so folgt auch noch aus der Vergleichung mit der XXI., ***unter denselben Voraussetzungen,***

XXV. $$f_{a,x}.(a+x)^{m|1} = a^{m|1}.f_{a+m,\,x}, \quad \text{d. h.} \quad a^{x|1}.(a+x)^{m|1} = a^{m|1}.(a+m)^{x|1}.$$

§. 7.

Dafs aber dieselben Formeln XXIII., XXIV. auch für gebrochene, positive oder negative Werthe von m noch gelten, *so lange* nur in jeder Factorielle die ***Basis,*** und die ***Summe*** aus der Basis und dem Exponenten, *positiv* vorausgesetzt werden, wird auf dem hier betretenen Wege nun, wie folgt bewiesen.

Sind a und $x-1$ und $y-1$ beliebig positiv (ganz oder gebrochen), so ist nach der Definition N. 11. §. 4., wie grofs auch die positiven ganzen Zahlen m und n gedacht werden mögen,

$$\frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}}\cdot(a+x+m-1)^x > f_{a,x} > \frac{a^{n|1}}{(a+x)^{n|1}}\cdot(a+n)^x$$

und unabhängig davon noch

$$\frac{(a+x)^{m|1}}{(a+x+y)^{m|1}}\cdot(a+x+y+m-1)^x > f_{a+x,y} > \frac{(a+x)^{n|1}}{(a+x+y)^{n|1}}\cdot(a+x+n)^y.$$

Multiplicirt man daher beide Vergleichungen mit einander, so folgt, da alles *positiv* ist,

$\alpha.$
$$\frac{a^{m|1}}{(a+x+y)^{m|1}}\cdot(a+x+m-1)^x.(a+x+y+m-1)^y > f_{a,x}\cdot f_{a+x,y} > \frac{a^{n|1}}{(a+x+y)^{n|1}}\cdot(a+n)^x.(a+x+n)^y.$$

Nun ist aber offenbar

$$(a+x+m-1)^x < (a+x+y+m-1)^x$$

und

$$(a+x+n)^y > (a+n)^y;$$

also ist auch der erstere Ausdruck in ($\alpha.$) ***kleiner*** als

$\beta.$
$$\frac{a^{m|1}}{(a+x+y)^{m|1}}\cdot(a+x+y+m-1)^{x+y}$$

und der dritte Ausdruck der Vergleichung ($\alpha.$) ***gröfser*** als

$\gamma.$
$$\frac{a^{n|1}}{(a+x+y)^{n|1}}\cdot(a+n)^{x+y}.$$

Also ist, wenn man den Ausdruck ($\beta.$) an die Stelle des erstern Ausdrucks in ($\alpha.$), und den Ausdruck ($\gamma.$) an die Stelle des dritten in ($\alpha.$) schreibt, um so mehr

$\delta.$ $\dfrac{a^{m|1}}{(a+x+y)^{m|1}}\cdot(a+x+y+m-1)^{x+y} > f_{a,x}\cdot f_{a+x,y} > \dfrac{a^{n|1}}{(a+x+y)^{n|1}}\cdot(a+n)^{x+y}$,

d. h. es ist (nach §. 4. N. 11. und §. 5. N. 1. und weil noch $x+y>1$ ist)

XXVI. $f_{a,x}\cdot f_{a+x,y} = f_{a,x+y}$, d. h. $a^{x|1}.(a+x)^{y|1} = a^{x+y|1}$,

wenn nur a und $x-1$ und $y-1$ beliebig positiv ganz oder gebrochen sind, d. h. a positiv und $x>1$ und $y>1$.

Aber, auch wenn $y \lessgtr 1$ ist, kann man doch immer eine positive ganze Zahl n so nehmen, dafs $y+n>1$ ist, also dafs man nach XXVI.

$\zeta.$ $$f_{a,x}\cdot f_{a+x,y+n} = f_{a,x+y+n}$$

hat, so lange nur noch $x>1$ ist. Dividirt man nun diese Gleichung durch $(a+x+y)^{n|1}$, so erhält man (nach XXIII.)

XXVII. $f_{a,x}\cdot f_{a+x,y} = f_{a,x+y}$, d. h. $a^{x|1}.(a+x)^{y|1} = a^{x+y|1}$,

wenn nur a und $a+x$ und $a+x+y$ beliebig positiv sind und $x>1$ ist, während bereits $y \lessgtr 1$, also selbst negativ sein kann.

Nun ist endlich das Product

$$f_{a,x}\cdot(a+x)^{m|1}\cdot f_{a+x+m,y-m},$$

so lange a, $a+x$ und $a+x+y$ beliebig positiv sind und m positiv ganz ist, (nach §. 6. XXII — XXIV.) einmal

$$= f_{a,x+m}\cdot f_{a+x+m,y-m}$$

und ein andermal

$$= f_{a,x}\cdot f_{a+x,y};$$

folglich sind auch beide letztere Ausdrücke einander gleich; d. h. es ist

($\mathbb{C}.$) $$f_{a,x}\cdot f_{a+x,y} = f_{a,x+m}\cdot f_{a+x+m,y-m},$$

wenn nur a, $a+x$ und $a+x+y$ beliebig positiv sind und m positiv ganz ist. Ist nun $x \lessgtr 1$ und auch $y \lessgtr 1$, aber m so grofs gedacht, dafs $x+m>1$ wird, so ist in vorstehender Gleichung ($\mathbb{C}.$) das Product zur Rechten (nach XXVII.) wieder $= f_{a,x+y}$; also hat man auch

XXVII. $f_{a,x}\cdot f_{a+x,y} = f_{a,x+y}$, d. h. $a^{x|1}.(a+x)^{y|1} = a^{x+y|1}$,

es mag $x \lessgtr 1$ und eben so $y \lessgtr 1$ sein, so lange nur a und $a+x$ und $a+x+y$ beliebig positiv sind.

Die Haupteigenschaft der Factoriellen gilt also, so lange nur noch die Factoriellen, ihrem zu Ende des §. 5. aufgestellten Begriffe nach, existiren.

§. 8.

Ist x eine positive *gerade* Zahl, also $\frac{1}{2}x$ eine positive *ganze* Zahl, so ist allemal

$$(\odot.) \qquad a^{x|1} = a^{\frac{1}{2}x|2}.(a+1)^{\frac{1}{2}x|2} = 2^x.(\tfrac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}x|1}.(\tfrac{1}{2}a+1)^{\frac{1}{2}x|1},$$

wie in die Augen fällt, indem man von dem Producte links die alternirenden Factoren nimmt und zuletzt noch das Gesetz §. 3. N. 5. anwendet. Soll nun die Gültigkeit derselben Gleichung auch bewiesen werden für den Fall, dafs x beliebig reell ist, wenn nur a und $a+x$ positiv sind, so kann man wie folgt verfahren:

Es sei zunächst a und $\frac{1}{2}x-1$ positiv, so ist nach XV.

$$\frac{(\frac{1}{2}a)^{m|1}}{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x)^{m|1}}\cdot(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}x+m-1)^{\frac{1}{2}x} > f_{\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}x} > \frac{(\frac{1}{2}a)^{n|1}}{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x)^{n|1}}\cdot(\tfrac{1}{2}a+n)^{\frac{1}{2}x}$$

und

$$\frac{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})^{m|1}}{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)^{m|1}}\cdot(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}x+m-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}x} > f_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}x} > \frac{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})^{n|1}}{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)^{n|1}}\cdot(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}+n)^{x}.$$

Multiplicirt man nun diese Formeln mit einander und mit 2^x, so erhält man mit Zuziehung der Formeln des §. 3. und der obigen Formel $(\odot.)$, in so fern m und n positiv *ganz* gedacht werden,

$$\alpha. \quad \frac{a^{2m|1}}{(a+x)^{2m|1}}\cdot(a+x+2m-2)^{\frac{1}{2}x}.(a+x+2m-1)^{\frac{1}{2}x}$$
$$> 2^x.f_{\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}x}.f_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}x} > \frac{a^{2n|1}}{(a+x)^{2n|1}}\cdot(a+2n)^{\frac{1}{2}x}.(a+2n+1)^{\frac{1}{2}x}.$$

Nun ist aber

$$(a+x+2m-1)^{\frac{1}{2}x} > (a+x+2m-2)^{\frac{1}{2}x}$$

und

$$(a+2n)^{\frac{1}{2}x} < (a+2n+1)^{\frac{1}{2}x};$$

also folgt um so mehr (aus der Vergleichung $\alpha.$)

$$\beta. \quad \frac{a^{2m|1}}{(a+x)^{2m|1}}\cdot(a+x+2m-1)^{x} > 2^x.f_{\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}x}.f_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}x} > \frac{a^{2n|1}}{(a+x)^{2n|1}}\cdot(a+2n)^{x};$$

und da zwischen denselben Grenzen (nach N. 11. des §. 4.) auch $f_{a,x}$ liegt, in so fern $\frac{1}{2}x > 1$, also auch $x > 1$ vorausgesetzt ist, so folgt hieraus und aus §. 5. N. 1.

$$(\eth.) \qquad 2^x.f_{\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}x}.f_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}x} = f_{a,x},$$

welches der Satz $(\odot.)$ für den Fall ist, dafs $\frac{1}{2}x > 1$, also $x > 2$, wenn auch gebrochen, gedacht wird.

Ist nun blofs a und $a+x$ positiv und *nicht* $\frac{1}{2}x > 1$, so kann man doch eine positive ganze Zahl m so nehmen, dafs $m+\frac{1}{2}x > 1$, d. h. $2m+x > 2$

ist, und dann hat man (nach dem so eben erwiesenen, wenn $x+2m$ statt x gesetzt wird)

$$2^{x+2m} \cdot f_{\frac{1}{2}a,\,\frac{1}{2}x+m} \cdot f_{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}x+m} = f_{a,\,x+2m}.$$

Nun ist aber nach der Formel (⊙.), wenn $2m$ statt x gesetzt wird und $a+x$ statt a,

$$2^{2m} \cdot (\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}x)^{m|1} \cdot (\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x)^{m|1} = (a+x)^{2m|1};$$

dividirt man daher die vorhergehende Gleichung durch diese letztere, so erhält man nach der Formel XXIII. des §. 6. augenblicklich wieder die obige Gleichung (☿.), d. h. die Gleichung (⊙.) für den Fall, dafs a und $a+x$ positiv. Also gilt die Gleichung (⊙.) für alle im §. 5. zu Ende, definirten reellen Factoriellen, wie auch die Exponenten übrigens (positiv oder negativ, ganz oder gebrochen) sein mögen.

§. 9.

Wir wollen hier abbrechen, da es leicht ist nach diesen Mustern auch die übrigen Hauptgesetze der Factoriellen auf demselben Wege zu erweisen.

Wir fügen aber noch Folgendes hinzu:

Nach dem in den §§. 3 — 8. Gegebenen ist die Factorielle $a^{x|1}$ für den Fall definirt, dafs a und $a+x$ beliebig positiv sind; alle erwiesenen Gleichungen zwischen Factoriellen sind also unter der Voraussetzung erwiesen worden, dafs für jede in diesen Gleichungen vorkommende Factorielle $b^{z|1}$, sowohl b als auch $b+z$ positiv sind. Es läfst sich aber, ***wenn man will,*** nachher noch zeigen, dafs gerade unter dieser Voraussetzung allemal und auch nur dann

$$b^{z|1} = \frac{\Gamma_{b+z}}{\Gamma_b} \quad \text{und} \quad 1^{z|1} = \Gamma_{1+z}$$

ist, so oft

$$\int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{v-1} \cdot dy = \Gamma_v$$

gesetzt wird, wo v positiv gedacht werden mufs.

Die in den §§. 3 — 8. erwiesenen Sätze gehen also gewissermafsen über die Gamma-Functionen nicht hinaus, wenn unter letzterer das vorstehende bestimmte Integral verstanden wird.

Will man deshalb jetzt noch allgemeinere Begriffe feststellen, so mufs man noch definiren

$$\text{I.} \qquad f_{a,x} = \frac{a^{m|1}}{(a+x)^{m|1}} \cdot f_{a+m,x}$$

und m grofs genug nehmen und positiv ganz, so dafs $a+m$ und $a+m+x$ positiv werden, wie auch a und x beliebig ***reell*** gegeben sein mögen. Dadurch ist dann, wenn wieder $a^{x|1} = f_{a,x}$ genommen wird, der Begriff der Factorielle $a^{x|1}$ definirt, während a und x ganz beliebig reell sind.

Ferner mufs man dann definiren, wenn r positiv ist

$$\text{II.} \qquad a^{x|r} = r^x . \left(\frac{a}{r}\right)^{x|1} = r^x . f_{\frac{a}{r},x}$$

und

$$\text{III.} \qquad a^{x|-r} = (a-(x-1)r)^{x|+r},$$

und für diese erweiterten Factoriellen die Gültigkeit der Grundgesetze der Factoriellen noch einmal erweisen.

Schliefslich mufs aber der Verfasser hier noch ausdrücklich dagegen sich verwahren, dafs er selbst als Lehrer geneigt sei, die Lehre der Factoriellen auf dem hier bezeichneten Wege vorzutragen. Im Gegentheil hat er ***als Lehrer*** solche Methoden, wie die so eben nachgewiesene, stets vermieden. Es hat aber für den Analysten als solchen einiges Interesse auch dergleichen Wege einmal versucht zu haben.

In materieller Beziehung angesehen, so giebt die XV., wenn $a=1$ und $x=z-1$ gesetzt wird, in so fern $f_{1,z-1} = \Gamma_z$ wird, jedesmal zwei Grenzen, ***zwischen*** denen der Werth des bestimmten Integrals Γ_z stets liegt, und die einander immer näher rücken, je gröfser die ganzen Zahlen m und n genommen werden.

Dies hat aber für die numerische Berechnung von Γ_z seinen practischen Nutzen.

6.

Die Gesetze der Succession einer Reihe sphärischer Kreise, von welchen jeder den nächstfolgenden und zugleich zwei feste Kreise berührt, deren einer im Innern des andern enthalten ist.

(Von dem Herrn Professor Dr. *Gudermann* zu Münster.)

1.

Wenn zwei feste Kreise auf der Kugel sich berühren, von welchen der eine im Innern des andern enthalten ist, so läfst sich eine unendliche Reihe anderer Kreise so beschreiben, dafs jeder nicht blofs jene beiden Kreise, sondern auch den nächstfolgenden in derselben Schaar berührt; und diese neuen Kreise befolgen einfache Gesetze, welche im achten Bande dieses Journals Seite 160 und f. f. von mir ausführlich untersucht worden sind. Wenn aber die beiden ursprünglichen Kreise aus den Mittelpuncten M und M' (Taf. I. Fig. 1.) mit den Radien $MA = R$ und $M'A' = R'$ so beschrieben worden sind, dafs dieser im Innern jenes Kreises enthalten ist, ohne ihn zu berühren, so läfst sich ebenfalls eine unendliche Reihe anderer Kreise zwischen den genannten beiden Kreisen so beschreiben, dafs jeder von ihnen nicht nur die beiden gegebenen Kreise, sondern auch seinen Nachbar berührt; diese Reihe von Kreisen läfst sich sogar bis ins Unendliche fortsetzen, wobei sie Gesetze befolgen, die der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung sind.

Damit der Kreis (M') im Innern des andern Kreises (M) enthalten sei, mufs $R' < R$, und wenn die Centrallinie MM', oder der Abstand ihrer Mittelpuncte von einander, durch $2E$ bezeichnet wird, so mufs sogar, wenn keine Berührung unter ihnen Statt finden soll,

$$R - R' > 2E$$

sein. Ist AB der Durchmesser des Kreises (M) und $A'B'$ der Durchmesser des kleineren Kreises (M'), und befinden sich die Mittelpuncte M und M' in diesen beiden Durchmessern, so ist AA' die kleinste und BB' die gröfste Entfernung der beiden gegebenen Kreise von einander; es sei dann

$$AA' = 2H \text{ und } BB' = 2K, \text{ so dafs } K > H.$$

Da nun $2E+R'+2H=R$ und $2E+R-2K=R'$ ist, so finden sich rückwärts

$$1. \quad H=\tfrac{1}{2}(R-R')-E \quad \text{und} \quad K=\tfrac{1}{2}(R-R')+E.$$

Werden AA', BB' und MM' durch die Puncte a, b, C halbirt, so ist $aA=aA'=H$, $bB=bB'=K$ und $CM=CM'=E$. Setzt man zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(R+R')=A=\text{arc tang}(a) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(R-R')=D=\text{arc tang}(d),$$

so ist, den vorigen Formeln gemäfs:

$$2. \quad \begin{cases} H=D-E & \text{und} \quad K=D+E; \\ R=A+D & \text{und} \quad R'=A-D. \end{cases}$$

Beschreiben wir nun einen beliebigen ersten Kreis (m) aus dem Mittelpuncte m mit dem Radius r, welcher die beiden gegebenen Kreise in β und β' berührt, und ziehen die Hauptbogen Mm und $M'm$ nach diesem Mittelpuncte m, so ist, wegen dieser Berührungen,

$$3. \quad \begin{cases} Mm=R-r=A+D-r, \\ M'm=R'+r=A-D+r. \end{cases}$$

Hieraus folgt $Mm+M'm=2A$. Da aber die Summe der Entfernungen *des* Mittelpuncts m von den Mittelpuncten der beiden gegebenen Kreise unveränderlich ist, *so ist die Ortscurve des Mittelpuncts m eine sphärische Ellipse, deren Mittelpunct der Punct C, deren Brennpuncte die Mittelpuncte M und M' der gegebenen Kreise, deren grofse Halb-Axe* $Ca=Cb=A=\frac{1}{2}(R+R)$ *und deren Excentricität* $CM=CM'=E$ ist.

Jeder Kreis also, welcher die beiden gegebenen Kreise berührt, hat seinen Mittelpunct in dieser Ellipse *amdbd'a*, in welcher a und b die Scheitel der grofsen Axe sind. (Man vergleiche des Verfassers „Grundrifs" der analytischen Sphärik §. 74. und §. 75.)

Ist die kleine Axe dieser Ellipse $2B$, also B die kleine Halb-Axe, so ist $\cos A=\cos B.\cos E$; setzen wir also zur Abkürzung

$\text{tang}\, B=b$ und $\text{tang}\, E=e$, so ist, weil $\text{tang}\, A=a$ ist:

$$4. \quad b=\sqrt{\frac{a^2-e^2}{1+e^2}}.$$

Wird vom Mittelpuncte m das sphärische Perpendikel mP auf AB gefällt, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken MPm und $M'Pm$

$\cos Mm=\cos MP.\cos Pm$ und $\cos M'm=\cos M'P.\cos PM$, also

$$\frac{\cos Mm}{\cos M'm} = \frac{\cos MP}{\cos M'P} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos(R-r)}{\cos(R'+r)} = \frac{\cos(E+CP)}{\cos(CP-E)}, \quad \text{oder auch}$$

$$\frac{\cos(A+D-r)}{\cos(A-D+r)} = \frac{\cos(CP+E)}{\cos(CP-E)},$$

und hieraus findet man durch eine leichte Entwickelung die Formel

$$5. \quad \operatorname{tang}(D-r) = \frac{\operatorname{tang} E}{\operatorname{tang} A} \cdot \operatorname{tang} CP,$$

nach welcher sich die Gröfse des Halbmessers r des neuen Kreises aus dem Abstande der sphärischen Projection P seines Mittelpuncts vom Mittelpuncte C der Ellipse bestimmen läfst. Will man nicht diesen Abstand, sondern statt seiner die excentrische Anomalie des Punctes m als gegeben ansehen und diese durch φ bezeichnen, so ist (wie im §. 75 oder §. 83. des „Grundrisses der analytischen Sphärik") $\operatorname{tang} CP = \operatorname{tang} A . \cos\varphi$, und also

$$\operatorname{tang}(D-r) = \operatorname{tang} E . \cos\varphi, \text{ oder auch}$$

$$6. \quad \operatorname{tang} r = \frac{d - e\cos\varphi}{1 + de\cos\varphi}.$$

Dieser Formel gemäfs läfst sich, wenn φ gegeben ist, die Länge eines dem Radius r gleichen Hauptbogens sehr einfach geometrisch construiren.

2.

Wird nun noch ein zweiter Kreis m' construirt, dessen Radius r', dessen excentrische Anomalie φ' ist und welcher die beiden ursprünglichen Kreise und γ und γ', hingegen den vorigen Kreis m in δ berührt, so ist der Hauptbogen $mm' = r + r'$; und werden die Winkel $mM'A = v$, $m'M'A = v'$ gesetzt, so ist $mM'm'$ ein sphärisches Dreieck, dessen eine Seite $mm' = r + r'$ ist, und dessen andere Seiten $M'm = A - D + r$ und $M'm' = A - D + r'$ den Winkel $mM'm' = v' - v$ einschliefsen. Daher ist, der sphärischen Trigonometrie gemäfs:

$$\sin\tfrac{1}{2}(v'-v) = \sqrt{\frac{\sin r . \sin r'}{\sin(A-D+r)\sin(A-D+r')}}.$$

Da aber $\dfrac{\sin r}{\sin(A-D+r)} = \dfrac{\operatorname{tang} r}{\sin(A-D) + \cos(A-D)\operatorname{tang} r}$ ist, so findet sich durch Anwendung der Formel (6.):

$$\frac{\sin r}{\sin(A-D+r)} = \sqrt{\frac{1+a^2}{1+d^2} \cdot \frac{d - e\cos\varphi}{a - e\cos\varphi}} \quad \text{und ebenso}$$

$$\frac{\sin r'}{\sin(A-D+r')} = \sqrt{\frac{1+a^2}{1+d^2} \cdot \frac{d - e\cos\varphi'}{a - e\cos\varphi'}}, \quad \text{also ist}$$

$$7. \quad \sin\tfrac{1}{2}(v'-v) = \sqrt{\left[\frac{1+a^2}{1+d^2} \cdot \frac{(d - e\cos\varphi)(d - e\cos\varphi')}{(a - e\cos\varphi)(a - e\cos\varphi')}\right]}.$$

Benutzt man nun die Ausdrücke der wahren Anomalieen v und v' durch die excentrischen φ und φ', so ist (nach §. 75. des „Grundrisses der analytischen Sphärik")

$$\sin\tfrac{1}{2}v = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{\frac{a+e}{a-e\cos\varphi}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}v' = \sin\tfrac{1}{2}\varphi'\cdot\sqrt{\frac{a+e}{a-e\cos\varphi'}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}v = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{\frac{a-e}{a-e\cos\varphi}}, \qquad \cos\tfrac{1}{2}v' = \cos\tfrac{1}{2}\varphi'\cdot\sqrt{\frac{a-e}{a-e\cos\varphi'}},$$

woraus, zusammengesetzt,

$$\sin\tfrac{1}{2}(v'-v) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi).\sqrt{(a^2-e^2)}}{\sqrt{((a-e\cos\varphi)(a-e\cos\varphi'))}}$$

folgt; und wird dieser Werth in der Gleichung (7.) substituirt, so entsteht der einfachere Ausdruck

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi).(a^2-e^2) = \frac{1+a^2}{1+d^2}\cdot(d-e\cos\varphi)(d-e\cos\varphi').$$

Da ferner $(d-e\cos\varphi)(d-e\cos\varphi') = d^2-de(\cos\varphi+\cos\varphi')+e^2\cos\varphi\cos\varphi'$ $= d^2-2de\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)+e^2(\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi)-\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi))$ ist, so erhält durch die Substitution dieser Gleichung die vorige nach einer leichten Umformung die Beschaffenheit, dafs daraus die Quadratwurzel gezogen werden kann und es entsteht die Gleichung

$$\sqrt{(a^2-d^2)}\sqrt{(1+e^2)}.\sin\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi) = \sqrt{(1+a^2)}.((d\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)-e\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi)),$$

oder auch

$$8. \quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi).\sqrt{(\sin^2A-\sin^2D)}$$
$$= \sin D\cos E\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)-\cos D\sin E.\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi),$$

welche eine metrische Relation unter den excentrischen Anomalieen φ und φ' der beiden Mittelpuncte m und m' ausdrückt.

Nicht ganz so einfach ist die Relation unter den wahren Anomalieen v und v', welche sich auch aus der vorigen Gleichung herleiten läfst; nemlich

$$9. \quad (\sin^2A-\sin^2D)\sin\tfrac{1}{2}(v'-v)$$
$$= (\cos^2E\sin A\sin D-\sin^2E\cos A\cos D)\cos\tfrac{1}{2}(v'-v)$$
$$-\sin E\cos E\sin\tfrac{1}{2}(A-D)\cos\tfrac{1}{2}(v'+v).$$

Löset man die vorige Gleichung auf in Ansehung von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi'$, so erhält man

$$10. \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{\sin H+\sqrt{(\sin R\sin R')}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(\sin R\sin R')}-\sin K.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}$$

und hiernach läfst sich aus der excentrischen Anomalie des Mittelpuncts m des ersten Kreises unmittelbar die excentrische Anomalie des Mittelpuncts m' des nächsten Kreises finden, der die beiden ursprünglichen Kreise (M) und

(M') und zugleich den Kreis (m) berührt. Es kann die letzte Gleichung auch also dargestellt werden:

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin D \cos E - \cos D \sin E . \cos \varphi}{\sqrt{(\sin R \sin R') - \cos D \sin E \sin \varphi}}.$$

3.

Eine viel wichtigere Umformung erhält man aber noch, wenn man die Centrallinie $MM' = 2E$ äufserlich durch einen Punct f so theilt, dafs die Sinus der Abstände dieses Puncts von den Mittelpuncten M und M' sich zu einander verhalten, wie die Sinus der Radien der beiden Kreise (M) und (M') selbst, und über derselben grofsen Axe $ab = 2A$ noch eine zweite Ellipse construirt, deren einer Brennpunct jener Punct f ist. Diese Ellipse schneidet dann die von den Mittelpuncten m, m', m'' etc. auf AB herabgelassenen Perpendikel in den Puncten α, α', α'' etc. dergestalt, dafs die Winkel $\alpha f \alpha'$, $\alpha' f \alpha''$, $\alpha'' f \alpha'''$ etc. sich immerfort gleich bleiben. Setzen wir die Excentricität der neuen Ellipse $Cf = E'$ und $\tang E' = e'$, so verwandelt sich die Proportion

$$\frac{\sin Mf}{\sin M'f} = \frac{\sin R}{\sin R'} \quad \text{in} \quad \frac{\sin(E'+E)}{\sin(E'-E)} = \frac{\sin(A+D)}{\sin(A-D)}, \quad \text{oder auch in}$$

$$\frac{e'+e}{e'-e} = \frac{a+d}{a-d}, \quad \text{und hieraus folgt}$$

$$11. \qquad e' = \frac{ae}{d}.$$

Da $a > d$ ist, so ist auch $e' > e$, d. h. der Punct f liegt wirklich in der Verlängerung von MM'.

Da ferner $\frac{e'}{a} = \frac{e}{d} = \frac{\tang E}{\tang \frac{1}{2}(R-R')}$ und nach der Annahme $R - R' > 2E$, also $\frac{1}{2}(R-R') > E$, mithin auch $\tang E < \tang \frac{1}{2}(R-R')$ ist, so ist $e' < a$; d. h. es ist $Cf < Ca$; daher liegt der mehrerwähnte Brennpunct f der neuen Ellipse wirklich zwischen M' und a.

Der oben in No. 1. angeführten Gleichung $\tang CP = \tang A . \cos \varphi$ gemäfs ist die excentrische Anomalie φ des Puncts m der ersten Ellipse übereinstimmend mit der excentrischen Anomalie des Puncts α; folglich stimmen überhaupt die excentrischen Anomalieen der Mittelpuncte m, m', m'' etc. überein mit den excentrischen Anomalieen der Puncte α, α', α'' etc. Eine andere Bewandnifs hat es aber mit den wahren Anomalieen. Bezeichnen wir die wahren Anomalieen der Puncte α, α', α'' etc. der Reihe nach durch ψ, ψ', ψ'' etc., so erhalten wir, ähnlich der Formel $\tang \frac{1}{2} v = \tang \frac{1}{2} \varphi \cdot \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}$, die Formel

$\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{\frac{a+e'}{a-e'}}$ für den Punct α der neuen Ellipse. Wird hierin der obige Werth $e' = \frac{ae}{d}$ substituirt, so ergiebt sich

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi \cdot \sqrt{\frac{d-e}{d+e}}, \text{ und eben so}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi' = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi' \cdot \sqrt{\frac{d-e}{d+e}},$$

worin $\psi = af\alpha$ und $\psi' = af\alpha'$ ist. Mittelst dieser einfachen Formeln läfst sich die Relation (8.) zwischen φ und φ' in eine Relation zwischen ψ und ψ' umsetzen. Da nämlich, der Formel (8.) gemäfs,

$$\sqrt{(a^2-d^2)}.\sqrt{(1+e^2)}.(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi' - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$= \sqrt{(1+a^2)}.(d-e+(d+e)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi'\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$\sqrt{(a^2-d^2)}.\sqrt{(1+e^2)}\cdot\sqrt{\frac{d-e}{d+e}}\cdot(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi' - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi)$$
$$= \sqrt{(1+a^2)}.(d-e).(1+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi'\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi),$$

oder auch $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\psi'-\psi) = \sqrt{\frac{1+a^2}{1+e^2}}\cdot\sqrt{\frac{d^2-e^2}{a^2-d^2}}$, d. h.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi) = \sqrt{\frac{\sin(D+E)\sin(D-E)}{\sin(A+D)\sin(A-D)}} = \sqrt{\frac{\sin H.\sin K}{\sin R.\sin R'}}.$$

Dieser Formel gemäfs ist also die Gröfse des Winkels $\psi'-\psi$, d. h. der Winkel $\alpha f\alpha'$, nicht nur unabhängig von der Gröfse der Radien r und r' der beiden Kreise (m) und (m'), sondern auch unabhängig von der Lage des Mittelpuncts m in der ersten Ellipse, und es ist daher ganz einerlei, an welcher Stelle zwischen den beiden gegebnen Kreisen (M) und (M') der erste Kreis der Schaar m, m', m'', etc. construirt wird. Wenn der erste Kreis (m) nur die beiden gegebnen Kreise, und jeder folgende Kreis jener Schaar nicht nur die beiden gegebnen Kreise, sondern auch seinen Vorgänger berührt, so sind die Winkel

$$\alpha f\alpha', \quad \alpha' f\alpha'', \quad \alpha'' f\alpha''', \quad \text{etc.}$$

immer von derselben Gröfse. Wird dieser sich gleichbleibende Winkel, welcher nur von der Lage und Gröfse der beiden gegebenen Kreise abhängt, durch F bezeichnet, so ist

$$12. \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{\sin H.\sin K}{\sin R.\sin R'}}.$$

Da $\sin H.\sin K = \frac{1}{2}(\cos 2E - \cos(R-R'))$ ist, so kann die vorige Formel

auch so dargestellt werden:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\frac{\cos 2E - \cos(R-R')}{2\sin R.\sin R'}}.$$

Nach der anfänglichen Formel läfst sich der Winkel F auch durch eine leichte geometrische Construction finden. Construirt man nämlich ein sphärisches Dreieck aus den drei Seiten $R-R'$, $\frac{1}{2}(R+R')+E'$ und $\frac{1}{2}(R+R')-E$, so befindet sich in diesem Dreiecke der Winkel F; und zwar der Seite $R-R'$ gegenüber.

Nimmt man den ersten Kreis (m) willkürlich an, und läfst darauf die Schaar der übrigen allmälig folgen, so ist der Fall denkbar, dafs nach u Umläufen ein Kreis der gesammten Schaar, welcher der $n$te in der Reihe derselben sein mag, den ersten Kreis (m) berührt. Dann aber ist $n.F = u.2\pi$, und also $\frac{1}{2}F = \frac{\pi u}{n}$, mithin

$$\text{tang}\,\frac{u\pi}{n} = \sqrt{\frac{\cos 2E - \cos(R-R')}{2\sin R.\sin R'}}.$$

Sind nun die beiden Radien R und R' gegeben, so läfst sich der Abstand $MM' = 2E$ der Mittelpuncte der mit ihnen beschriebenen Kreise von einander nach der Formel

$$13. \qquad \cos 2E = \cos(R-R') + 2\sin R \sin R'.\text{tang}^2\frac{u\pi}{n}$$

so bestimmen, dafs die Schaar der Kreise (m), (m'), (m'') etc., deren Anzahl $= n$ ist, nach u Umläufen eine solche Lage hat, dafs auch der letzte Kreis wieder den ersten berührt und die Reihefolge der Kreise also periodisch in sich zurückläuft; wobei es dann gleichgültig ist, welche Stelle dem ersten Kreise (m) der Schaar, zwischen den beiden einschliefsenden Kreisen (M) und (M'), gegeben wird. Die Formel (13.) ist auch von dem Herrn Prof. *Steiner* ohne Beweis früher angegeben worden.

4.

Wird durch die beiden Berührungspuncte β und β' des ersten Kreises (m) mit den beiden gegebnen Kreisen (M) und (M') ein Hauptbogen $\beta\beta'$ gezogen, welcher die Centrallinie MM' in g schneidet, so gilt, weil die Puncte g, β' und β der Seiten des Dreiecks $MM'm$ in demselben Hauptkreise liegen, die Relation

$$\frac{\sin Mg}{\sin M'g}\cdot\frac{\sin M'\beta'}{\sin m\beta'}\cdot\frac{\sin m\beta}{\sin M\beta} = 1,$$

welche sich, da $m\beta = m\beta' = r$ und ferner $M\beta = R$ und $M'\beta' = R'$ ist, auf

$$14. \qquad \frac{\sin Mg}{\sin M'g} = \frac{\sin R}{\sin R'}$$

reducirt. Dieser Proportion gemäfs hängt die Lage des Punctes g in der Centrallinie MM' gar nicht von der Lage des ersten Kreises m ab; also treffen die Berührungssehnen $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, etc. der Kreise m, m', etc., auch dann wenn sich diese Kreise nicht berühren, sämmtlich verlängert in demselben Puncte g der Centrallinie MM' zusammen.

Da ferner auch

$$\frac{\sin Mf}{\sin M'f} = \frac{\sin R}{\sin R'}, \quad \text{so ist} \quad \frac{\sin Mg}{\sin M'g} = \frac{\sin Mf}{\sin M'f};$$

d. h. die Centrallinie MM' der anfänglichen Kreise wird durch die Puncte f und g harmonisch getheilt.

Fället man ferner vom Mittelpuncte m des ersten Kreises (m) auf seine Berührungssehne $\beta\beta'$ ein Perpendikel, so wird dadurch, weil das Dreieck $\beta m\beta'$ gleichschenklig ist, nicht nur diese Grundlinie $\beta\beta'$ halbirt, sondern auch der Winkel $\beta m\beta'$; und da diesen Winkel die Verlängerung des einen Leitstrahls Mm mit dem anderen Leitstrahle $M'm$ desselben Punctes m macht, *so ist das von m auf $\beta\beta'$ gefällte Perpendikel eine Berührungslinie der Ellipse amdb;* und eben so ist auch das von m' auf $\gamma\gamma'$ gefällte Perpendikel eine Berührungslinie dieser Ellipse, wenn auch der Kreis (m') den Kreis (m) nicht berührt.

7.

De integralibus

$\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$ et $\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$,

et aliis, quae cum ipsis sunt connexa, commentatio analytica.

(Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, Math. prof. ord. Monast. Guestph.)

1.

Integrationes formae $\int \frac{P \partial x}{\sqrt{R}}$, in qua P est ipsius x functio rationalis, R vero est functio rationalis integra ad gradum sextum ascendens, plerumque transformationibus rediguntur ad integralia ea, quae in sectione sedecima theoriae functionum modularium et integralium ab ipsis pendentium fusius sunt exposita. Integralia modo proposita, si subsumuntur formae $\int \frac{P \partial x}{\sqrt{R}}$, requirunt, ut R sit forma gradus octavi, si ponitur $x = \operatorname{sn} \frac{1}{2} u$. Si vero sumis

$$x = k \operatorname{snc} \tfrac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc} \tfrac{1}{2}(a-u) \quad \text{et} \quad x = k \operatorname{sn} \tfrac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn} \tfrac{1}{2}(a-u),$$

integralia rediges in formam $\int \frac{P \partial x}{\sqrt{R}}$, in quibus R est forma gradus sexti, et quidem in utroque casu invenies

$$R = (1-x)(1+x)(\alpha'+x)\left(\frac{1}{\alpha'}+x\right)(\alpha-x)\left(\frac{1}{\alpha}-x\right),$$

in quo α et α' sunt quantitates duae constantes; unde perspicis, integrationes propositas difficultatibus non exiguis esse obnoxias. Ab ipsis pendent vero inter alia et rectificationes curvarum sphaericarum earum, quas circulares scalenas nominavi.

Cum modulis duobus coniugatis k et k' coniuncti sint moduli λ et λ' per formulas

1. $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+k)} - \sqrt{(1-k)})$ et $\lambda' = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+k')} - \sqrt{(1-k')})$,

e quibus facillime invenis sequentes $\lambda^2 = \frac{1}{2}(1-k')$, $\lambda'^2 = \frac{1}{2}(1+k')$, unde quia sequitur $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, perspicis, modulos λ et λ' quoque esse coniugatos. Reversio praebet formulas

2. $k' = \lambda'^2 - \lambda^2 = 1 - 2\lambda^2 = 2\lambda'^2 - 1$ et $k = 2\lambda\lambda'$

quibus addimus $\sqrt{(1+k)} = \lambda' + \lambda$, $\sqrt{(1-k)} = \lambda' - \lambda$. Nexus igitur inter quatuor

modulos est is, ut positis $k = \sin\theta$, sive $k' = \cos\theta$, fiat $\lambda = \sin\frac{1}{2}\theta$ et $\lambda' = \cos\frac{1}{2}\theta$. Quia $\sin\frac{1}{2}\theta < \sin\theta$, at $\cos\frac{1}{2}\theta < \cos\theta$, est

$$\lambda < k \quad \text{et} \quad \lambda' > k'.$$

Praeter argumentum u, cuius functiones modulares $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{snc} u$, $\operatorname{cnc} u$, $\operatorname{dnc} u$, $\operatorname{tnc} u$ omnes ad modulum k, quare $\operatorname{sn}' n$, $\operatorname{cn}' u$, $\operatorname{dn}' u$, $\operatorname{tn}' u$, $\operatorname{snc}' u$, $\operatorname{cnc}' u$, $\operatorname{dnc}' u$, $\operatorname{tnc}' u$ ad modulum k' coniugatum referimus, sumamus duo argumenta v et w, quorum functiones modulares adhibitis signis similibus ad modulos λ et λ' referimus, et quae ita determinantur, ut sit

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+\operatorname{dn} u) \quad \text{et} \quad \operatorname{dn}' w = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+\operatorname{dn} u)$$

quibus in aequationibus functio igitur $\operatorname{dn} v$ ad modulum λ, et functio $\operatorname{dn}' w$ ad modulum λ' referenda est. E formulis his primitivis facillimo negotio derivabis sequentes, quibus illas ipsas addimus:

3.
$$\begin{cases} \lambda \operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1}{2}}(1-\operatorname{dn} u) = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)} - \sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}), \\ \operatorname{sn} v = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} u}{1-k'}}, \\ \operatorname{cn} v = \sqrt{\dfrac{\operatorname{dn} u - k'}{1-k'}}, \\ \operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{1}{2}}(1+\operatorname{dn} u) = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)} + \sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}), \\ \operatorname{tn} v = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u - k'}}, \\ \operatorname{snc} v = \sqrt{\dfrac{2(\operatorname{dn} u - k')}{(1-k')(1+\operatorname{dn} u)}}, \\ \operatorname{cnc} v = \sqrt{\dfrac{(1+k')(1-\operatorname{dn} u)}{(1-k')(1+\operatorname{dn} u)}}, \\ \operatorname{dnc} v = \sqrt{\dfrac{1-k'}{1+\operatorname{dn} u}}, \\ \operatorname{tnc} v = \sqrt{\dfrac{2(\operatorname{dn} u - k')}{(1+k')(1-\operatorname{dn} u)}}, \end{cases}$$

et pariter

4.
$$\begin{cases} \lambda' \operatorname{sn}' w = \sqrt{\frac{1}{2}}(1-\operatorname{dn} u) = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)} - \sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}), \\ \operatorname{sn}' w = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} u}{1+k'}}, \\ \operatorname{cn}' w = \sqrt{\dfrac{k'+\operatorname{dn} u}{1+k'}}, \\ \operatorname{dn}' w = \sqrt{\frac{1}{2}}(1+\operatorname{dn} u) = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)} + \sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}), \\ \operatorname{tn}' w = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u + k'}}, \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{snc}' w = \sqrt{\dfrac{2(k'+\operatorname{dn} u)}{(1+k')(1+\operatorname{dn} u)}}, \\ \operatorname{cnc}' w = \sqrt{\dfrac{(1-k')(1-\operatorname{dn} u)}{(1+k')(1+\operatorname{dn} u)}}, \\ \operatorname{dnc}' w = \sqrt{\dfrac{1-k'}{1+\operatorname{dn} u}}, \\ \operatorname{tnc}' w = \sqrt{\dfrac{2(k'+\operatorname{dn} u)}{(1-k')(1-\operatorname{dn} u)}}, \end{cases}$$

Si K et K' sunt quadrantes modulares, qui pertinent ad modulos k et k', et si pariter L et L' sunt quadrantes ii, qui ad modulos λ et λ' pertinent, vides esse simul $u = v = w = 0$; et si $u = K$ ponatur, fieri $v = L$, at non fieri $w = L'$. Si valorem ipsius w pro $u = K$ indicamus signo l', fit $\operatorname{sn}' l' = \sqrt{\dfrac{1-k'}{1+k'}} = \dfrac{\lambda}{\lambda'} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$, sive

$$\text{ℒ}\operatorname{am}' l' = \tfrac{1}{2}\text{ℒ}\theta.$$

Vice versa, ponendo $u = K \pm 2iK'$, quo fit $\operatorname{dn} u = -k'$, argumentum $w = L'$ evadit, at v induit valorem l tale ut sit $\operatorname{sn} l = \sqrt{\dfrac{1+k'}{1-k'}} = \dfrac{\lambda'}{\lambda} = \operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta)$.

Vice versa functiones argumenti u hisce formulis exprimuntur.

$$5.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\lambda'} = \dfrac{\operatorname{sn}' w \,.\, \operatorname{dn}' w}{\lambda}, \\ k \operatorname{sn} u = 2\lambda \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v = 2\lambda' \operatorname{sn}' w \operatorname{dn}' w, \\ \sqrt{(1 + k \operatorname{sn} u)} = \operatorname{dn} v + \lambda \operatorname{sn} v = \operatorname{dn}' w + \lambda' \operatorname{sn}' w, \\ \sqrt{(1 - k \operatorname{sn} u)} = \operatorname{dn} v - \lambda \operatorname{sn} v = \operatorname{dn}' w - \lambda' \operatorname{sn}' w, \\ \operatorname{cn} u = \dfrac{\operatorname{cn} v \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}}{\lambda'} = \dfrac{\operatorname{cn}' w \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}}{\lambda}, \\ \operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}} = \dfrac{\operatorname{tn}' w \operatorname{dn}' w}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}}, \\ \operatorname{dn} u = 1 - 2\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v = 1 - 2\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w, \\ \operatorname{snc} u = \dfrac{\operatorname{cn} v \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}}{\lambda'(1 - 2\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)} = \dfrac{\operatorname{cn}' w \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}}{\lambda(1 - 2\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}, \\ \operatorname{cnc} u = \dfrac{(1 - 2\lambda^2) \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\lambda'(1 - 2\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)} = \dfrac{(2\lambda'^2 - 1) \operatorname{sn}' w \operatorname{dn}' w}{\lambda(1 - 2\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}, \\ \operatorname{dnc} u = \dfrac{1 - 2\lambda^2}{1 - 2\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v} = \dfrac{2\lambda'^2 - 1}{1 - 2\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 v}, \end{cases}$$

quas inter formulas eae sunt notatu dignissimae, quae functiones $\operatorname{dn} u$ et $\operatorname{dnc} u$ exprimunt, quia ab omni irrationalitate sunt liberae.

2.

E formula $\mathrm{dn}\, u = 1-2\lambda^2 \mathrm{sn}^2 v = 1-2\lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w$ differentiando obtines

$$k^2 \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u \,.\, \partial u = 4\lambda^2 \mathrm{sn}\, v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{dn}\, v \,.\, \partial v = 4\lambda'^2 \mathrm{sn}' w \,\mathrm{cn}' w \,\mathrm{dn}' w \,.\, \partial w,$$

et quia e formulis praecedentibus componis

$$k^2 \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u = 4\lambda^2 \mathrm{sn}\, v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{dn}\, v \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)} = 4\lambda'^2 \mathrm{sn}' w \,\mathrm{cn}' w \,\mathrm{dn}' w \,.\, \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)},$$

oritur aequatio differentialis quantum fieri potest reducta haec:

$$1. \qquad \partial u = \frac{\partial v}{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)}} = \frac{\partial w}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)}}.$$

Quare in promtu sunt integralia duo prima

$$2. \qquad \int_0 \frac{\partial v}{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)}} = u = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)(\lambda'^2 - \lambda^2 x^2)]}}, \quad \text{si } x = \mathrm{sn}\, v,$$

$$\int_0 \frac{\partial w}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)}} = u = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\lambda'^2 x^2)(\lambda^2 - \lambda'^2 x^2)]}}, \quad \text{si } x = \mathrm{sn}' w.$$

Vice versa invenis formulas

$$\partial v = \partial u \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\mathrm{dn}\, u + k') \quad \text{et} \quad \partial w = \partial u \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\mathrm{dn}\, u - k') \quad \text{sive}$$

$$3. \qquad \int_0 \partial u \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\mathrm{dn}\, u + k') = v \quad \text{et} \quad \int_0 \partial u \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\mathrm{dn}\, u - k') = w.$$

Formulae hae posito $x = \mathrm{dn}\, u$ abeunt in

$$4. \qquad \int_1 \frac{-\partial x}{\sqrt{(2(1-x^2)(x-k'))}} = v \quad \text{et} \quad \int_1 \frac{-\partial x}{\sqrt{(2(1-x^2)(x+k'))}} = w.$$

Quia

$$5. \qquad \begin{cases} \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\mathrm{dn}\, u + k') = \tfrac{1}{2}\sqrt{((\mathrm{dn}\, u + k\,\mathrm{cn}\, u) + \sqrt{(\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{cn}\, u)})} & \text{et} \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\mathrm{dn}\, u - k') = \tfrac{1}{2}\sqrt{((\mathrm{dn}\, u + k\,\mathrm{cn}\, u) - \sqrt{(\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{cn}\, u)})}, \end{cases}$$

formulae (3.) sic se habent:

$$6. \qquad \begin{cases} \int_0 \partial u \sqrt{(\mathrm{dn}\, u + k\,\mathrm{cn}\, u)} = v + w & \int_0 \partial u \sqrt[4]{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\, u}{1-k\,\mathrm{snc}\, u}} = \frac{v+w}{\sqrt{k'}}. \\ & \text{sive} \\ \int_0 \partial u \sqrt{(\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{cn}\, u)} = v - w & \int_0 \partial u \sqrt[4]{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\, u}{1+k\,\mathrm{snc}\, u}} = \frac{v-w}{\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Eaedem formulae adhibitis iis, quae bipartitionem argumenti exprimunt (conf. § 32. theoriae functionum modularium etc.), et sic exhibentur

$$7. \qquad \int_0 \sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}^2 \frac{1}{2} u}{1+k\,\mathrm{sn}^2 \frac{1}{2} u}} \cdot \partial u = \frac{v+w}{\sqrt{(1+k)}}, \qquad \int_0 \sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}^2 \frac{1}{2} u}{1-k\,\mathrm{sn}^2 \frac{1}{2} u}} \cdot \partial u = \frac{v-w}{\sqrt{(1-k)}}.$$

Ad formulas has clarissime explicandas non negliges esse

$$8.\quad \begin{cases} \lambda \operatorname{sn} v = \lambda' \operatorname{sn}' w, \\ \operatorname{dn} v = \operatorname{dn}' w, \\ \lambda \operatorname{cn} v = \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\operatorname{dn} u - k')}, \\ \lambda' \operatorname{cn}' w = \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\operatorname{dn} u + k')}, \\ \lambda \operatorname{cn} v + \lambda' \operatorname{cn}' w = \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)} + \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)} = \sqrt{(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)}, \\ \lambda \operatorname{cn} v - \lambda' \operatorname{cn}' w = \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)} - \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)} = \sqrt{(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u)}, \\ 2 \operatorname{dn}^2 v = 2 \operatorname{dn}'^2 w = 1 + \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

3.

Quia est $a = \frac{1}{2}(a+u) + \frac{1}{2}(a-u)$ et $u = \frac{1}{2}(a+u) - \frac{1}{2}(a-u)$, adhibitis formulis notissimis ad modulum k relatis $\operatorname{cn}(\alpha+\beta) + \operatorname{cn}(\alpha-\beta) = \frac{2 \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta}$ et $\operatorname{dn}(\alpha-\beta) + \operatorname{dn}(\alpha+\beta) = \frac{2 \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta}$ illico invenis

$$\operatorname{cn} a + \operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{cn}\frac{1}{2}(a+u) \operatorname{cn}\frac{1}{2}(a-u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a-u)} \quad \text{et}$$

$$\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u = \frac{2 \operatorname{dn}\frac{1}{2}(a+u) \operatorname{dn}\frac{1}{2}(a-u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a-u)},$$

e quibus dividendo oritur

$$1.\quad \frac{\operatorname{cn} a + \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u} = \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(a+u) . \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(a-u).$$

Si in hac ponis $2K - u$ loco u, $\frac{1}{2}(a+u)$ abit in $K - \frac{1}{2}(a-u)$ et $\frac{1}{2}(a-u)$ in $K - \frac{1}{2}(a+u)$, quare est

$$2.\quad \frac{\operatorname{cn} u - \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} u + \operatorname{dn} a} = \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(a+u) . \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(a-u).$$

Formulae hae consentiunt cum alia ratione inventis in §. 37. theoriae functionum modularium, et si ipsarum quadrata addito factore k^2 ab unitate subtrahis, facillimis reductionibus invenis

$$3.\quad \begin{cases} \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{snc}^2\frac{1}{2}(a+u) . \operatorname{snc}^2\frac{1}{2}(a-u))} = \dfrac{\sqrt{(2k'^2 + 2 \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u - 2k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} u)}}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u}, \\ \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a+u) . \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a-u))} = \dfrac{\sqrt{(2k'^2 + 2 \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u + 2k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} u)}}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u}. \end{cases}$$

In dextra cuiusque aequationis parte duplici modo radicem quadraticam extrahere potes, quare prodeunt tum formulae

$$4.\quad \begin{cases} \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{snc}^2\frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2\frac{1}{2}(a-u))} \\ = \dfrac{\sqrt{[(\operatorname{dn} a - k \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)]} + \sqrt{[(\operatorname{dn} a + k \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u)]}}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u}, \\ \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(a-u))} \\ = \dfrac{\sqrt{[(\operatorname{dn} a + k \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)]} + \sqrt{[(\operatorname{dn} a - k \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u)]}}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u}, \end{cases}$$

$\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$ et $\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$. 55

tum hae

$$5. \quad \begin{cases} \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a-u))} \\ = \dfrac{\sqrt{[(\operatorname{dn} a+k')(\operatorname{dn} u+k')]} - \sqrt{[(\operatorname{dn} a-k')(\operatorname{dn} u-k')]}}{\operatorname{dn} a+\operatorname{dn} u}, \\ \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a-u))} \\ = \dfrac{\sqrt{[(\operatorname{dn} a+k')(\operatorname{dn} u+k')]} + \sqrt{[(\operatorname{dn} a-k')(\operatorname{dn} u-k')]}}{\operatorname{dn} a+\operatorname{dn} u}, \end{cases}$$

quae prioribus non solum ob maiorem simplicitatem, sed potissimum eam ob causam a nobis praeferendae sunt, quia integralia proposita ipsarum ope facilius inveniuntur, quam ope praecedentium. Ceterum notae sunt formulae:

$$\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{\sqrt{[1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2} a)(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2} u)]}}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} u} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \tfrac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{\sqrt{[(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \frac{1}{2} a)(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2} u)]}}{1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} u}.$$

4.

Casum specialem primo consideremus eum, in quo $a = 0$ est. Formulae generales articuli praecedentis nunc migrant in

$$1. \quad \begin{cases} \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \frac{1}{2} u)} = \dfrac{\sqrt{(2k'^2+2 \operatorname{dn} u-2k^2 \operatorname{cn} u)}}{1+\operatorname{dn} u} \\ = \dfrac{\sqrt{((1-k)(\operatorname{dn} u+k \operatorname{cn} u))} + \sqrt{((1+k)(\operatorname{dn} u-k \operatorname{cn} u))}}{1+\operatorname{dn} u}, \\ \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2} u)} = \dfrac{\sqrt{(2k'^2+2 \operatorname{dn} u+2k^2 \operatorname{cn} u)}}{1+\operatorname{dn} u} \\ = \dfrac{\sqrt{((1+k)(\operatorname{dn} u+k \operatorname{cn} u))} + \sqrt{((1-k)(\operatorname{dn} u-k \operatorname{cn} u))}}{1+\operatorname{dn} u} \end{cases}$$

et

$$2. \quad \begin{cases} \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \frac{1}{2} u)} = \dfrac{\sqrt{((1+k')(\operatorname{dn} u+k'))} - \sqrt{((1-k')(\operatorname{dn} u-k'))}}{1+\operatorname{dn} u}, \\ \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{1}{2} u)} = \dfrac{\sqrt{((1+k')(\operatorname{dn} u+k'))} + \sqrt{((1-k')(\operatorname{dn} u-k'))}}{1+\operatorname{dn} u}, \end{cases}$$

qua in occasione memineris radicalia in sinistra aequationum harum parte esse ea, ut valeat formula

$$\sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \tfrac{1}{2} u)} = \frac{k'}{\operatorname{dn}^2 \frac{1}{2} u} \cdot \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} u)}$$

composita e formulis

$$\sqrt{(1-k \operatorname{snc}^2 \tfrac{1}{2} u)} = \frac{\sqrt{(1+k)}}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} u} \cdot \sqrt{(1-k \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} u)} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{(1-k \operatorname{snc}^2 \tfrac{1}{2} u)} = \frac{\sqrt{(1-k)}}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} u} \cdot \sqrt{(1+k \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} u)}.$$

Si aequationes (2.) transformas ponendo

$$\sqrt{(\mathrm{dn}\,u + k')} = \sqrt{2}.\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)},$$
$$\sqrt{(\mathrm{dn}\,u - k')} = \sqrt{2}.\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)},$$
$$1 + \mathrm{dn}\,u = 2\,\mathrm{dn}^2 v = 2\,\mathrm{dn}'^2 w,$$

obtinebis

$$\sqrt{(1 - k^2 \mathrm{snc}^4 \tfrac{1}{2}u)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+k')}\cdot\frac{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)}}{\mathrm{dn}^2 v} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k')}\cdot\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)}}{\mathrm{dn}'^2 w},$$

$$\sqrt{(1 - k^2\ \mathrm{sn}^4 \tfrac{1}{2}u)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+k')}\cdot\frac{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)}}{\mathrm{dn}^2 v} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k')}\cdot\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)}}{\mathrm{dn}'^2 w},$$

quae multiplicatae aequatione $\partial u = \dfrac{\partial v}{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \mathrm{sn}^2 v)}} = \dfrac{\partial w}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \mathrm{sn}'^2 w)}}$ praebent

$$\partial u \sqrt{(1 - k^2 \mathrm{snc}^4 \tfrac{1}{2}u)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+k')}\cdot\frac{\partial v}{\mathrm{dn}^2 v} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k')}\cdot\frac{\partial w}{\mathrm{dn}'^2 w} = \frac{\lambda'\partial v}{\mathrm{dn}^2 v} - \frac{\lambda \partial w}{\mathrm{dn}'^2 w} \text{ et}$$

$$\partial u \sqrt{(1 - k^2\ \mathrm{sn}^4 \tfrac{1}{2}u)} = \frac{\lambda'\partial v}{\mathrm{dn}^2 v} + \frac{\lambda \partial w}{\mathrm{dn}'^2 w}.$$

Quia vero adhibito modulo λ, si quadrantem ellipticum eiusdem moduli signo E indicas, ideoque eum coniugati moduli λ' signo E', valet notissima formula

$$\int_0 \frac{\lambda'^2 . \partial v}{\mathrm{dn}^2 v} = E - \mathrm{elc}\, v = \mathrm{el}\, v - \lambda^2 \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{snc}\, v, \text{ ideoque}$$

$$\int_0 \frac{\lambda^2 . \partial w}{\mathrm{dn}'^2 w} = E' - \mathrm{elc}\, w = \mathrm{el}'\, w - \lambda'^2 \mathrm{sn}'\, w\, \mathrm{snc}'\, w,$$

si functiones $\mathrm{el}\, v$ et $\mathrm{elc}\, v$ ad modulum λ, $\mathrm{el}'\, w$ et $\mathrm{elc}'\, w$ vero ad modulum λ' referimus, integrationes in promtu sunt, et pervenis ad formulas

$$\int_0 \partial u . \sqrt{(1 - k^2 \mathrm{snc}^4 \tfrac{1}{2}u)} = \frac{E - \mathrm{elc}\, v}{\lambda'} - \frac{E' - \mathrm{elc}'\, w}{\lambda},$$

$$\int_0 \partial u . \sqrt{(1 - k^2 \mathrm{sn}^4 \tfrac{1}{2}u)} = \frac{E - \mathrm{elc}\, v}{\lambda'} + \frac{E - \mathrm{elc}'\, w}{\lambda},$$

in quibus quantitas constans addenda est nulla, cum posito $u = v = w = 0$, aequationum dexterae partes iam nunc evanescant. Si aequationes has multiplicas factore $\frac{1}{2}k = \lambda\lambda'$, ipsae mutantur in

$$3. \quad \begin{cases} \int_0 \frac{1}{2} k\, \partial u . \sqrt{(1 - k^2 \mathrm{snc}^4 \frac{1}{2}u)} = \lambda(E - \mathrm{elc}\, v) - \lambda'(E' - \mathrm{clc}'\, w), \\ \int_0 \frac{1}{2} k\, \partial u . \sqrt{(1 - k^2 \mathrm{sn}^4 \frac{1}{2}u)} = \lambda(E - \mathrm{elc}\, v) + \lambda'(E' - \mathrm{elc}'\, w). \end{cases}$$

Si vero substituis

$$E - \mathrm{elc}\, v = \mathrm{el}\, v - \lambda^2 \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{snc}\, v \quad \text{et} \quad E' - \mathrm{elc}'\, w = \mathrm{el}'\, w - \lambda'^2 \mathrm{sn}'\, w\, \mathrm{snc}'\, w,$$

oriuntur primo:

$\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$ *et* $\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$. 57

$$\int_0 \tfrac{1}{2} k \partial u . \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \tfrac{1}{2} u)} = \lambda . \operatorname{el} v - \lambda' . \operatorname{el}' w + \lambda'^3 \operatorname{sn}' w \operatorname{snc}' w - \lambda^3 \operatorname{sn} v \operatorname{snc} v ,$$

$$\int_0 \tfrac{1}{2} k \partial u . \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} u)} = \lambda . \operatorname{el} v + \lambda' . \operatorname{el}' w - (\lambda'^3 \operatorname{sn}' w \operatorname{snc}' w + \lambda^3 \operatorname{sn} v \operatorname{snc} v).$$

Quia vero invenis

$$\lambda'^3 \operatorname{sn}' w \operatorname{snc}' w - \lambda^3 \operatorname{sn} v \operatorname{snc} v = \tfrac{1}{2} k \operatorname{sn} u \cdot \frac{\sqrt{((1+k')(\operatorname{dn} u + k'))} - \sqrt{((1-k')(\operatorname{dn} u - k'))}}{1 + \operatorname{dn} u} \quad \text{et}$$

$$\lambda'^3 \operatorname{sn}' w \operatorname{snc}' w + \lambda^3 \operatorname{sn} v \operatorname{snc} v = \tfrac{1}{2} k \operatorname{sn} u \cdot \frac{\sqrt{((1+k')(\operatorname{dn} u + k'))} + \sqrt{((1-k')(\operatorname{dn} u - k'))}}{1 + \operatorname{dn} u} ,$$

ob formulas (2.) est

$$\lambda'^3 \operatorname{sn}' w \operatorname{snc}' w - \lambda^3 \operatorname{sn} v \operatorname{snc} v = \tfrac{1}{2} k \operatorname{sn} u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \tfrac{1}{2} u)} \quad \text{et}$$

$$\lambda'^3 \operatorname{sn}' w \operatorname{snc}' w + \lambda^3 \operatorname{sn} v \operatorname{snc} v = \tfrac{1}{2} k \operatorname{sn} u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} u)},$$

ita ut sint

4.
$$\begin{cases} \int_0 \tfrac{1}{2} k \partial u . \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \tfrac{1}{2} u)} = \lambda . \operatorname{el} v - \lambda' . \operatorname{el}' w + \tfrac{1}{2} k \operatorname{sn} u . \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^4 \tfrac{1}{2} u)}, \\ \int_0 \tfrac{1}{2} k \partial u . \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} u)} = \lambda . \operatorname{el} v + \lambda' . \operatorname{el}' w - \tfrac{1}{2} k \operatorname{sn} u . \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} u)}. \end{cases}$$

5.

Dum ad formulas (5.) articuli (3.) revertimur, praeter argumenta v et w eligimus argumenta p et q eiusmodi, ut ipsorum complementa $L - p$ et $L' - q$ pari modo pendeant ab argumento a, quo v et v' pendent ab argumento u. His positis est

$$\operatorname{dn} a + k' = 2\lambda' \operatorname{cnc}' q \quad \text{et} \quad \operatorname{dn} a - k' = 2\lambda \operatorname{cnc} p ,$$

$$\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u = 2 - 2\lambda'^2 \operatorname{snc}'^2 q - 2\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v = 2(\operatorname{dnc}'^2 q - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)$$
$$= 2 \operatorname{dnc}'^2 q (1 - \operatorname{dn}'^2 q . \operatorname{sn}^2 v) \quad \text{et}$$

$$\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u = 2 - 2\lambda^2 \operatorname{snc}^2 p - 2\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w = 2(\operatorname{dnc}^2 p - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)$$
$$= 2 \operatorname{dnc}^2 p (1 - \operatorname{dn}^2 p . \operatorname{sn}'^2 w),$$

$$\operatorname{dn} u + k' = 2(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v); \qquad \operatorname{dn} u - k' = 2(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w);$$

quare nunc valent formulae

$$\sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \tfrac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{\lambda' \operatorname{cnc}' q \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}}{\operatorname{dnc}'^2 q (1 - \operatorname{dn}'^2 q . \operatorname{sn}^2 v)} - \frac{\lambda \operatorname{cnc} p \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}}{\operatorname{dnc}^2 p (1 - \operatorname{dn}^2 p . \operatorname{sn}'^2 w)},$$

$$\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{\lambda' \operatorname{cnc}' q \sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}}{\operatorname{dnc}'^2 q (1 - \operatorname{dn}'^2 q . \operatorname{sn}^2 v)} + \frac{\lambda \operatorname{cnc} p \sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}}{\operatorname{dnc}^2 p (1 - \operatorname{dn}^2 p . \operatorname{sn}'^2 w)},$$

qua, quia $\frac{\operatorname{cnc}' q}{\operatorname{dnc}' q} = \operatorname{sn}' q$ et $\frac{\operatorname{cnc} p}{\operatorname{dnc} p} = \operatorname{sn} p$ et multiplicatae aequatione

$$\partial u = \frac{\partial v}{\sqrt{(\lambda'^2 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}} = \frac{\partial w}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 w)}}$$

fiunt

$$\partial u.\sqrt{(1-k^2\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{\lambda'\operatorname{sn}'q.\partial v}{\operatorname{dnc}'q(1-\operatorname{dn}'^2q\operatorname{sn}^2v)} - \frac{\lambda\operatorname{sn}p.\partial w}{\operatorname{dnc}'p(1-\operatorname{dn}^2p.\operatorname{sn}'^2w)}$$

et

$$\partial u.\sqrt{(1-k^2\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{\lambda'\operatorname{sn}'q.\partial v}{\operatorname{dnc}'q(1-\operatorname{dn}'^2q.\operatorname{sn}^2v)} + \frac{\lambda\operatorname{sn}p.\partial w}{\operatorname{dnc}p(1-\operatorname{dn}^2p.\operatorname{sn}'^2w)},$$

quae denuo multiplicatae factore

$$\tfrac{1}{2}k\operatorname{sn}a = \lambda'\operatorname{snc}'q\operatorname{dnc}'q = \lambda\operatorname{snc}p.\operatorname{dnc}p$$

abeunt in

$$\int_0 \tfrac{1}{2}k\partial u.\sqrt{(1-k^2\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{snc}\tfrac{1}{2}(a-u))}$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sn}a}\cdot\Big[\int_0 \frac{\lambda'^2\operatorname{sn}'q\operatorname{snc}'q.\partial v}{1-\operatorname{dn}'^2q.\operatorname{sn}^2v} - \int_0 \frac{\lambda^2\operatorname{sn}p\operatorname{snc}p.\partial w}{1-\operatorname{dn}^2p.\operatorname{sn}'^2w}\Big],$$

$$\int_0 \tfrac{1}{2}k\partial u.\sqrt{(1-k^2\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a-u))}$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sn}a}\cdot\Big[\int_0 \frac{\lambda'^2\operatorname{sn}'q\operatorname{snc}'q.\partial v}{1-\operatorname{dn}'^2q.\operatorname{sn}^2v} + \int_0 \frac{\lambda^2\operatorname{sn}p\operatorname{snc}p.\partial w}{1-\operatorname{dn}^2p.\operatorname{sn}'^2w}\Big],$$

sive adiumento formularum (1.) in §. 119. theoriae functionum modularium etc. in

$$\int_0 \tfrac{1}{2}k\partial u.\sqrt{(1-k^2\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{'C(v,q)-'C'(w,p)}{\operatorname{sn}a},$$

$$\int_0 \tfrac{1}{2}k\partial u.\sqrt{(1-k^2\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a-u))} = \frac{'C(v,q)+'C'(w,p)}{\operatorname{sn}a},$$

in quibus parametri integralium p et q sunt ii, ut ipsorum complementa $L-p$ et $L'-q$ pari modo pendeant ab argumento a, quo v et w pendent ab argumento u. Addimus, radicalia in sinistra aequationum parte esse ea, ut sit

$$\sqrt{(1-k^2\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{snc}^2\tfrac{1}{2}(a-u))}$$
$$= \frac{k'}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}(a+u).\operatorname{dn}\frac{1}{2}(a-u)}\cdot\sqrt{(1-k^2\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a+u)\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(a-u))}.$$

Proposita integralia iam redacta sunt ad integralia duo $'C(v,q)$ et $'C'(w,p)$, quae ad modulos coniugatos λ et λ' sunt referenda, et quorum calculus in promtu est.

6.

Ea quae modo sunt eruta, ad maximam partem pendebant a formulis, quae argumenti bipartitionem exprimunt. Cum nuperrime Ill. ***Jacobi*** formulis his addidit hanc

$$\sqrt{k'}.\operatorname{tn}u = \sqrt{[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2u.\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}2u)]}$$

ad calculum numericum aptissimam, hic etiam formulas aliquas fortasse non minore attentione dignas cum Analystis communicabo, quae in calculo analytico

$\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{snc}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$ et $\int_0 \partial u \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a+u) \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}(a-u))}$.

prosunt, scilicet formulas has:

$$\operatorname{cn} 2u + \operatorname{cn} 2a = \frac{2 \operatorname{dn}^2 a (\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{cn} 2u - \operatorname{cn} 2a = \frac{2 \operatorname{dn}^2 a (\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{dn} 2u + \operatorname{dn} 2a = \frac{2 \operatorname{dn}^2 a (1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{dn} 2u - \operatorname{dn} 2a = \frac{2 k^2 \operatorname{dn}^2 a (\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{cn} 2u \operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a \operatorname{dn} 2u = \frac{2 k'^2 (\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{cn} 2u \operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a \operatorname{dn} 2u = \frac{2 \operatorname{dn}^4 a (\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{sn} 2a + \operatorname{sn} 2u = \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)}$$

$$= \frac{2 (\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{cu} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{sn} 2a - \operatorname{sn} 2u = \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)}$$

$$= \frac{2 (\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{cn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{sn} 2a \operatorname{cn} 2u + \operatorname{sn} 2u \operatorname{cn} 2a = \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$= \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u - k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{sn} 2a \operatorname{cn} 2u - \operatorname{sn} 2u \operatorname{cn} 2a = \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$= \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u + k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{sn} 2a \operatorname{dn} 2u + \operatorname{sn} 2u \operatorname{dn} 2a = \frac{2 (\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{cn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$= \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u + k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{sn} 2a \operatorname{dn} 2u - \operatorname{sn} 2u \operatorname{dn} 2a = \frac{2 (\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{cn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$= \frac{2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u - k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

$$\operatorname{tn} 2a + \operatorname{tn} 2u = \frac{2(1 - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)}{\operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 u (1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 a)(1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 u)}$$

$$= \frac{2(\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u - k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} u)(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} a)}{\operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 u (1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 a)(1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 u)},$$

$$\operatorname{tn} 2a - \operatorname{tn} 2u = \frac{2(1 + \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)}{\operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 u (1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 a)(1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 u)}$$

$$= \frac{2(\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u + k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} u)(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} u - \operatorname{tn} u \operatorname{dn} a)}{\operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 u (1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 a)(1 - k'^2 \operatorname{tn}^4 u)}.$$

Addimus has e praecedentibus compositas:

$$\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right) + \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right) + \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}\right),$$

$$\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} 2u}{\operatorname{tn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right) - \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} 2u}{\operatorname{tn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cnc} a} \cdot \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right) - \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} a}{\operatorname{cn} a} \cdot \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right),$$

$$\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}\right) - \operatorname{Arc\,Tang}\left(k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right),$$

$$\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cnc} a} \cdot \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right) + \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} a}{\operatorname{cn} a} \cdot \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right).$$

Si in his modulos k et k' permutas, ui loco u ponens, aut manente modulo k ponis ai pro a, formulas acquiris, quae ad arcus cyclicos pertinent, et in quibus functiones modulares argumentorum u et $2u$ ad modulum k, functiones vero argumentorum a et $2a$ ad modulum coniugatum k' referenda sunt.

E formulis modo inventis aut addendo aut subtrahendo invenis alias, quae quasi inversae sunt spectandae, et quas ad lectoris usum commodum hic colligimus, quum non omnes in functionum modularium theoria a me edita inveniantur erutae:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) + \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} 2u}{\operatorname{tn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) - \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} 2u}{\operatorname{tn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) + \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}\right),$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) - \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}(k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u),$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right) + \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} 2u}{\operatorname{tn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cnc} a} \cdot \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right),$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right) - \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} 2u}{\operatorname{tn} 2a}\right) = \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} a}{\operatorname{cn} a} \cdot \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}\right).$$

Scriptum Monast. Guestph. d. 19 Martii 1845.

8.

Ableitung einiger bestimmten Integrale aus den Formeln der Abhandlung No. 18. im 37ten Bande dieses Journals.

(Von Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.)

I.

Nach der genannten Abhandlung ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin p \sqrt{(a^4\cos^2 p + b^4 \sin^2 p \cos^2 q + c^4 \sin^2 p \sin^2 q}\,.\,dp\,dq$$
$$= \frac{\pi a^2 b^2}{4c^2} + \frac{\pi c^4}{4\sqrt{(c^4-a^4)}}[\cos^2\mu\, F(k,\mu) + \sin^2\mu\, E(k,\mu)],$$

wenn

$$\cos\mu = \frac{a^2}{c^2}, \quad k^2 = \frac{c^4-b^4}{c^4-a^4}, \quad c > b > a, \quad F(k,\mu) = \int_0^{\mu} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

$$E(k,\mu) = \int_0^{\mu} d\varphi \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)};$$

und es drückt dieses bestimmte Integral den 8ten Theil der ganzen krummen Fläche aus, deren Gleichung

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

ist Nun ist diese Oberfläche auch im Allgemeinen:

$$\iint dx\,dy \sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

und aus der obigen Gleichung findet man

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - x^2 - y^2 + \sqrt{((a^2-c^2)x^2 + (b^2-c^2)y^2 + \tfrac{1}{4}c^4)})}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x[a^2-c^2-2\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}]}{2\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}\times\sqrt{(\frac{1}{2}c^2-x^2-y^2+\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)})}},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y[b^2-c^2-2\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}]}{2\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}\times\sqrt{(\frac{1}{2}c^2-x^2-y^2+\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)})}}.$$

Führt man diese Werthe ein, so erhält man für den Inhalt der Oberfläche folgende Formel:

$$\iint \sqrt{\frac{(a^4-c^4)x^2+(b^4-c^4)y^2+\frac{1}{2}c^6+c^4\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}}{4[(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4][\frac{1}{2}c^2-x^2-y^2+\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}]}}\,dx\,dy.$$

Dehnt man die Integration auf alle die positiven Werthe von x und y aus, für welche die Gröfse unter den Integralzeichen reell ist, so ist das Integral gleich dem 8ten Theile der Oberfläche. Unter diesen Bedingungen ist also das vorstehende Integral:

$$1.\quad \iint \sqrt{\frac{(a^4-c^4)x^2+(b^4-c^4)y^2+\frac{1}{2}c^6+c^4\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}}{[(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4][\frac{1}{2}c^2-x^2-y^2+\sqrt{((a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+\frac{1}{4}c^4)}]}}\,dx\,dy$$
$$= \pi\left[\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{c^4}{\sqrt{(c^4-a^4)}}(\cos^2\mu\, F(k,\mu)+\sin^2\mu\, E(k,\mu))\right],$$

wenn k, μ die oben angegebene Bedeutung haben.

Setzt man hier $a=b$, so ergiebt sich:

$$2.\quad \iint \sqrt{\frac{(a^4-c^4)(x^2+y^2)+\frac{1}{2}c^6+c^4\sqrt{((a^2-c^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{4}c^4)}}{[(a^2-c^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{4}c^4][\frac{1}{2}c^2-x^2-y^2+\sqrt{((a^2-c^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{4}c^4)}]}}\,dx\,dy$$
$$= \pi\left[c^2+\frac{a^4}{c^2\varepsilon}\log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right],$$

wenn $\varepsilon=\frac{\sqrt{(c^4-a^4)}}{c^2}$ ist. Setzt man dagegen $b=c$, so erhält man

$$3.\quad \iint \sqrt{\frac{(a^4-c^4)x^2+\frac{1}{2}c^6+c^4\sqrt{((a^2-c^2)x^2+\frac{1}{4}c^4)}}{[(a^2-c^2)x^2+\frac{1}{4}c^4][\frac{1}{2}c^2-x^2-y^2+\sqrt{((a^2-c^2)x^2+\frac{1}{4}c^4]}}}\,dx\,dy$$
$$= \pi\left[a^2+\frac{c^2}{\varepsilon}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{c^2\varepsilon}{a^2}\right)\right].$$

Wird endlich $a=b=c$ genommen, so folgt

$$4.\quad \iint \sqrt{\left(\frac{c^2}{c^2-x^2-y^2}\right)}dx\,dy = \tfrac{1}{2}\pi c^2;$$

welches eine bekannte Formel ist. Die Grenzen für das Integral in (4.) sind die durch

$$x^2+y^2 \leqq c^2$$

gegebenen. (Siehe *Moigno* Integralrechnung, deutsch von Dr. *Schnuse* S. 206 ff.)

II.

Wir wollen nun die elliptischen Coordinaten r, μ, ν einführen, die mit den frühern x, y, z durch die Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2 = r^2,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-\alpha^2}+\frac{z^2}{\mu^2-\alpha^2} = 0,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-\alpha^2}+\frac{z^2}{\nu^2-\alpha^2} = 0$$

verbunden sind, wo $\beta>\alpha$, $\mu \gtrless \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$, $\nu<\alpha<\beta$, β und α aber sonst willkür-

lich sind. Hieraus ergiebt sich (S. ***Moigno*** S. 161):

$$x = \frac{r\mu\nu}{\alpha\beta},$$

$$y = \frac{r\sqrt{(\mu^2-\alpha^2)}\sqrt{(\alpha^2-\nu^2)}}{\alpha\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}},$$

$$z = \frac{r\sqrt{(\beta^2-\mu^2)}\sqrt{(\beta^2-\nu^2)}}{\beta\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}},$$

also in Folge der Gleichung in (§. 3.) der zu Anfang erwähnten Abhandlung:

$$\left[\frac{\mu^2\nu^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)}{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}\right]r^2$$
$$= \frac{a^2\mu^2\nu^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{b^2(\mu^2-\alpha^2)(a^2-\nu^2)}{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{c^2(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{\beta^2(\beta^2-\alpha^2)};$$

welche Gleichung sich auf folgende reducirt:

$$r^2 = \frac{((a^2-b^2)\beta^2+(c^2-a^2)\alpha^2)\mu^2\nu^2}{\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{b^2-c^2}{\beta^2-\alpha^2}(\mu^2+\nu^2)+\frac{\beta^2c^2-\alpha^2b^2}{\beta^2-\alpha^2}$$
$$= \frac{a^2\mu^2\nu^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{b^2(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)}{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{c^2(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}.$$

Nun ist die Formel für den Flächen-Inhalt der krummen Oberfläche (***Moigno*** S. 183):

$$\iint\sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)\left[(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)\left(\frac{dr}{d\mu}\right)^2r^2+(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)\left(\frac{dr}{d\nu}\right)^2r^2+(\mu^2-\nu^2)r^4\right]}{(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}}\,d\mu\,d\nu.$$

Dehnt man daher die Integration auf alle Werthe von ν, von 0 bis α, und auf alle Werthe von μ, von α bis β aus, so erhält man den 8ten Theil der ganzen Oberfläche.

Es findet sich aber:

$$\frac{rdr}{d\mu} = \frac{(a^2-b^2)\beta^2+(c^2-a^2)\alpha^2}{\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}\mu\nu^2+\frac{b^2-c^2}{\beta^2-\alpha^2}\mu,$$

$$\frac{rdr}{d\nu} = \frac{(a^2-b^2)\beta^2+(c^2-a^2)\nu^2}{\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}\mu^2\nu+\frac{b^2-c^2}{\beta^2-\alpha^2}\nu.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird die Gröfse unter dem Integralzeichen:

$$(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{\frac{a^4\mu^2\nu^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{b^4(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)}{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{c^4(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}}{(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}\right)}$$
$$= (\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{a^4(\beta^2-\alpha^2)\mu^2\nu^2+b^4\beta^2(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)+c^4\alpha^2(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2)(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}\right)}.$$

Beachtet man die in (§. 5.) der Eingangs erwähnten Abhandlung gegebene Formel, so erhält man endlich:

$$5.\quad \int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{a^4(\beta^2-\alpha^2)\mu^2.\nu^2+b^4\beta^2(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)+c^4\alpha^2(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}\right)}d\mu\,d\nu$$

$$\tfrac{1}{4}\pi\alpha\beta\left[\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{c^4}{\sqrt{(c^4-a^4)}}\{\cos^2\mu\,F(k,\mu)+\sin^2\mu\,E(k,\mu)\}\right]\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}.$$

Für $a=b=c$ ist also

$$\int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(\mu^2-\nu^2)(a^2\alpha\beta\,d\mu\,d\nu\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}}{\sqrt{(\mu^2-\alpha^2)}\sqrt{(\alpha^2-\nu^2)}\sqrt{(\beta^2-\mu^2)}\sqrt{(\beta^2-\nu^2)}}=\tfrac{1}{4}\pi.\alpha\beta\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}[a^2+c^2],$$

folglich

$$6.\quad \int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-\alpha^2)}\sqrt{(\alpha^2-\nu^2)}\sqrt{(\beta^2-\mu^2)}\sqrt{(\beta^2-\nu^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi;$$

welches die bekannte Formel von *Lamé* ist. (S. *Moigno* Integralrechnung S. 184.) Setzt man dagegen blofs $b=a$, so ergiebt sich:

$$7.\quad \int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{a^4[\mu^2(\beta^2-\nu^2)+\beta^2(\nu^2-\alpha^2)]+c^4(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}{(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}\right)}d\mu\,d\nu$$

$$=\tfrac{1}{8}\pi\left[2c^2+\frac{a^4}{c^2\varepsilon}\log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]\beta\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}.$$

Setzt man endlich $b=c$, so ergiebt sich

$$8.\quad \int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{(a^4-c^4)\mu^2\nu^2+\alpha^2\beta^2c^4}{(\mu^2-\alpha^2)(\beta^2-\mu^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}\right)}d\mu\,d\nu;$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\left[a^2+\frac{c^2}{\varepsilon}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{c^2\varepsilon}{a^2}\right)\right]\alpha\beta;$$

in welchen Formeln ε, k, μ die schon oben angeführte Bedeutung haben. Die Formel (8.) kann auch so dargestellt werden:

$$\int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{(a^4-c^4)\frac{\mu^2\nu^2}{\alpha^2\beta^2}+c^4}{\left(\frac{\mu^2}{\alpha^2}-1\right)\left(1-\frac{\mu^2}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)}\right)}d\mu\,d\nu$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\left[a^2+\frac{c^2}{\varepsilon}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{c^2\varepsilon}{a^2}\right)\right].$$

III.

Der Cubik-Inhalt wird in elliptischen Coordinaten ausgedrückt durch (S. *Moigno* Integralrechnung S. 183):

$$\tfrac{1}{3}\iiint\frac{(\mu^2-\nu^2)r^3\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}}$$

$$=\tfrac{1}{3}\iint(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu\sqrt{\frac{[a^2(\beta^2-\alpha^2)\mu^2\nu^2+b^2\beta^2(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)+c^2\alpha^2(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)]^3}{\alpha^6\beta^6(\beta^2-\alpha^2)^3(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}}.$$

Dehnt man das Integral auf alle Werthe der Veränderlichen μ von α bis β und des ν von 0 bis α aus und beachtet zugleich die Formel in §. 11. der zu Anfang erwähnten Abhandlung, so erhält man:

$$9.\quad \int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu\sqrt{\frac{[a^2(\beta^2-\alpha^2)\mu^2\nu^2+b^2\beta^2(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)+c^2\alpha^2(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)]^3}{(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}}$$

$$= \tfrac{1}{16}\pi\alpha^3\beta^3\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)^3}\left[abc\left(\frac{c^2+2(a^2+b^2)}{c^2}\right)+\frac{2KE(k,\mu)}{c\sin\mu}+\frac{K_1F(k,\mu)}{c\sin\mu}\right];$$

wo K und K_1 die in der angeführten Abhandlung angegebenen Werthe haben.

Für $a=b=c$ erhält man wieder die *Lamé*sche Formel (6.). Für $b=c$ dagegen findet sich

$$10.\quad \int_0^{\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\left(\frac{\left(1+\frac{(a^2-c^2)\mu^2\nu^2}{c^2\alpha^2\beta^2}\right)^3}{(\mu^2-\alpha^2)(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\mu^2)(\beta^2-\nu^2)}\right)}\,d\mu\,d\nu$$

$$= \tfrac{1}{16}\pi\left[2\cos^3\varrho+3\cos\varrho+\frac{3\varrho}{\sin\varrho}\right],$$

wenn $\cos\varrho=\frac{a}{c}$ ist.

Dies sind einige der Formeln, die sich aus der interessanten Abhandlung des Herrn Prof. *Tortolini* ableiten lassen; auch andere könnten leicht noch gefunden werden. Man sieht also, dafs die *Lamé*sche Formel nur ein besonderer Fall der Formeln (5. und 9.) ist; wie denn auch in *Moigno's* Integralrechnung S. 184 schon die allgemeinste Form angegeben ist, welche sich in einem besondern Falle auf die *Lamé*sche Formel reducirt. Andere Formeln würde man erhalten, wenn man die in *Moigno's* Integralrechnung S. 156 angegebenen elliptischen Coordinaten einführte, deren Ableitung wir aber hier übergehen, da sie der obigen durchaus ähnlich ist und leicht vermittels der in *Moigno's* Integralrechnung, Vorlesung 17, 18 und 19, gegebenen Formeln ausgeführt werden kann.

Sinsheim, im Juni 1846.

9.

Einiges zur Zahlenlehre.

(Von dem Herrn Dr. *Dienger* in Sinsheim bei Heidelberg.)

Im Folgenden sollen ein Paar Fragen aus der Zahlenlehre erörtert werden, um die Regeln festzustellen, nach welchen sich bestimmen läfst, wie viele Stellen sich wiederholen, wenn man einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt. Diese Verwandlung geschieht durch das im folgenden Beispiele ausgedrückte Schema, wo $\frac{10}{11}$ verwandelt ist:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 10 \;|0{,}909\ldots \\ \hline & 100 \\ & 99 \\ \hline & 100 \\ & 99 \\ \hline & 1\ldots \end{array}$$

Hier ist klar, dafs alle die Brüche, deren Nenner nicht die Factoren (Stammfactoren, wie der Herr Herausgeber in der encykl. Darstellung der Theorie der Zahlen §. 12. sie nennt) 2 und 5 allein enthält (welches die einzigen Stammfactoren von 10 und seiner Potenzen sind) nicht genau in Decimalbrüche sich verwandeln lassen. Dabei weifs man, dafs die sich ins Unendliche erstreckenden Decimalbrüche periodisch sind; und zwar entweder solche, deren erste Decimalstelle sich wiederholt, oder solche, in denen sie sich nicht wiederholt. Das Folgende ist ein Versuch, allgemein die Regeln zu finden, nach welchen im Voraus anzugeben sei, wie viele Stellen sich wiederholen und wie viele sich nicht wiederholen.

I.

Wenn b eine Zahl ist, die sowohl zu a als zu c theilerfremd (Theorie der Zahlen §. 12.) ist, so findet man die Reste, welche $a, ac, ac^2, ac^3, ac^4, \ldots$ durch b getheilt lassen, auf folgende Weise. Man theile a durch b, so erhält man den ersten Rest. Multiplicirt man diesen ersten Rest mit c und theilt wieder durch b, so erhält man den zweiten Rest; aus diesem findet sich auf gleiche Weise der dritte Rest u. s. f. Und umgekehrt: wenn man a durch b theilt,

so bleibt ein bestimmter Rest; multiplicirt man denselben mit c und theilt das Product durch b, so bleibt wieder ein bestimmter Rest; verfährt man mit diesem eben so, so erhält man einen dritten Rest; aus diesem einen vierten u. s. f. Diese Reste sind nun dieselben, wie die, welche man erhält, wenn man a, ac, ac^2, ac^3, ... durch b theilt. Denn es sei

$$\begin{aligned} a &= n_0 b + r_0, \\ ac &= n_1 b + r_1, \\ ac^2 &= n_2 b + r_2, \\ &\cdots\cdots \\ ac^h &= n_h b + r_h, \end{aligned}$$

so ist der Rest von a gleich r_0, der von ac gleich r_1, ..., der von ac^h gleich r_h u. s. f. Da nun

$$\begin{aligned} ac^{h-1} &= n_{h-1} b + r_{h-1}, \\ ac^h &= n_h b + r_h, \end{aligned}$$

so ist auch

$$\begin{aligned} ac^h &= c(n_{h-1} b + r_{h-1}) = n_{h-1} cb + cr_{h-1}, \\ \frac{ac^h}{b} &= n_{h-1} c + \frac{cr_{h-1}}{b} = n_h + \frac{r_h}{b}, \end{aligned}$$

und es ist also der Rest, der bleibt, wenn man ac^h durch b theilt, der nemliche, welcher bleibt, wenn man cr_{h-1} durch b theilt; was den ersten Theil des Satzes beweiset.

Ist umgekehrt

$$\begin{aligned} a &= n_0' b + r_0', \\ cr_0' &= n_1' b + r_1', \\ cr_1' &= n_2' b + r_2', \\ &\cdots\cdots \\ cr_{h-1}' &= n_h' b + r_h', \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

so ist offenbar

$$n_0' = n_0, \quad r_0' = r_0 \quad \text{und} \quad ac = n_0' bc + cr_0';$$

d. h., der Rest, den $\frac{ac}{b}$ läfst, ist gleich dem von $\frac{cr_0'}{b}$, also $r_1' = r_1$, folglich auch

$$\begin{aligned} ac &= (n_0' c + n_1')\ b + r_1 = (n_0' c + n_1') b + r_1', \\ ac^2 &= (n_0' c + n_1') bc + cr_1'; \end{aligned}$$

mithin ist der Rest von $\frac{ac^2}{b}$ derselbe, wie der von $\frac{cr_1'}{b}$, d. h. $r_2' = r_2$ u. s. f.; was den zweiten Theil des Satzes beweiset.

II.

Da die Zahl b nicht mehr als $b-1$ verschiedene Reste lassen kann, so können die Zahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots$ nicht immer verschieden sein; sobald aber einer von diesen Resten wiederkehrt, müssen sich alle folgenden wiederholen. Gesetzt, es sei r_s der erste sich wiederholende Rest, und er sei dem Reste r_k gleich, so wird $s \gtreqless b-1$ sein. Also ist, da

$$ac^s = n_s b + r_s,$$
$$ac^k = n_k b + r_k$$

und offenbar $n_0 > n_k$ (da $s > k$) auch

$$a(c^s - c^k) = ac^k(c^{s-k}-1) = (n_s - n_k)b;$$

d. h. es ist $c^{s-k}-1$ durch b theilbar (Theorie der Zahlen §. 25, 20.). Demnach kann man setzen (Th. d. Z. §. 10.):

$$c^{s-k} = \mathfrak{G}b + 1.$$

Findet umgehrt diese Gleichung Statt, so läfst sich $c^{s-k}-1$ und demnach auch $ac^k(c^{s-k}-1) = a(c^s - c^k)$ durch b theilen; d. h. wenn ac^k den Rest r_k läfst, so läfst ac^s den nemlichen Rest. Setzt man $k=0$, so müfste also der Rest r_s gleich dem r_0 sein, wenn

$$c^s = \mathfrak{G}b + 1$$

sein könnte. Nun weifs man (Theorie der Zahlen §. 87.), dafs dies der Fall ist, wenn s die Anzahl aller der Zahlen bezeichnet, die kleiner als b und zu b theilerfremd sind. Diese Anzahl ist aber nicht $> b-1$; höchstens ist $s = b-1$. Es giebt demnach einen Werth von $s \gtreqless b-1$, für welchen

$$c^s = \mathfrak{G}b + 1 \text{ oder}$$
$$c^s - 1 = \mathfrak{G}b$$

ist. Der zu ac^s gehörige Rest ist dann offenbar r_0. Es folgt also, dafs unter den obigen Voraussetzungen der erste Rest r_0 sich *jedenfalls* wiederholt; und zwar höchstens ist er in der Reihe der Reste, bei seiner ersten Wiederholung der $b$te. Ist $a < b$, so ist $r_0 = a$ und es wiederholt sich also die Zahl a *jedenfalls*.

Um zu finden, *wann* der erste Rest sich wiederhole, mufs man den kleinsten Werth von s suchen, für welchen

$$c^s = \mathfrak{G}b + 1$$

ist. Alsdann ist $r_s = r_0$; und von da an wiederholen sich alle frühern Reste. Die Aufgabe ist also auf die zurückgeführt: die *kleinste* Zahl s zu finden, für welche dafs c^s-1 durch b genau theilbar sei.

III.

Es sei $c = 10$, $a < b$, so kommt die Aufgabe auf die zurück: zu finden, wie viele (sich wiederholende) Stellen der aus $\frac{a}{b}$ entstehende Decimalbruch habe. Nun ist $10^s - 1$ eine Zahl mit lauter 9, und zwar mit s solcher Ziffern. Um demnach zu finden, wie viele Stellen, die sich wiederholen, der aus $\frac{a}{b}$ entstehende Decimalbruch enthalte, untersuche man, ob b in 9, oder in 99, in 999 u. s. f. enthalten sei. Ist dies erst in *einer* Zahl mit k solcher 9 der Fall, so wiederholen sich genau k Stellen im Decimalbruch; denn dann ist

$$r_k = r_0 = a.$$

Zugleich folgt hieraus, dafs *jede* Zahl b, die weder 2, noch 5 zu Stammfactoren hat, in einer Zahl mit lauter 9 genau enthalten ist; und zwar in einer Zahl mit höchstens $b-1$ solcher 9.

Will man also z. B. wissen, wie viele sich wiederholende Stellen der Bruch $\frac{10}{11}$ in dem aus ihm entstehenden Dezimalbruch habe, so stelle man folgende Rechnung an:

11 ist in 9 nicht enthalten,
11 ist in 99 enthalten;

also hat der Decimalbruch zwei periodische Stellen. Für $\frac{6}{7}$ ist

$$\begin{array}{r|l|l} 7 & 99999\ldots & 142857 \\ & 7 & \\ \hline & 29 & \\ & 28 & \\ \hline & 19 & \\ & 14 & \\ \hline & 59 & \\ & 56 & \\ \hline & 39 & \\ & 35 & \\ \hline & 49 & \\ & 49 & \\ \hline & \ldots & \end{array}$$

und der Bruch hat also 6 periodische Stellen.

Stellt man eine Tafel der Stammfactoren von 9, 99, ... auf, so läfst sich aus derselben sogleich entnehmen, wie viele Stellen sich in dem Decimalbruch wiederholen. Der Anfang einer solchen Tafel wäre:

$$\begin{aligned} 9 &= 3\times 3,\\ 99 &= 3\times 3\times 11,\\ 999 &= 3\times 3\times 3\times 37,\\ 9999 &= 3\times 3\times 11\times 101,\\ 99999 &= 3\times 3\times 41\times 271,\\ 999999 &= 3\times 3\times 3\times 7\times 11\times 13\times 37 \end{aligned}$$

u. s. f.

IV.

Ist c nicht zu b theilerfremd, so sei c^h die erste Potenz von c, von der Beschaffenheit, dafs $\frac{c^h}{b}$ sich so aufheben lasse, dafs alle Factoren, die sowohl in c als in b vorkommen und von welchen b einige vielleicht mehrere Male enthält als c, verschwinden. Ist z. B. $b = 2^3.5^4.7^6.11.41$ und $c = 2.5.7$, so ist $h = b$, da erst in $\frac{2^6.5^6.7^6}{2^2.5^4.7^6.11.41}$ die Factoren 2, 5, 7 alle aus dem Nenner verschwinden. Setzt man nun

$$\begin{aligned} c^h &= c_h e,\\ b &= b_1 e, \end{aligned}$$

wo e den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von c^h und b bezeichnet, so ist $\frac{ac^h}{b} = \frac{ac_h}{b_1}$, und b_1 ist sowohl zu a als zu c und ac_h theilerfremd. Fängt man also die Reihen in (I.) erst mit ac^h statt mit a an und setzt also

$$\begin{aligned} ac_h &= \mathfrak{G}b_1 + r_0,\\ ac_h c &= \mathfrak{G}b_1 + r_1,\\ &\cdots\cdots\\ ac_h c^k &= \mathfrak{G}b_1 + r_k, \end{aligned}$$

so zeigt sich, dafs erst der Rest r_0 sich wiederholen wird. Nun ist der Rest r_0 auch der, welchen $\frac{ac^h}{b}$ läfst. Es läfst sich demnach nicht behaupten, dafs die Reste, welche a, ac, ac_2, ... ac^{h-1}, durch b getheilt, lassen, sich wiederholen; wohl aber läfst es sich von dem Reste behaupten, den ac^h, durch b getheilt, läfst. Die Anzahl der sich periodisch wiederholenden Reste ist höchstens $= b_1 - 1$.

V.

Wendet man dies auf die Decimalbrüche an, so folgt, dafs wenn der Nenner des gemeinen Bruchs $= 2^m.5^r.p$ ist, wo $p(>1)$ eine Zahl ist, die sich weder durch 2, noch durch 5 theilen läfst, und wenn:

α) $m > r$ ist: dafs dann der entstehende Decimalbruch nach dem Komma m Stellen haben werde, die sich nicht wiederholen;

β) Dafs, wenn $m = r$ ist, der Decimalbruch m solcher Stellen und

γ) Wenn $m < r$ ist, der Decimalbruch r Stellen haben werde.

Die Anzahl der sich wiederholenden Stellen ist die nemliche, wie für einen Decimalbruch, der aus einem Bruche entsteht, dessen Nenner p ist: welche Anzahl nach (III.) gefunden wird.

Sinsheim, im August 1846.

10.

An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.

(By the late *George Green,* fellow of Gonville- and Cains-Colleges at Cambridge.)

Introductory notices.

(By *William Thomson* Esq., fellow of St. Peters-College at Cambridge.)

The following memoir on Electricity and Magnetism, although published in 1828, is still but little known either in England or on the Continent, and is now *out of point.* A considerable part of the contents may be known to most of the readers of this Journal, as many as the theorems on Attraction, first given by Green in this work, have been rediscovered within the last few years; but still the original Essay entire, as it is now presented, will probably be found interesting.

The independent investigations made by subsequent authors on the subject of *Greens* Essay, or on subjects closely connected with it, will be found in the paper of which the following are the titles.

Énoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur; par *Chasles.* In the „Comptes-rendus; Paris, Févr. 11. 1839."

Gauss memoir on general Theorems relating to attractive and repulsive forces varying inversely as the square of the distance. In the „Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1839; Leipzig 1840." (English and french translations of this paper have been published in „*Taylors* scientific memoirs for April 1842" and in the numbres of *Liouville's* Journal for July and August 1842.)

Cambridge mathematical Journal Vol. III. Febr. 1842. „On the uniform motion of heat and its connection with the mathematical Theory of Electricity, with Application to the determination of the extensive and intensive Attraction of a homogeneous Ellipsoïd."

Théorèmes généraux sur l'attraction des corps; par ***M. Chasles;*** in the Addition to the „Connaissance des temps for 1845" published June 1842.

Additional Developments of the same Theory will be found in the following papers. Note sur un mémoire de Mr. ***Chasles*** par Mr. ***Sturm, Liouville's*** Journal Septbr. 1842.

On general propositions in the Theory of Attraction. Parts I. and II. of the Cambridge-mathematical-Journal Vol. III. Novbr. 1842 and Febr. 1843.

Note sur la théorie de l'attraction, par Mr. ***W. Thomson. Liouville's*** Journal, June 1844.

Recherches sur les surfaces isothermes et sur l'attraction des Ellipsoïdes par Mr. ***Ch. Despeyrous. Crelle's*** Journal tome XXXI. cah. 2. 1845.

George Green was born at Nottingham on the 14th of July 1793. The Essay now reprinted, his first work, was written during the intervals of a laborious occupation, the author being employed in assisting his father, who was first a baker at Nottingham, and afterwards a miller at the adjacent village of Sneinton. In the early part of the year 1829 the father died, leaving the business entirely in the hands of his son, who shortly afterwards dispared of it, to allow himself time for the prosecution of his studies several years after this, when want of sympathy in his pursuit, and the difficulty he experienced in having his researches made known, had almost led him to relinquish his mathematical studies, he was persuaded by friends to enter the University of Cambridge and was commended to publish some his results in the Philosophical Transactions of one or other of the learned Societies. His second work (see below) was accordingly presented to the Cambridge Philophical Society (communicated by Sir ***Edward F. Bromhead*** Now. 12th 1832), as were all his subsequent memoirs.

In October 1833 he came into residence at Cains-College, and in January 1837 he took the degree of Bachelor of Arts, with heigh honours, his name appearing fourth on the list of „wranglers."

In Nowember 1839 he was elected fellow of his college. He remained at Cambridge till the spring of 1840, when his health failing he returned at Sneinton and died there on the 31th of May 1841.

The following are the titles of his published mathematical works.

I. An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham 1828.

II. Mathematical Investigation concerning the laws of Equilibrium of Fluids analogons to the Electric-Fluid; with other similar researches. Communicated Nov. 12th 1832. Camb. Phil. Trasactions Vol. V.

III. On the Determination of the exterior and interior Attraction of Ellipsoïds of variable densities. Read May 6th 1833. Vol. V.

IV. On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. May 15th 1837. Vol. VI.

V. On the Reflection and Refraction of Sound. Dec. 11th 1837. Vol. VI.

VI. On the laws of Reflection and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized media. Dec. 11th 1837. Vol. VII.

VII. Supplement to this memoir. May 6th 1839. Vol. VII.

VIII. On the Propagation of Light in crystallized media. Mai 20th 1839. Vol. VII.

IX. Note on the motion of waves in Canals. Febr. 18th 1839. Vol. VII.

X. Researches on the vibration of pendulum in fluid media. Communicated by Sir *E. F. Bromhead* and read Dec. 16th 1833.

Preface.

After I had composed the following Essay, I naturally felt anxious to become acquainted with what had been effected by former writers on the same subject, and, had it been practicable, I should have been glad to have given, in this place, an historical sketch of its progress; my limited sources of information, however, will by no means permit me to do so; but probably I may here be allowed to make one or two observations on the few works which have fallen in my way, more particularly as an opportunity will thus offer itself, of noticing an excellent paper, presented to the Royal Society by one of the most illustrious members of that learned body, which appears to have attracted little attention, but which, on examination, will be found not unworthy the man who was able to lay the foundations of pneumatic chymistry, and to discover that water, far from being according to the opinions then received, an elementary substance, was a compound of two of the most important gasses in nature.

It is almost needless to say the author just alluded to is the celebrated *Cavendish*, who, having confined himself to such simple methods, as may readily be understood by any one possessed of an elementary knowledge of geometry and fluxions, has rendered his paper accessible to a great number of readers; and although, from subsequent remarks, he appears dissatisfied with an hypothesis which enabled him to draw some important conclusions, it will readily be perceived, on an attentive perusal of his paper, that a trifling alteration will suffice to render the whole perfectly legitimate *).

*) In order to make this quite clear, let us select one of *Cavendish's* propositions, the twentieth for instance, and examine with some attention the method there employed. The object of this proposition is to show, that when two similar conducting bodies communicate by means of a long slender canal, and are charged with electricity, the respective quantities of redundant fluid contained in them, will be proportional to the $n-1$ power of their corresponding diameters: supposing the electric repulsion to vary inversely as the n power of the distance. This is proved by considering the canal as cylindrical, and filled with incompressible fluid of uniform density: then the quantities of electricity in the interior of the two bodies are determined by a very simple geometrical construction, so that the total action exerted on the whole canal by one of them, shall exactly balance that arising from the other; and from some remarks in the 27th proposition, it appears the results thus obtained, agree very well with experiments in which real canals are employed, whether they are straight or crooked, provided, as has since been shown by *Coulomb*, n is equal to two. The author however confesses he is by no means able

Little appears to have been effected in the mathematical theory of electricity, except immediate deductions from known formulae, that first presented themselves in researches on the figure of the earth, of which the principal are, — the determination of the law of the electric density on the surfaces of conducting bodies differing little from a sphere, and on those of ellipsoids, from 1771, the date of *Cavendish's* paper, until about 1812, when M. *Poisson* presented to the French Institute two memoirs of singular elegance, relative to the distribution of electricity on the surfaces of conducting spheres, previously electrified and put in presence of each other. It would be quite impossible to give any idea of them here: to be duly appretiated they must be read. It will therefore only be remarked, that they are in fact founded upon the consideration of what have, in this Essay, been termed potential functions, and by means of an equation in variable differences, which may immediately be obtained from the one given in our tenth article, serving to express the relation between the two potential functions arising from any spherical surface, the author deduces the values of these functions belonging to each of the two spheres under consideration, and thence the general expression of the electric density on the surface of either, together with their actions on any exterior point.

I am not aware of any material accessions to the theory of electricity, strictly so called, except those before noticed; but since the electric and magnetic fluids are subject to one common law of action, and their theory,

---

to demonstrate this, altough, as we shall see immediately, it may very easily be deduced from the propositions contained in this paper.

For this purpose, let us conceive an incompressible fluid of uniform density, whose particles do not act on each other, but which are subject to the same actions from all the electricity in their vicinity, as real electric fluid of like density would be; then supposing an infinitely thin canal of this hypothetical fluid, whose perpendicular sections are all equal and similar, to pass from a point a on the surface of one of the bodies, through a portion of its mass, along the interior of the real canal, and trough a part of the other body, so as to reach a point A on its surface, and then proceed from A to a in a right line, forming thus a closed circuit, it is evident from the principles of hydrostatics, and may be proved from our author's 23^{d} proposition, that the whole of the hypothetical canal will be in equilibrium, and as every particle of the portion contained within the system is necessarily so, the rectilinear portion aA must therefore be in equilibrium. This simple consideration serves to complete *Cavendish's* demonstration, whatever may be the form or thickness of the real canal, provided the quantity of electricity in it is very small compared with that contained in the bodies. An analagous application of it will render the demonstration of the 22^{d} proposition complete, when the two coatings of the glass plate communicate with their respective conducting bodies, by fine metallic wires of any form.

considered in a mathematical point of view, consists merely in developing the consequences which flow from this law, modified only by considerations arising from the peculiar constitution of natural bodies with respect to these two kinds of fluid, it is evident, the mathematical theory of the latter must be very intimately connected with that of the former; nevertheless, because it is here necessary to consider bodies as formed of an immense number of insulated particles, all acting upon each other mutually, it is easy to conceive that superior diffiulties must, on this account, present themselves, and indeed, until within the last four or five years, no successful attempt to overcome them had been published. For this farther extension of the domain of analysis, we are again indebted to M. ***Poisson***, who has already furnished us with three memoirs on magnetism: the two first contain the general equations on which the magnetic state of a body depends, whatever may be its form, together with their complete solution in case the body under consideration is a hollow spherical shell, of uniform thickness, acted upon by any exterior forces, and also when it is a solid ellipsoid subject to the influence of the earth's action. By supposing magnetic changes to require time, although an exceedingly short one, to complete them, it had been suggested that M. ***Arago's*** discovery relative to the magnetic effects developed in copper, wood, glass, etc., by rotation, might be explained. On this hypothesis M. ***Poisson*** has founded his third memoir, and thence deduced formulae applicable to magnetism in a state of motion. Whether the preceding hypothesis will serve to explain the singular phenomena observed by M. ***Arago*** or not, it would ill become me to decide; but it is probably quite adequate to account for those produced by the rapid rotation of iron bodies.

We have just taken a cursory view of what has hitherto been written, to the best of my knowledge, on subjects connected with the mathematical theory of electricity; and although many of the artifices employed in the works before mentioned are remarkable for their elegance, it is easy to see they are adapted only to particular objects, and that some general method, capable of being employed in every case, is still wanting. Indeed ***M. Poisson,*** in the commencement of his first memoir (Mém. de l'Institut 1811), has incidentally given a method for determining the distribution of electricity on the surface of a spheroid of any form, which would naturally present itself to a person occupied in these researches, being in fact nothing more than the ordinary one noticed in our introductory observations, as requiring the resolution of

the equation (*a*). Instead however of supposing, as we have done, that the point *p* must be upon the surface, in order that the equation may subsist, M. ***Poisson*** availing himself of a general fact, which was then supported by experiment only, has conceived the equation to hold good wherever this point may be situated, provided it is within the spheroid, but even with this extension the method is liable to the same objection as before.

Considering how desirable it was that a power of universal agency, like electricity, should, as far as possible, be submitted to calculation, and reflecting on the advantages that arise in the solution of many difficult problems, from dispensing altogether with a particular examination of each of the forces which actuate the various bodies in any system, by confining the attention solely to that peculiar function on whose differentials they all depend, I was induced to try whether it would be possible to discover any general relations, existing between this function and the quantities of electricity in the bodies producing it. The advantages ***Laplace*** had derived in the third book of the Mecanique Celeste, from the use of a partial differential equation of the second order, there given, were too marked to escape the notice of any one engaged with the present subject, and naturally served to suggest that this equation might be made subservient to the object I had in view. Recollecting, after some attempts to accomplish it, that previous researches on partial differential equations, had shown me the necessity of attending to what have, in this Essay, been denominated the singular values of functions, I found, by combining this consideration with the preceding, that the resulting method was capable of being applied with great advantage to the electrical theory, and was thus, in a short time, enabled to demonstrate the general formulae contained in the preliminary part of the Essay. The remaining part ought to be regarded principally as furnishing particular examples of the use of these general formulae; their number might with great ease have been increased, but those which are given, it is hoped, will suffice to point out to mathematicians, the mode of applying the preliminary results to any case they may wish to investigate. The hypotheses on which the received theory of magnetism is founded, are by no means so certain as the facts on which the electrical theory rests; it is however not the less necessary to have the means of submitting them to calculation, for the only way that appears oppen to us in the investigation of these subjects, which seem as it were desirous to conceal themselves from our view, is to form the most probable hypotheses we can, to deduce rigorously the conse-

quences which flow from them, and to examine whether such consequences agree numerically with accurate experiments.

The applications of analysis to the physical Sciences, have the double advantage of manifesting the extraordinary powers of this wonderful instrument of thought, and at the same time of serving to increase them; numberless are the instances of the truth of this assertion. To select one we may remark, that M. ***Fourier***, by his investigations relative to heat, has not only discovered the general equations on which its motion depends, but has likewise been led to new analytical formulae, by whose aid M. M. ***Cauchy*** and ***Poisson*** have been enabled to give the complete theory of the motion of the waves in an indefinitely extended fluid. The same formulae have also put us in possession of the solutions of many other interesting problems, too numerous to be detailed here. — It must certainly be regarded as a pleasing prospect to analists, that at a time when astronomy, from the state of perfection to which it has attained, leaves little room for farther applications of their art, the rest of the physical sciences should show themselves daily more and more willing to submit to it; and, amongst other things, probably the theory that supposes light to depend on the undulations of a luminiferous fluid, and to which the celebrated Dr. ***T. Young*** has given such plausibility, may furnish a useful subject of research, by affording new opportunities of applying the general theory of the motion of fluids. The number of these opportunities can scarcely be too great, as it must be evident to those who have examined the subject, that, although we have long been in possession of the general equations on which this kind of motion depends, we are not yet well acquainted with the various limitations it will be necessary to introduce, in order to adapt them to the different physical circumstances which may occur.

Should the present Essay tend in any way to facilitate the application of analysis to one of the most interesting of the physical sciences, the author will deem himself amply repaid for any labour he may have bestowed upon it: and it is hoped the difficulty of the subject will incline mathematicians to read this work with indulgence, more particularly when they are informed that it was written by a young man, who has been obliged to obtain the little knowledge he possesses, at such intervals and by such means, as other indispensable avocations which offer but few opportunities of mental improvement, afforded.

Introductory observations.

The object of this Essay is to submit to Mathematical Analysis the phenomena of the equilibrium of the Electric and Magnetic Fluids, and to lay down some general principles equally applicable to perfect and imperfect conductors; but, before entering upon the calculus, it may not be amiss to give a general idea of the method that has enabled us to arrive at results, remarkable for their simplicity and generality, which it would be very difficult if not impossible to demonstrate in the ordinary way.

It is well known, that nearly all the attractive and repulsive forces existing in nature are such, that if we consider any material point p, the effect, in a given direction, of all the forces acting opon that point, arising from any system of bodies S under consideration, will be expressed by a partial differential of a certain function of the co-ordinates which serve to define the point's position in space. The consideration of this function is of great importance in many inquiries, and probably there are none in which its utility is more marked than in those about to engage our attention. In the sequel we shall often have occasion to speak of this function, and will therefore, for abridgment, call it the potential function arising from the system S. If p be a particle of positive electricity under the influence of forces arising from any electrified body, the function in question, as is well known, will be obtained by dividing the quantity of electricity in each element of the body, by its distance from the particle p, and taking the total sum of these quotients for the whole body, the quantities of electricity in those elements which are negatively electrified, being regarded as negative.

It is by considering the relations existing between the density of the electricity in any system, and the potential functions thence arising, that we have been enabled to submit many electrical phenomena to calculation, which had hitherto resisted the attempts of analysts; and the generality of the consideration here employed, ought necessarily, and does, in fact, introduce a great generality into the results obtained from it. There is one consideration peculiar to the analysis itself, the nature and utility of which will be best illustrated by the following sketch:

Suppose it were required to determine the law of the distribution of

the electricity on a closed conducting surface A without thickness, when placed under the influence of any electrical forces whatever: these forces, for greater simplicity, being reduced to three, X, Y, and Z, in the direction of the rectangular co-ordinates, and tending to increase them. Then ϱ representing the density of the electricity on an element $d\sigma$ of the surface, and r the distance between $d\sigma$ and p, any other point of the surface, the equation for determining ϱ which would be employed in the ordinary method, when the problem is reduced to its simplest form, is known to be

$$(a) \qquad \text{cons} = a = \int \frac{\varrho d\sigma}{r} - \int (Xdx + Ydy + Zdz);$$

the first integral relative to $d\sigma$ extending over the whole surface A, and the second representing the function whose complete differential is $Xdx + Ydy + Zdz$, x, y and z being the co-ordinates of p.

This equation is supposed to subsist, whatever may be the position of p, provided it is situate upon A. But we have no general theory of equations of this description, and whenever we are enabled to resolve one of them, is because some consideration peculiar to the problem renders, in that particular case, the solution comparatively simple, and must be looked upon as the effect of chance, rather than of any regular and scientific procedure.

We will now take a cursory view of the method it is proposed to substitute in the place of the one just mentioned.

Let us make $B = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$ whatever may be the position of the point p, $V = \int \frac{\varrho d\sigma}{r}$ when p is situate any where within the surface A, and $V' = \int \frac{\varrho d\sigma}{r}$ when p is exterior to it: the two quantities V and V', although expressed by the same definite integral, are essentially distinct functions of x, y, and z, the rectangular co-ordinates of p; these functions, as is well known, having the property of satisfying the partial differential equations

$$0 = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2},$$

$$0 = \frac{d^2V'}{dx^2} + \frac{d^2V'}{dy^2} + \frac{d^2V'}{dz^2}.$$

If now we could obtain the values of V and V' from these equations, we should have immediately, by differentiation, the required value of ϱ, as will be shown in the sequel.

In the first place, let us consider the function V, whose value at the surface A is given by the equation (a), since this may be written

$$a = \overline{V} - \overline{B},$$

the horizontal line over a quantity indicating that it belongs to the surface A. But, as the general integral of the partial differential equation ought to contain two arbitrary functions, some other condition is requisite for the complete determination of V. Now since $V = \int \frac{\varrho d\sigma}{r}$, it is evident that none of its differential co-efficients can become infinite when p is situate any where within the surface A, and it is worthy of remark, that this is precisely the condition required: for, as will be afterwards shown, when it is satisfied we shall have generally

$$V = -\int (\varrho) d\sigma \overline{V};$$

the integral extending over the whole surface, and (ϱ) being a quantity dependant upon the respective positions of p and $d\sigma$.

All the difficulty therefore reduces itself to finding a function V, which satisfies the partial differential equation, becomes equal to the known value of V at the surface, and is moreover such that none of its differential coefficients shall be infinite when p is within A.

In like manner, in order to find V', we shall obtain $\overline{V'}$, its value at A, by means of the equation (a), since this evidently becomes

$$a = \overline{V'} - \overline{B}, \quad \text{i. e.} \quad \overline{V'} = \overline{V}.$$

Moreover it is clear, that none of the differential co-efficients of $V' = \int \frac{\varrho d\sigma}{r}$ can be infinite when p is exterior to the surface A, and when p is at an infinite distance from A, V' is equal to *zero*. These two conditions combined with the partial differential equation in V', are sufficient in conjunction with its known value $\overline{V'}$ at the surface A for the complete determination of V', since it will be proved hereafter, that when they are satisfied we shall have

$$V' = -\int (\varrho) d\sigma \overline{V'};$$

the integral, as before, extending over the whole surface A, and (ϱ) being a quantity dependant upon the respective position of p and $d\sigma$.

It only remains therefore to find a function V' which satisfies the partial differential equation, becomes equal to $\overline{V'}$ when p is upon the surface A, vanishes when p is at an infinite distance from A, and is besides such, that none of its differential co-efficients shall be infinite, when the point p is exterior to A.

All those to whom the practice of analysis is familiar, will readily perceive that the problem just mentioned, is far less difficult than the direct resolution of the equation (a), and therefore the solution of the question originally proposed has been rendered much easier by what has preceded. The peculiar consideration relative to the differential co-efficients of V and V', by restricting the generality of the integral of the partial differential equation, so that it can in fact contain only one arbitrary function, in the place of two which it ought otherwise to have contained, and, which has thus enabled us to effect the simplification in question, seems worthy of the attention of analysts, and may be of use in other researches where equations of this nature are employed.

We will now give a brief account of what is contained in the following Essay. The first seven articles are employed in demonstrating some very general relations existing between the density of the electricity on surfaces and in solids, and the corresponding potential functions. These serve as a foundation to the more particular applications which follow them. As it would be difficult to give any idea of this part without employing analytical symbols, we shall content ourselves with remarking, that it contains a number of singular equations of great generality and simplicity, which seem capable of being applied to many departments of the electrical theory besides those considered in the following pages.

In the eight article we have determined the general values of the densities of the electricity on the inner and outer surfaces of an insulated electrical jar, when, for greater generality, these surfaces are supposed to be connected with separate conductors charged in any way whatever; and have proved, that for the same jar, they depend solely on the difference existing between the two constant quantities, which express the values of the potential functions within the respective conductors. Afterwards, from these general values the following consequences have been deduced: —

When in an insulated electrical jar we consider only the electricity accumulated on the two surfaces of the glass itself, the total quantity on the inner surface is precisely equal to that on the outer surface, and of a contrary sign, notwithstanding the great accumulation of electricity on each of them: so that if a communication were established between the two sides of the jar, the sum of the quantities of electricity which would manifest themselves on the two metallic coatings, after the discharge, is exactly equal to that which, before it had taken place, would have been observed to have existed on the

surfaces of the coatings farthest from the glass, the only portions then sensible to the electrometer.

If an electrical jar communicates by means of a long slender wire with a spherical conductor, and is charged in the ordinary way, the density of the electricity at any point of the interior surface of the jar, is to the density on the conductor itself, as the radius of the spherical conductor to the thickness of the glass in that point.

The total quantity of electricity contained in the interior of any number of equal and similar jars, when one of them communicates with the prime conductor and the others are charged *by cascade*, is precisely equal to that, which one only would receive, if placed in communication with the same conductor, its exterior surface being connected with the common reservoir. This method of charging batteries, therefore, must not be employed when any great accumulation of electricity is required.

It has been shown by M. *Poisson*, in his first Memoir on Magnetism (Mém. de l'Acad. de Sciences, 1821 et 1822), that when an electrified body is placed in the interior of a hollow spherical conducting shell of uniform thickness, it will not be acted upon in the slightest degree by any bodies exterior to the shell, however intensely they may be electrified. In the ninth article of the present Essay this is proved to be generally true, whatever may be the form or thickness of the conducting shell.

In the tenth article there will be found some simple equations, by means of which the density of the electricity induced on a spherical conducting surface, placed under the influence of any electrical forces whatever, is immediately given; and thence the general value of the potential function for any point either within or without this surface is determined from the arbitrary value at the surface itself, by the aid of a definite integral. The proportion in which the electricity will divide itself between two insulated conducting spheres of different diameters, connected by a very fine wire, is afterwards considered; and it is proved, that when the radius of one of them is small compared with the distance between their surfaces, the product of the mean density of the electricity on either sphere, by the radius of that sphere, and again by the shortest distance of its surface from the centre of the other sphere, will be the same for both. Hence when their distance is very great, the densities are in the inverse ratio of the radii of the spheres.

When any hollow conducting shell is charged with electricity, the whole

of the fluid is carried to the exterior surface, without leaving any portion on the interior one, as may be immediately shown from the fourth and fifth articles. In the experimental verification of this, it is necessary to leave a small orifice in the shell: it became therefore a problem of some interest to determine the modification which this alteration would produce. We have, on this account, terminated the present article, by investigating the law of the distribution of electricity on a thin spherical conducting shell, having a small circular orifice, and have found that its density is very nearly constant on the exterior surface, except in the immediate vicinity of the orifice; and the density at any point p of the inner surface, is to the constant density on the outer one, as the product of the diameter of a circle into the cube of the radius of the orifice, is to the product of three times the circumference of that circle into the cube of the distance of p from the centre of the orifice; excepting as before those points in its immediate vicinity. Hence, if the diameter of the sphere were twelve inches, and that of the orifice one inch, the density at the point on the inner surface opposite the centre of the orifice, would be less than the hundred and thirty thousandth part of the constant density on the exterior surface.

In the eleventh article some of the effects due to atmospherical electricity are considered; the subject is not however insisted upon, as the great variability of the cause which produces them, and the impossibility of measuring it, gives a degree of vagueness to these determinations.

The form of a conducting body being given, it is in general a problem of great difficulty, to determine the law of the distribution of the electric fluid on its surface: but it is possible to give different forms, of almost every imaginable variety of shape, to conducting bodies; such, that the values of the density of the electricity on their surfaces may be rigorously assignable by the most simple calulations: the manner of doing this is explained in the twelfth article, and two examples of its use are given. In the last, the resulting form of the conducting body is an oblong spheroid, and the density of the electricity on its surface, here found, agrees with the one long since deduced from other methods.

Thus far perfect conductors only have been considered. In order to give an example of the application of theory to bodies which are not so, we have, in the thirteenth article, supposed the matter of which they are formed to be endowed with a constant coercive force equal to β, and analagous to

friction in its operation, so that when the resultant of the electric forces acting upon any one of their elements is less than β, the electrical state of this element shall remain unchanged; but, so soon as it begins to exceed β, a change shall ensue. Then imagining a solid of revolution to turn continually about its axis, and to be subject to a constant electrical force f acting in parallel right lines, we determine the permanent electrical state at which the body will ultimately arrive. The result of the analysis is, that in consequence of the coercive force β, the solid will receive a new polarity, equal to that which would be induced in it if it were a perfect conductor and acted upon by the constant force β, directed in lines parallel to one in the body's equator, making the angle $90^0+\gamma$, with a plane passing through its axis and parallel to the direction of f: f being supposed resolved into two forces, one in the direction of the body's axis, the other b directed along the intersection of its equator with the plane just mentioned, and γ being determined by the equation

$$\sin\gamma = \frac{\beta}{b}.$$

In the latter part of the present article the same problem is considered under a more general point of view, and treated by a different analysis: the body's progress from the initial, towards that permanent state it was the object of the former part to determine is exhibited, and the great rapidity of this progress made evident by an example.

The phenomena which present themselves during the rotation of iron bodies, subject to the influence of the earth's magnetism, having lately engaged the attention of experimental philosophers, we have been induced to dwell a little on the solution of the preceeding problem, since it may serve in some measure to illustrate what takes place in these cases. Indeed, if there were any substances in nature whose magnetic powers, like those of iron and nickel, admit of considerable developement, and in which moreover the coercive force was, as we have here supposed it, the same for all their elements, the results of the preceding theory ought scarcely to differ from what would be observed in bodies formed of such substances, provided no one of their dimensions was very small, compared with the others. The hypothesis of a constant coercive force was adopted in this article, in order to simplify the calculations: probably, however, this is not exactly the case of nature, for a bar of the hardest steel has been shown (I think by Mr. Barlow) to have a very considerable degree of magnetism induced in it by the earth's action, which appears to

indicate, that although the coercive force of some of its particles is very great, there are others in which it is so small as not to be able to resist the feeble action of the earth. Nevertheless, when iron bodies are turned slowly round their axes, it would seem that our theory ought not to differ greatly from observation; and in particular, it is very probable the angle γ might be rendered sensible to experiment, by sufficiently reducing b the component of the force f.

The remaining articles treat of the theory of magnetism. This theory is here founded on an hypothesis relative to the constitution of magnetic bodies, first proposed by ***Coulomb***, and afterwards generally received by philosophers, in which they are considered as formed of an infinite number of conducting elements, separated by intervals absolutely impervious to the magnetic fluid, and by means of the general results contained in the former part of the Essay, we readily obtain the necessary equations for determining the magnetic state induced in a body of any form, by the action of exterior magnetic forces. These equations accord with those M. ***Poisson*** has found by a very different method. (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1821 et 1822.)

If the body in question be a hollow spherical shell of constant thickness, the analysis used by ***Laplace*** (Méc. Cél. Liv. 3) is applicable, and the problem capable of a complete solution, whatever may be the situation of the centres of the magnetic forces acting upon it. After having given the general solution, we have supposed the radius of the shell to become infinite, its thickness remaining unchanged, and have thence deduced formula belonging to an indefinitely extended plate of uniform thickness. From these it follows, that when the point p, and the centres of the magnetic forces are situate on opposite sides of a soft iron plate of great extent, the total action on p will have the same direction as the resultant of all the forces, which would be exerted on the points p, p', p'', p''' etc. in infinitum if no plate were interposed, and will be equal to this resultant multiplied by a very small constant quantity: the points p, p', p'', p''' etc. being all on a right line perpendicular to the flat surfaces of the plate, and receding from it so, that the distance between any two consecutive points may be equal to twice the plate's thickness.

What has just been advanced will be sensibly correct, on the supposition of the distances between the point p and the magnetic centres not being very great, compared with the plate's thickness, for, when these distances are exceedingly great, the interposition of the plate will make no sensible alteration in the force with which p is solicited.

When an elongated body, as a steel wire for instance, has, under the influence of powerful magnets, received a greater degree of magnetism than it can retain alone, and is afterwards left to itself, it is said to be magnetized to saturation. Now if in this state we consider any one of its conducting elements, the force with which a particle p of magnetism situate within the element tends to move, will evidently be precisely equal to its coercive force f, and in equilibrium with it. Supposing therefore this force to be the same for every element, it is clear that the degree of magnetism retained by the wire in a state of saturation, is, on account of its elongated form, exactly the same as would be induced by the action of a constant force, equal to f, directed along lines parallel to its axis, if all the elements were perfect conductors; and consequently, may readily be determined by the general theory. The number and accuracy of *Coulomb's* experiments on cylindric wires magnetized to saturation, rendered an application of theory to this particular case very desirable, in order to compare it with experience. We have therefore effected this in the last article, and the result of the comparison is of the most satisfactory kind.

11.

Notiz.

(Von Herrn Dr. *Preufs*, Königl. Professor und Historiographen zu Berlin.)

Friedrich der Grofse sagt in einem Briefe an Herrn *v. Suhm* vom 22. Juni 1737:

„*Je vous aime trop géométriquement pour que vous puissiez me soup-*
„*çonner d'inconstance, et la définition 48e d'Euclide sera fausse quand*
„*mon amitié envers vous se démentira.*"

Wenn die obige Zahl 48 unrichtig ist, so fragt es sich, welcher Euclidische Satz dem Könige vorgeschwebt habe?

[Vielleicht der 48te (letzte) *Satz* des *ersten* Buchs, ein Lehrsatz; denn die Zahl der *Definitionen* (Erklärungen) steigt in keinem der Euclidischen Bücher bis auf 48; auch die Zahl der Sätze (Lehrsätze und Aufgaben) steigt nur im ersten und zehnten Buche bis zu und bis über 48; der 48te Satz im zehnten Buche kann aber nicht wohl gemeint sein. D. Herausg.]

Friedrich schreibt an *Voltaire* aus Berlin vom 4. Dec. 1739:

„*Nous venons de faire ici l'acquisition d'un très habile homme. Il*
„*s'appelle Celius; il est habile physicien et très renommé pour les*
„*expériences. On lui donne pour 20 mille écus d'instruments. Il*
„*achévera, cette année, un ouvrage qui lui fera beaucoup d'honneur:*
„*c'est une machine mécanique qui démontre parfaitement tous les mou-*
„*vements des étoiles et des planètes selon le système de Newton.*"

Wer ist *Celius*, und wo findet man über ihn Auskunft?

Im Folgenden sagt Friedrich ungefähr Dasselbe, unter demselben Datum, in einem Briefe an *Algarotti*. Auch dort ist der Name *Celius* ganz deutlich geschrieben. Es heifst dort

„*Nous avons reçu ici un très habile physicien, nommé Celius* (Celius);
„*c'est un homme qui a pour plus de 20 mille écus d'instruments de*
„*physique, et qui est très versé dans les mathématiques.*"

Wer ist *Celius*?

12.

Moyens pour trouver l'expression de la $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière de l'équation linéaire

$$y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots.+Sy'+Ty=0,$$

à l'aide des $n-1$ valeurs $y_1, y_2, \ldots. y_{n-1}$ qui statisfont à cette équation.

(Par Mr. le Dr. *C. J. Malmstèn*, prof. des Mathém. à l'Univers. d'Upsàla.)

On sait depuis longtemps qu'en connaissant n valeurs particulières de y, satisfaisant à l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(1.)\qquad y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots.+Sy'+Ty=0,$$

on peut en former immédiatement l'intégrale complète, en multipliant par une constante arbitraire chacune de ces valeurs particulières et en prenant la somme de ces produits; et de plus que, si seulement $n-1$ valeurs particulières de l'équation (1.) sont connues, on en peut tirer la $n^{\text{ième}}$, en intégrant une équation différentielle du 1er ordre. Ce théorème célèbre, appelé avec raison par Mr. *Lacroix „Le plus général qu'on ait sur l'intégration des équations,"* a été (en tant que je sache) presenté pour la première fois par *Lagrange* dans les mémoires de l'Académie de Berlin de 1775.

Cependant en cherchant la $n^{\text{ième}}$ valeur particulière de y à l'aide des autres $n-1$ connues, on s'est contenté de faire voir comment se forme l'équation différentielle du 1er ordre, qui donne cette valeur. Or déjà pour les équations du 3ième et du 4ième ordre les calculs à faire pour cela deviennent si compliqués que même on a cru qu'il ne valait pas la peine de les conduire jusqu'au bout pour obtenir l'expression finale de la valeur demandée. Enfin, en considérant, combien les calculs augmentent pour chaque ordre plus élevé, on l'a jugé presque impossible de trouver l'expression finale pour une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Mais cette impossibilité n'est qu'apparente. L'objet du présent mémoire est de faire voir, non seulement que l'expression finale demandée de la $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière, puisse fort bien être trouvée, mais quelle se présente

même sous une forme dont la simplicité est remarquable. Je suis parvenu à éviter la complication des calculs, qui menace de rendre infructueuse toute tentative de résoudre d'une manière générale le problème en question, par les fonctions connues sous le nom de ***Déterminants,*** dont l'application à la transformation des intégrales multiples est connue depuis long-temps et dont la recherche plus particulière a occupé plusieurs Analystes les plus célèbres de notres temps: M.M. ***Jacobi, Cauchy, Binet, Catalan,*** etc.

I.

D'abord il faut se rappeler quelques propriétés des ***Déterminants*** dont nous aurons besoin dans la suite.

A. On nomme ***Déterminant*** la fonction

$$\Sigma\pm a_1^1.a_2^2.a_3^3\ldots.a_n^n,$$

en désignant par cela, comme de coûtume, la somme algébrique de tous les termes du produit

$$a_1^1.a_2^2.a_3^3\ldots a_n^n$$

qui se présentent en opérant sur les indices en haut et en bas toutes les permutations possibles, et en posant devant chaque terme le signe + ou —, de sorte que pour chaque permutation ainsi opérée, le signe + est changé en —, et réciproquement. Ainsi on obtient

$$(2.)\quad \Sigma\pm a_1^1.a_2^2.a_3^3\ldots.a_n^n=-\Sigma\pm a_2^1.a_1^2.a_3^3\ldots.a_n^n=\Sigma\pm a_2^1.a_3^2.a_1^3\ldots.a_n^n.$$

B. Si deux indices, en haut ou en bas, son égaux entre eux, le ***Déterminant*** est égal à zéro.

C. Enfin nous empruntons les deux formules suivantes trouvées par M. ***Jacobi:***

$$(3.)\quad \begin{cases} R=a_1^{(i)}.\dfrac{dR}{da_1^{(i)}}+a_2^{(i)}.\dfrac{dR}{da_2^{(i)}}+\ldots.+a_n^{(i)}.\dfrac{dR}{da_n^{(i)}} \\ \text{où} \\ R=\Sigma\pm a_1^1.a_2^2.a_3^3\ldots.a_n^n, \\ 0=a_1^{(i')}.\dfrac{dR}{da_1^{(i)}}+a_2^{(i')}.\dfrac{dR}{da_2^{(i)}}+\ldots.+a_n^{(i')}.\dfrac{dR}{da_n^{(i)}}, \\ \text{et} \\ a_1^{(i)}=a_1^{(i')},\quad a_2^{(i)}=a_2^{(i')},\quad a_3^{(i)}=a_3^{(i')},\quad \ldots.\ a_n^{(i)}=a_n^{(i')}. \end{cases}$$

II.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots. y_{n-1}$ des fonctions de x, et posons pour abréger,

$$\frac{d^i y_r}{dx^i}=y_r^{(i)}.$$

En différentiant le Déterminant

$$\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$

par rapport à x, on aura

$$(4.)\quad \frac{d\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}.y_{n-1}^{(n-2)}}{dx}=\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}.y_{n-1}^{(n-1)},$$

parcequ'en vertu de la propriété (B), tous les autres termes s'annéantissent entre eux.

Des formules (3.) on tirera sans difficulté:

$$(5.)\quad (-1)^n.\Sigma\pm y_1.y_2'.y_3''\ldots.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$=\ y_1^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}-y_2^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_3'.y_4''\ldots\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$+y_3^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_2'.y_4''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}-y_4^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_2'.y_3''.y_5'''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-3}.y_{n-2}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1y_2'\ldots.y_{n-3}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$+(-1)^{n-2}.y_{n-1}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)},$$

$$(6.)\quad 0=y_1^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$-y_2^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_3'.y_4''\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$+y_3^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_2'.y_4''\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$-y_4^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_2'.y_3''.y_5'''\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^{n-3}.y_{n-2}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-3}^{n-4}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$+(-1)^{n-2}.y_{n-1}^{n-2}.\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-3}^{(n-4)}.y_{n-2}^{(n-2)}.$$

Ces formules peuvent aussi prendre la forme suivante:

$$(7.)\quad (-1)^n.\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$=\ y_1^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}-y_2^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_3'.y_4''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$-y_3^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_1'.y_4''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}-y_4^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'.y_1''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-y_{n-2}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'.y_4''\ldots.y_{n-3}^{(n-5)}.y_1^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$-y_{n-1}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_1^{(n-3)}.$$

$$(8.)\quad 0 = y_1^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$-y_2^{(n-2)}.\Sigma\pm y_1.y_3'.y_4''\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$-y_3^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_1'.y_4''\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$-y_4^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'.y_1''.y_5'''\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-y_{n-2}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-3}^{(n-5)}.y_1^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$-y_{n-1}^{(n-2)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_1^{(n-2)}.$$

En différentiant (7.) et en ayant égard aux formules (4.) et (8.), on aura

$$(9.)\quad (-1)^n.\Sigma\pm y_1.y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}.y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$= y_1^{(n-1)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots\ldots y_{n-1}^{(n-3)} - y_2^{(n-1)}.\Sigma\pm y_1.y_3'.y_4''\ldots\ldots y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$-y_3^{(n-1)}.\Sigma\pm y_2.y_1'.y_4''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)} - y_4^{(n-1)}.\Sigma\pm y_2.y_3'.y_1''.y_5'''\ldots.y_{n-1}^{(n-3)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-y_{n-2}^{(n-1)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-3}^{(n-5)}.y_1^{(n-4)}.y_{n-1}^{(n-3)} - y_{n-1}^{(n-1)}.\Sigma\pm y_2.y_3'\ldots.y_{n-2}^{(n-4)}.y_1^{(n-3)}.$$

III.

Ces préliminaires posées, qui nous seront utiles dans la suite, nous allons entreprendre la solution même du problème en question, savoir: ***de trouver l'expression de la $n^{ième}$ intégrale particulière de l'équation***

$$(10.)\quad y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots.+Sy'+Ty=0,$$

si l'on connait les $n-1$ valeurs

$$(11.)\quad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_{n-1}$$

qui lui satisfont.

Supposons, comme à l'ordinaire,

$$(12.)\quad y = y_1.z_1+y_2.z_2+y_3.z_3+\ldots.y_{n-2}.z_{n-2}+y_{n-1}.z_{n-1}$$

où

$$(13.)\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots.\ z_{n-2},\ z_{n-1}$$

sont des fonctions indéterminées qui doivent être déterminées de sorte que l'expression (12.) satisfasse à l'équation (10.). Supposons ensuite que les $n-2$ relations suivantes aient lieu entre ces $n-1$ fonctions:

$$(14.)\quad \begin{cases} y_1.z_1'+y_2.z_2'+y_3.z_3'+\ldots.+y_{n-2}.z_{n-2}'+y_{n-1}.z_{n-1}' = 0, \\ y_1'.z_1'+y_2'.z_2'+y_3'.z_3'+\ldots.+y_{n-2}'.z_{n-2}'+y_{n-1}'.z_{n-1}' = 0, \\ y_1''.z_1'+y_2''.z_2'+y_3''.z_3'+\ldots.+y_{n-2}''.z_{n-2}'+y_{n-1}''.z_{n-1}' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-3)}.z_1'+y_2^{(n-3)}.z_2'+y_3^{(n-3)}.z_3'+\ldots.+y_{n-2}^{(n-3)}.z_{n-2}'+y_{n-1}^{(n-3)}.z_{n-1}' = 0. \end{cases}$$

Il ne reste qu'à chercher ***une*** des fonctions (13.), p. ex. $\mathfrak{z}$, parcequ'on obtient sans difficulté toutes les autres en effectuant l'élimination des équations (14.). En différentiant successivement (12.), on obtiendra en vertu des suppositions faites dans (14.):

$$(15.)\quad\begin{cases}
y' = y_1'.\mathfrak{z}_1+y_2'.\mathfrak{z}_2+y_3'.\mathfrak{z}_3+\ldots.+y'_{n-2}.\mathfrak{z}_{n-2}+y'_{n-1}.\mathfrak{z}_{n-1},\\
y'' = y_1''.\mathfrak{z}_1+y_2''.\mathfrak{z}_2+y_3''.\mathfrak{z}_3+\ldots.+y''_{n-2}.\mathfrak{z}_{n-2}+y''_{n-1}.\mathfrak{z}_{n-1},\\
\ldots\ldots\ldots

En différentiant et en divisant par z_1' on tire de (17.):

$$\frac{z_2''}{z_1'} = -\frac{\varphi_2}{\psi}\cdot\frac{z_1''}{z_1'}+\frac{\varphi_2\cdot\psi'-\psi\cdot\varphi_2'}{\psi^2},$$

$$\frac{z_3''}{z_1'} = -\frac{\varphi_3}{\psi}\cdot\frac{z_1''}{z_1'}+\frac{\varphi_3\cdot\psi'-\psi\cdot\varphi_2'}{\psi^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_r''}{z_1'} = -\frac{\varphi_r}{\psi}\cdot\frac{z_1''}{z_1'}+\frac{\varphi_r\cdot\psi'-\psi\cdot\varphi_r'}{\psi^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_{n-1}''}{z_1'} = -\frac{\varphi_{n-1}}{\psi}\cdot\frac{z_1''}{z_1'}+\frac{\varphi_{n-1}\cdot\psi'-\psi\cdot\varphi_{n-1}'}{\psi^2}$$

et en substitutiant dans (16.), on obtient

$$\left.\begin{aligned}&(y_1^{(n-2)}\cdot\psi-y_2^{(n-2)}\cdot\varphi_2-y_3^{(n-2)}\cdot\varphi_3-\ldots.-y_{n-1}^{(n-2)}\cdot\varphi_{n-1})\left(\frac{z_1''}{z_1'}+P\right)\\ &+2(y_1^{(n-1)}\cdot\psi-y_2^{(n-1)}\cdot\varphi_2-y_3^{(n-1)}\cdot\varphi_3-\ldots.-y_{n-1}\cdot\varphi_{n-1})\\ &+\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)\{y_2^{(n-2)}\cdot\varphi_2+y_3^{(n-2)}\cdot\varphi_3+\ldots.+y_{n-1}^{(n-2)}\cdot\varphi_{n-1}\}\\ &-\{y_2^{(n-2)}\cdot\varphi_2'+y_3^{(n-2)}\cdot\varphi_3'+\ldots.+y_{n-1}^{(n-2)}\cdot\varphi_{n-1}'\}\end{aligned}\right\}=0,$$

et parcequ'en vertu de (8.):

$$y_2^{(n-2)}\cdot\varphi_2'+y_3^{(n-2)}\cdot\varphi_3'+\ldots.+y_{n-1}^{(n-2)}\cdot\varphi_{n-1}'=y_2^{(n-2)}\cdot\psi',$$

on a

$$(18.)\qquad \frac{z_1''}{z_1'}+P+\frac{2(y_1^{(n-1)}\cdot\psi-y_2^{(n-1)}\cdot\varphi_2\ldots.-y_{n-1}^{(n-1)}\cdot\varphi_{n-1})}{y_1^{(n-2)}\cdot\psi-y_2^{(n-2)}\cdot\varphi_2\ldots.-y_{n-1}^{(n-2)}\cdot\varphi_{n-1}}=\frac{\psi'}{\psi}.$$

Or les formules (7.) et (9.) donnent immédiatement

$$y_1^{(n-1)}\cdot\psi-y_2^{(n-1)}\cdot\varphi_2-y_3^{(n-1)}\cdot\varphi_3-\ldots.-y_{n-1}^{(n-1)}\cdot\varphi_{n-1}$$
$$=(-1)^n\cdot\Sigma\pm y_1\cdot y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}\cdot y_{n-1}^{(n-1)},$$

$$y_1^{(n-2)}\cdot\psi-y_2^{(n-2)}\cdot\varphi_2-y_3^{(n-2)}\cdot\varphi_3-\ldots.-y_{n-1}^{(n-2)}\cdot\varphi_{n-1}$$
$$=(-1)^n\cdot\Sigma\pm y_1\cdot y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}\cdot y_{n-1}^{(n-2)}:$$

donc, en posant pour abréger:

$$(19.)\qquad \Sigma\pm y_1\cdot y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}\cdot y_{n-1}^{(n-2)}=\varpi,$$

et en observant que

$$\Sigma\pm y_1\cdot y_2'\ldots.y_{n-2}^{(n-3)}\cdot y_{n-1}^{(n-1)}=\frac{d\varpi}{dx}=\varpi',$$

il vient en vertu de (18.):

$$(20.)\qquad \frac{z_1''}{z_1'}+P+\frac{2\varpi'}{\varpi}=\frac{\psi'}{\psi}$$

où ϖ est déterminé par la formule (19.) et (voir la formule (17.))

$$(21.) \qquad \psi = \Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \cdot y_4'' \ldots . y_{n-1}^{(n-3)}.$$

En intégrant l'équation (20.), on aura

$$z_1' = \frac{\psi \cdot e^{-\int P dx}}{\varpi^2},$$

c'est à dire

$$z_1 = \int \frac{\psi \cdot e^{-\int P dx}}{\varpi^2} \cdot dx,$$

d'où, les valeurs de ψ et ϖ étant substituées à l'aide des formules (21.) et (19.),

$$(22.) \qquad z_1' = \frac{\Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \ldots . y_{n-1}^{(n-3)} \cdot e^{-\int P dx}}{(\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \ldots . y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)})^2},$$

$$(23.) \qquad z_1 = \int \frac{\Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \ldots . y_{n-1}^{(n-3)} \cdot e^{-\int P dx}}{(\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \ldots . y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)})^2} \cdot dx.$$

Quant à z_2, z_3, etc., les formules (17.) donnent immédiatement leurs valeurs. En effet, on aura généralement

$$z_r = -\int \frac{\Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \ldots . y_{r-1}^{(r-3)} \cdot y_r^{(r-2)} \cdot y_{r+1}^{(r-1)} \ldots . y_{n-1}^{(n-3)} \cdot e^{-\int P dx}}{(\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \ldots . y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)})^2} \cdot dx,$$

d'où, en posant

$$\frac{1}{R} = \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \ldots . y_{n-1}^{(n-2)},$$

on trouvera sans difficulté:

$$z_r = (-1)^{n-1} \cdot \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} \cdot e^{-\int P dx} \cdot dx.$$

La recherche précédente fournit donc cet important

Théorème. ***Soient***

$$(24.) \qquad y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots . \; y_{n-1}$$

$n-1$ ***intégrales particulières de l'équation***

$$(25.) \qquad y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots . + Sy' + Ty = 0:$$

cette équation sera aussi satisfaite par

$$(26.) \qquad y_n = y_1 \cdot z_1 + y_2 \cdot z_2 + \ldots . + y_{n-2} \cdot z_{n-2} + y_{n-1} \cdot z_{n-1}$$

où l'on a fait généralement

$$(27.) \qquad z_r = (-1)^{n-1} \cdot \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} \cdot e^{-\int P dx} \cdot dx$$

et

$$(28.) \qquad \frac{1}{R} = \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \cdot y_3'' \ldots . y_{n-1}^{(n-2)}.$$

Exemple 1. Pour $n=2$, c'est à dire pour l'équation

$$y''+Py'+Qy=0,$$

on aura

$$z_1=\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\cdot dx \quad \text{d'où} \quad y_2=y_1\cdot\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\cdot dx,$$

et l'intégrale complète est

$$y=K_1y_1+K_2y_1\cdot\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}\cdot dx.$$

Exemple 2. Pour $n=3$, c'est à dire pour l'équation

$$y'''+Py''+Qy'+Qy=0$$

il vient

$$z_1=\int\frac{y_2\cdot e^{-\int Pdx}\cdot dx}{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')^2}, \qquad z_2=-\int\frac{y_1\cdot e^{-\int Pdx}\cdot dx}{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')^2}$$

d'où

$$y_3=y_1\cdot\int\frac{y_2\cdot e^{-\int Pdx}\cdot dx}{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')^2}-y_2\cdot\int\frac{y_1\cdot e^{-\int Pdx}\cdot dx}{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')^2}$$

et l'intégrale complète est

$$y=K_1y_1+K_2y_2+K_3\left\{y_1\cdot\int\frac{y_2\cdot e^{\int -Pdx}\cdot dx}{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')^2}-y_2\cdot\int\frac{y_1\cdot e^{-\int Pdx}\cdot dx}{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')^2}\right\}.$$

Exemple 3. Pour $n=4$, c'est à dire pour l'équation

$$y^{IV}+Py'''+Qy''+Ry'+Sy=0$$

on aura

$$z_1=\int\frac{(y_2\cdot y_3'-y_3\cdot y_2')\cdot e^{-\int Pdx}}{D^2}\cdot dx, \qquad z_2=-\int\frac{(y_1\cdot y_3'-y_3\cdot y_1')\cdot e^{-\int Pdx}}{D^2}\cdot dx,$$

$$z_3=\int\frac{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')\cdot e^{-\int Pdx}}{D^2}\cdot dx$$

d'où

$$y_4=y_1\cdot\int\frac{(y_2\cdot y_3'-y_3\cdot y_2')\cdot e^{-\int Pdx}}{D^2}\cdot dx-y_2\cdot\int\frac{(y_1\cdot y_3'-y_3\cdot y_1')\cdot e^{-\int Pdx}}{D^2}\cdot dx$$
$$+y_3\cdot\int\frac{(y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1')\cdot e^{-\int Pdx}}{D^2}\cdot dx$$

et l'intégrale complète est

$$y=K_1y_1+K_2y_2+K_3y_3+K_4y_4.$$

ayant fait

$$y_1(y_2'y_3''-y_3'y_2'')+y_2(y_3'y_1''-y_1'y_3'')+y_3(y_1'y_2''-y_2'y_1'')=D.$$

Upsàla le 18 Mars 1849.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

13.

De l'équation différentielle *)

$$x^{n-1}(a_n+b_nx).y^{(n)}+x^{n-2}(a_{n-1}+b_{n-1}x).y^{(n-1)}+\ldots.+(a_1+b_1x)y'+b_0y=0.$$

(Par Mr. le Dr. *C. I. Malmstèn,* Prof. des Mathém. de l'université d'Upsàla.)

Euler, comme on sait, s'est occupé plusieurs fois et de différentes manières de l'intégration de l'équation différentielle du 2ième ordre

$$(1.)\qquad x^2(a+bx)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+x(c+dx)\cdot\frac{dy}{dx}+(e+fx).y=0:$$

équation qui aussi a traitée par Mr. ***Pfaff*** dans ses ***Disquisitiones Analyticae.*** Cette équation n'est qu'un cas particulier de la suivante:

$$(2.)\qquad x^{n-1}(a_n+b_nx).y^{(n)}+x^{n-2}(a_{n-1}+b_{n-1}x).y^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+(a_1+b_1x).y'+b_0.y=0,$$

dont l'intégration sera le sujet de ce mémoire.

Comme les cas où l'on peut trouver l'intégrale complète d'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, sont très-rares, et que généralement ils sont bornés aux deux suivants:

$$A_n.y^{(n)}+A_{n-1}.y^{(n-1)}+A_{n-2}.y^{n-2}+\ldots.+A_1y'+A_0y=0$$

et

$$A_nx^n.y^{(n)}+A_{n-1}.x^{n-1}.y^{(n-1)}+A_{n-2}x^{n-2}.y^{(n-2)}+\ldots.+A_1x.y'+A_0y=0,$$

où A_0, A_1, A_2, etc. sont constants, la recherche qu'on va lire ne sera pas sans intérêt, d'autant plus qu'elle présentera une application de la féconde „***Différentiation à indices quelconques***" à une équation d'un ordre supérieur, application parfaitement analogue à celle qu'a faite Mr. ***Liouville*** lui-même à l'intégration de l'équation différentielle

$$(3.)\qquad (mx^2+nx+p).y''+(qx+r).y'+sy=0.$$

---

*) Nous nous servirons dans la suite de la notation de ***Lagrange:***

$$y'=\frac{dy}{dx},\qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad\ldots.\quad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

I.

Posons, pour abréger:

$$(4.)\qquad \overline{\mu}_p = (\mu)_p = \frac{\mu.\overline{\mu-1}.\overline{\mu-2}\ldots.(\mu+1-p)}{1.2.3\ldots.p},$$

$$(5.)\qquad [\mu]_p = \mu.\overline{\mu-1}.\overline{\mu-2}\ldots.\overline{\mu+1-p},$$

d'où l'on tire

$$[\mu]_p = \Gamma(p+1).\overline{\mu}_p.$$

En différentiant μ fois l'équation (2.) et en déterminant μ de manière que l'équation

$$(6.)\qquad [\mu]_n.b_n+[\mu]_{n-1}.b_{n-1}+[\mu]_{n-2}.b_{n-2}+\ldots.+\mu.b_1+b_0 = 0$$

soit satisfaite, on aura

$$(7.)\qquad \begin{aligned} x^{n-1}(a_n+b_nx).y^{(\mu+n)}+x^{n-2}(A_{n-1}+B_{n-1}x).y^{(\mu+n-1)}+\ldots \\ \ldots+x^{n-r-1}(A_{n-r}+B_{n-r}x).y^{(\mu+n-r)}+\ldots \\ \ldots+x(A_2+B_2x).y^{(\mu+2)}+(A_1+B_1x).y^{(\mu+1)}, \end{aligned}$$

où généralement

$$(8.)\qquad \begin{cases} A_{n-r} = \overline{\mu}_r.[n-1]_r.a_n+\overline{\mu}_{r-1}.[n-2]_{r-1}.a_{n-1}+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+\overline{\mu}_1.[n-r]_1.a_{n+1-r}+a_{n-r}, \\ B_{n-r} = \overline{\mu}_r.[n]_r.b_n+\overline{\mu}_{r-1}.[n-1]_{r-1}.b_{n-1}+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+\overline{\mu}_1.[n+1-r]_1.b_{n+1-r}+b_{n-r}. \end{cases}$$

Cela étant, supposons

$$(9.)\qquad y^{(\mu+1)} = x^s.z.$$

L'équation (7.) se transformera alors en celle-ci:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} x^{n-1}(a_n+b_nx)z^{n-1}+x^{n-2}(C_{n-1}+D_{n-1}x).z^{(n-2)}+\ldots \\ \ldots+x^{n-p-1}(C_{n-p}+D_{n-p}.x).z^{(n-p-1)}+\ldots \\ \ldots+x(C_2+D_2x).z'+(C_1+D_1x).z = 0, \end{aligned}$$

où, pour abréger, nous avons fait:

$$(11.)\qquad \begin{cases} C_{n-p} = (n-1)_p.[s]_p.a_n+(n-2)_{p-1}.[s]_{p-1}.A_{n-1}+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+(n-p).[s]_1.A_{n-(p-1)}+A_{n-p}, \\ D_{n-p} = (n-1)_p.[s]_p.b_n+(n-2)_{p-1}.[s]_{p-1}.B_{n-1}+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+(n-p).[s]_1.B_{n-(p-1)}+B_{n-p}. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on détermine s de manière que $C_1 = 0$, c'est à dire que

$$(12.)\qquad [s]_{n-1}.a_n+[s]_{n-2}.A_{n-1}+[s]_{n-3}.A_{n-2}+\ldots.+[s]_1.A_2+A_1 = 0,$$

l'équation (10.), étant divisée par x, devient

(13.) $$x^{n-2}(a_n+b_n x).z^{(n-1)}+x^{n-3}(C_{n-1}+D_{n-1}x).z^{(n-2)}+\ldots$$
$$\ldots+x(C_3+D_3x).z''+(C_2+D_2x).z'+D_1.z=0:$$

expression de la même forme que (2.), mais qui est seulement du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre.

L'intégration de l'équation différentielle (2.) du $n^{\text{ième}}$ ordre a donc été réduite à dépendre d'une autre équation de la même forme, mais seulement de l'ordre $n-1$, dont l'intégration peut être reduite à son tour à celle d'une équation de l'ordre $n-2$ etc., jusqu'à ce qu'on parviendra à une équation du $2^{\text{ième}}$ ordre et de la forme de celle de Mr. ***Liouville.***

Donc il ne reste qu'à démontrer, que l'intégrale complète de (13.) donne aussi l'intégrale complète de (2.). La valeur générale de z est formée, comme on sait, par la somme des $n-1$ intégrales particulières, chacune multipliée par sa constante arbitraire. Cette valeur nous donne, à l'aide de (9.), une expression de y, contenant:

Ou ***A)*** $n-1$ ***constantes arbitraires.*** Dans ce cas la $n^{\text{ième}}$ valeur particulière de y, qui reste, se trouvera au moyen du théorème suivant que nous avons démontré dans le mémoire ***précédent,*** savoir:

Soient $y_1, y_2, \ldots. y_{n-1}$, $n-1$ ***intégrales particulières de l'équation linéaire***

$$y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}+\ldots.+Sy'+Ty=0,$$

cette équation sera aussi satisfaite par

(13.′) $$y_n=y_1z_1+y_2z_2+\ldots. y_{n-2}.z_{n-2}+y_{n-1}.z_{n-1},$$

où l'on a fait généralement

(13.″) $$\begin{cases} z_r=(-1)^{n-1}.\int\frac{dR}{dy_r^{(n-2)}}.e^{-\int P dx}dx \\ \textit{et} \\ \frac{1}{R}=\Sigma\pm y_1.y_2'.y_3'\ldots.y_{n-1}^{(n-2)}. \end{cases}$$

Ou ***B)*** n ***constantes arbitraires,*** précisément au nombre de celles que doit avoir l'intégrale complète.

Ou ***C)*** ***plus de n constantes arbitraires;*** et c'est généralement le cas où la valeur de μ est un nombre entier positif. Alors, en substituant dans l'équation (2.), on obtient quelques unes des constantes qui doivent avoir lieu pour que l'intégrale puisse satisfaire à la dite équation (2.). Par ce procédé le nombre des arbitraires est effectivement réduit à n.

L'équation (6.) qui donne la valeur de μ, est généralement du $n^{\text{ième}}$ dégré, et par consequent elle peut donner n valeurs différentes de μ. Parmi celles-ci on choisira, comme cela s'entend, celle qui conduit le plus aisément au bout. Quelquefois l'emploi de plusieurs valeurs de μ pourra faciliter le calcul; p. ex. dans le cas où de (13.) on peut sans difficulté tirer pour chacune des valeurs

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots.\ \mu_n$$

une valeur correspondante

$$z(\mu_1),\ z(\mu_2),\ \ldots.\ z(\mu_n).$$

Alors on tirera immédiatement de la formule (9.):

$$y = K_1 \cdot \int^{\mu_1+1} x^s z(\mu_1)\, dx^{\mu_1+1} + K_2 \cdot \int^{\mu_2+1} x^s . z(\mu_2) . dx^{\mu_2+1} + \ldots$$
$$\ldots + K_n \cdot \int^{\mu_n+1} x^s . z(\mu_n) . dx^{\mu_n+1}.$$

Cependant l'emploi de plusieurs valeurs de μ ne facilitera pas souvent le calcul; car l'équation (2.), étant d'un ordre supérieur, l'équation (13.) l'est également, et il faudra alors les plus souvent en entreprendre l'intégration spéciale pour chaque valeur particulière de μ. Il en est tout autrement si l'équation (2.) est de la forme de celle de Mr. ***Liouville***. Dans ce cas l'équation (13.) devient du 1er ordre.

II.

Nous appliqueront maintenant la méthode précédente à quelques exemples.

Exemple 1.

$$(14.) \qquad x^3 y''' - 2x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0;$$

n étant $= 3$ et

$$a_3 = a_2 = a_1 = 0,$$
$$b_3 = 1,\quad b_2 = -2,\quad b_1 = 4,\quad b_0 = -4.$$

L'équation (6.) devient

$$(15.) \qquad \mu(\mu-1)(\mu-2) - 2\mu(\mu-1) + 4\mu - 4 = (\mu-1)(\mu-2)^2 = 0,$$

d'où

$$\mu_1 = 2,\quad \mu_2 = 1.$$

A) Pour $\mu = 2$ on tirera de (7.):

$$x^2 y^{v} + 4x y^{iv} + 2y''' = 0$$

et, si

$$y''' = z,$$

on a

$$x^2z''+4xz'+2z = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = y''' = \frac{K_1}{x}+\frac{K_2}{x^2}.$$

Cela posé, on obtient

$$y'' = K_1\log x-\frac{K_2}{x}+K_3,$$

$$y' = K_1(x\log x-x)-K_2\log x+K_3x+K_4,$$

$$y = K_1\left(\frac{x^2\log x}{2}-\frac{3x^2}{4}\right)-K_2(x\log x-x)+K_3\frac{x^2}{2}+K_4x.$$

Mais comme cette valeur de y contient quatre constantes, il faut en déterminer une au moyen de la substitution dans (14.). Cette substitution donnera $K_2=0$; donc l'intégrale de (14.) se reduit, après une modification legère des constantes, à

$$(16.)\qquad y = K_1.x_2\log x+K_2x_2+K_3x.$$

B) Pour l'autre valeur $\mu=1$ on tirera de (7.)

$$xy^{IV}+y''' = 0$$

et, si $y'''=z$,

$$xz'+z = 0,$$

d'où, en intégrant, on aura

$$z = y''' = \frac{K_1}{x},$$

$$y'' = K_1\log x+K_2,$$

$$y' = K_1(x\log x-x)+K_2x+K_3,$$

et enfin, après une transformation très simple des constantes arbitraires,

$$y = K_1.x^2\log x+K_2x^2+K_3x;$$

ce qui est précisement la même valeur qui a été trouvée plus haut.

Exemple 2.

$$(17.)\qquad x^3y'''+x(7x+1)y''+(10x+1)y'+2y = 0;$$

n étant $=3$ et

$$a_3=0,\quad a_2=1,\quad a_1=1,$$

$$b_3=1,\quad b_2=7,\quad b_1=10,\quad b_0=2.$$

L'équation (6.) donne ici

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)+7\mu(\mu-1)+10\mu+2 = (\mu+2)(\mu+1)^2 = 0,$$

d'où

$$\mu_1 = -2, \quad \mu_2 = -1.$$

A) ***Pour*** $\mu = -2$, l'équation (7.) devient

$$(18.) \quad x^3 y' + x(x+1)y - \int y\,dx.$$

Supposons

$$\int y\,dx = xu,$$

d'où

$$(19.) \quad y = xu' + u,$$
$$y' = xu'' + 2u'.$$

Cela, substitué dans (18.), donnera

$$(20.) \quad x^2 u'' + (3x+1)u' - u = 0.$$

En intégrant, on obtiendra

$$u = K_1 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + K_2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \cdot \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x},$$

et à l'aide de (19.), avec une modification légère des constantes arbitraires,

$$y = K_1 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + K_2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \int e^{-\frac{1}{x}} dx.$$

Ayant trouvé deux intégrales particulières de l'équation (17.), savoir

$$y_1 = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \int e^{-\frac{1}{x}} dx,$$

nous en tirerons cette troisième à l'aide des formules (13′.) et (13″.) (*n* étant = 3):

$$(21.) \quad y_3 = y_1 z_1 + y_2 z_2, \text{ où}$$

$$z_1 = \int \frac{y_2\, e^{-\int P dx}}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')^2} dx, \quad z_2 = -\int \frac{y_1\, e^{-\int P dx}}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')^2} dx,$$

c'est à dire par la substitution des valeurs de y_1 et de y_2, et en observant que $P = \frac{7x+1}{x^2}$,

$$z_1 = \int \left(\frac{1}{x} \int e^{-\frac{1}{x}} dx\right) dx = \log x \int e^{-\frac{1}{x}} dx - \int e^{-\frac{1}{x}} \log x\, dx,$$

$$z_2 = -\log x.$$

Ces valeurs, substituées dans (21.), donneront

$$y_3 = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \int e^{-\frac{1}{x}} \log x\, dx$$

d'où l'on aura l'intégrale complète

$$(22.)\qquad y=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left\{K_1+K_2\int e^{-\frac{1}{x}}dx+K_2\int e^{-\frac{1}{x}}\log x\,dx\right\}.$$

B) Pour $\mu=-1$ l'équation (7.) donnne

$$x^2y''+(4x+1)y'+2y=0,$$

et en intégrant:

$$y=K_1\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}+K_2.\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\int e^{-\frac{1}{x}}dx;$$

c'est à dire les mêmes valeurs particulières (20′.), que nous avons obtenues en supposant $\mu=-2$. Voilà donc un des cas, où l'emploi de valeurs différentes de μ ne donne pas des résultats différents, et où conséquemment le profit en est nul.

III.

Avant de quitter ce sujet nous nous occuperons des deux équations suivantes:

$$(23.)\qquad x^n(a_n+b_nx^r).y_x^{(n)}+x^{n-1}(a_{n-1}+b_{n-1}x^r).y_x^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+x(a_1+b_1x^r)y_x'+(a_0+b_0x^r).y=0,$$

et

$$(24.)\qquad (a_n+b_ne^{rx}).y_x^{(n)}+(a_{n-1}+b_{n-1}e^{rx}).y_x^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+(a_1+b_1e^{rx}).y_x'+(a_0+b_0e^{rx}).y=0,$$

dont l'intégration se réduit facilement à celle de (2.).

Quant à la première (23.), en posant $x^r=v$ et en faisant comme à l'ordinaire

$$y_x^{(p)}=\frac{d^py}{dx^p}\quad\text{et}\quad y_v^{(k)}=\frac{d^ky}{dv^k},$$

on aura généralement

$$x^p.y_x^{(p)}=\sum_{k=1}^{k=p}S\varphi(p,k).v^k.y_v^{(k)},$$

où

$$(25.)\qquad \varphi(p,k)=(-1)^k.\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)}.\sum_{i=1}^{i=k}S(-1)^i.(k)_i.(ir)_p.$$

En substituant dans (23.) il vient

$$(26.)\qquad v^n(M_n+N_nv).y_v^{(n)}+v^{n-1}(M_{n-1}+N_{n-1}v).y_v^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+v^2(M_2+N_2v).y_v''+v(M_1+N_1v).y_v'+(M_0+N_0v)y=0,$$

où, pour abréger, nous avons posé les expressions

$$M_0 = a_0 \text{ et } M_k = \overset{p=n}{\underset{p=k}{S}}.\varphi(p,k).a_p \text{ pour } k > 0,$$

$$N_0 = b_0 \text{ et } N_k = \overset{p=n}{\underset{p=k}{S}}.\varphi(p,k).b_p \text{ pour } k > 0,$$

$\varphi(p,k)$ étant déterminé par (25.). Cela étant, faisons

$$y = v^s.z,$$

et nous aurons

$$y_v^{(p)} = \overset{i=p}{\underset{i=0}{S}}[s]_{p-i}.(p)_i.v^{s+i-p}.z_v^{(i)},$$

et en substituant dans (26.):

(27.) $$v^n(M_n' + N_n'v).z_v^{(n)} + v^{n-1}(M_{n-1} + N_{n-1}v).z_v^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + v^2(M_2' + N_2'v)z_v'' + v(M_1' + N_1'v)z_v' + (M_0' + N_0'v).z = 0,$$

où, pour abréger, nous avons fait

$$M_k' = \overset{p=n}{\underset{p=k}{S}}[s]_{p-k}.(p)_k.M_p, \text{ et } N_k' = \overset{p=n}{\underset{p=k}{S}}[s]_{p-k}.(p)_k.N_p.$$

En déterminant s de manière que $M_0' = 0$, c'est à dire que

(28.) $$[s]_n.M_n + [s]_{n-1}.M_{n-1} + [s]_{n-2}.M_{n-2} + \ldots + [s]_1.M_1 + M_0 = 0,$$

nous aurons, en vertu de (27.),

(29.) $$v^{n-1}(M_n' + N_n'v).z_v^{(n)} + v_{n-2}.(M_{n-1}' + N_{n-1}'v).z_v^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + v(M_2' + N_2'v).z''v + (M_1' + N_1'v).z_v' + N_0'z,$$

c'est à dire une équation de la forme (2.) traitée plus haut. Dans le cas de

$$b_n = b_{n-1} = b_{n-2} = \ldots = b_1 = 0,$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = \ldots = a_1 = a_0 = 0,$$

en posant

$$r - n = m \quad \text{et} \quad \frac{b_0}{a^n} = c,$$

nous tirerons de l'équation (23.) celle-ci:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = cx^m y,$$

équation, dont Mr. ***Kummer*** n'a trouvé l'intégrale que pour le cas où m est un nombre ***entier positif*** (Voy. ***Crelle*** Journ. Tome XIX. p. 286).

Quant à l'équation (24.), faisons $e^x = v$, d'où

$$y_x^{(k)} = \overset{i=k}{\underset{i=1}{S}}.C'^{(k-i)}(i).v^i y_v^{(i)},$$

où $C'^{(p)}_{(n)}$ désigne la p^{me} classe de toutes les combinaisons (avec répétitions) des nombres $1, 2, 3, \ldots. n$, où tous les éléments sont considérés comme facteurs et tous les termes liés entre eux par le signe $+$. En substituant dans (24.), on aura

$$(29.)\quad \begin{cases} v^n(K_n+L_nv^r).y_v^{(n)}+v^{n-1}(K_{n-1}+L_{n-1}v^r).y_v^{(n-1)}+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+v^k(K_k+L_kv^r).y_v^{(k)}+\ldots \\ \ldots+v^2(K_2+L_2v^r).y_v''+v(K_1+L_1v^r).y_v'+(K_0+L_0v^r).y=0 \end{cases}$$

où

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= a_0, \text{ et généralement } K_k=\sum_{i=k}^{i=n} C'^{(i-k)}(k).a_i \\ L_0 &= b_0, \text{ et généralement } L_k=\sum_{i=k}^{i=n} C'^{(i-k)}(k).b_i \end{aligned}\right\} \text{ pour } k>0.$$

L'équation (30.) a la forme de celle (23.), que nous venons de discuter.

Upsàla le 18 Mars 1849.

14.

De l'équation différentielle

$$y_x'' + \frac{y_x'}{x} + Ax^m y = 0.$$

(Par Mr. le Dr. *C. J. Malmstèn*, prof. des Mathém. à l'Univers. d'Upsàla.)

---

§. 1. L'équation différentielle

$$(1.) \qquad y_x' + ay^2 + Ax^m = 0$$

connue sous le nom de *l'équation de Riccati*, parcequ'elle fut présentée pour la première fois par *Riccati*, en 1775, dans les „*Acta Eruditorum*", a été l'objet d'une attention particulière des Analystes. On était parvenu à trouver une infinité de cas où son intégration sous forme finie soit possible; mais les tentative des Analystes n'ont pas réussi jusqu'ici à séparer les variables pour une valeur quelconque de m, et à faire dependre par ce moyen l'intégration elle-même de quadratures indéfinies. Cependant la possibilité restait et provoquait toujours des nouveaux essais, jusqu'à ce que Mr. *Liouville* dans son excellent mémoire: „*Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati*" (Journ. des Math. Tome VI. p. 1) eût démontré que les cas déjà trouvés

$$(2.) \qquad m = -\frac{4n}{2n \pm 1}$$

sont les seuls où l'intégration par des quadratures indéfinies soit possible sous forme finie.

§. 2. En faisant dans (1.)

$$(3.) \qquad y = \frac{d \log u}{a.dx} = \frac{u_x'}{a.u},$$

on obtient sans difficulté, en posant $a.b = A$,

$$(4.) \qquad u_x'' + Ax^m.u = 0.$$

Cette équation du 2me ordre appartient au genre de celle de *Riccati*, et elle peut donc être intégrée au moyen de quadratures indéfinies, si

$$(4\tfrac{1}{2}.) \qquad m = -\frac{4n}{2n \pm 1}.$$

Mais il existe une autre équation du 2me ordre, savoir

$$(5.) \qquad y_x'' + \frac{ry_x'}{x} + sy = 0,$$

qui est aussi du genre de celle de ***Riccati.*** En effet, en posant

$$y = \frac{u_x'}{a.u}, \qquad x^{\frac{1}{2}m+1} = (\tfrac{1}{2}m+1).t$$

et en faisant $a.b = A$, l'équation (1.) se transforme en celle-ci:

$$(6.) \qquad u_t'' + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{u_t'}{t} + Au = 0,$$

dont l'intégration est toujours possible sous forme finie, si

$$m = -\frac{4n}{2n \pm 1}, \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{m}{m+2} = \pm 2n.$$

Donc la condition d'intégrabilité pour (5.) est, que

(7.) ***r soit un nombre pair, positif ou négatif.***

§. 3. Nous venons de trouver ici deux équations différentes du 2me ordre (4. et 5.) qui appartiennent au genre de celle de ***Riccati***, et les conditions de leur intégrabilité ($4\frac{1}{2}$. et 7.). Mais ces deux équations peuvent être subordonnées comme cas particuliers à l'équation générale

$$(8.) \qquad y_x'' + \frac{ry_x'}{x} + Ax^m y = 0,$$

de laquelle découlent (4.) ou (5.) si le coefficient r, ou l'exposant m, est $= 0$. Donc l'équation (8.) peut être intégrée sous forme finie ***dans les cas où une des quantités r et m est*** $= 0$, ***et où l'autre remplit la condition d'intégrabilité*** (qui pour le coefficient r est, d'être un nombre pair, et pour l'exposant m, d'être de la forme $-\frac{4n}{2n \pm 1}$).

Nous ferons voir dans ce petit mémoire que l'équation (8.) est encore intégrable sous forme finie dans une infinité d'autres cas. En effet, par une transformation très facile, on trouvera pour condition d'intégrabilité, une relation très-simple entre m et r, de laquelle on conclura, comme corollaire, que l'équation (8.), dans beaucoup d'autres cas, peut toujours être intégrée en forme finie, si r et m satisfont tous deux à leurs conditions d'intégrabilité respectives, savoir

$$r = \pm 2n_1 \quad \text{et} \quad m = -\frac{4n}{2n \pm 1},$$

n et n_1 étant des nombres entiers quelconques, sans qu'il était nécessaire que l'un ou l'autre (n ou n_1) soit $= 0$.

§. 4. En posant dans (8.)

$$(9.) \qquad y = e^{\int U dx}$$

on obtient

$$(10.) \qquad u_x' + u^2 + \frac{ru}{x} + Ax^m = 0.$$

Faisons

$$(11.) \qquad x = t^\beta \quad \text{et} \quad u = kt^p z,$$

d'où

$$dx = \beta . t^{\beta-1} dt \quad \text{et} \quad du = pkt^{p-1} . z\, dt + kt^p dz,$$

$$u_x' = \frac{pk}{\beta} \cdot t^{p-\beta} . z + \frac{k}{\beta} \cdot t^{p+1-\beta} . z_t';$$

on trouve, en substituant dans (10.):

$$\frac{k}{\beta} \cdot t^{p+1-\beta} . z_t' + k^2 . t^{2p} z^2 + k\left(\frac{p}{\beta} + r\right) . t^{p-\beta} z + At^{m\beta} = 0,$$

et en posant

$$(12.) \qquad k = \frac{1}{\beta}, \quad p = 1 - \beta,$$

et après avoir multiplié chaque terme par $t^{2\beta-2}$:

$$(13.) \qquad z_t' + z^2 + (1 - \beta + \beta r) \cdot \frac{z}{t} + \beta^2 . A . t^{\beta(m+2)-2} = 0.$$

Cela posé, déterminons β de sorte que

$$1 - \beta + \beta r = 0,$$

c'est à dire que

$$\beta = \frac{1}{1-r},$$

nous aurons en vertu de (12.):

$$(14.) \qquad k = 1 - r, \quad p = \frac{r}{r-1};$$

donc l'équation (13.) est changée en celle-ci:

$$(15.) \qquad z_t' + z^2 + \frac{A}{(1-r)^2} \cdot t^{\frac{m+2r}{1-r}} = 0,$$

qui, étant de la forme de ***Riccati***, peut être intégrée, si

$$\frac{m+2r}{1-r} = -\frac{4n}{2n+1};$$

n étant un nombre entier quelconque, ou zéro. Voilà donc démontrée le suivant

Théorème I. ***L'équation différentielle linéaire du 2me ordre***

$$(16.) \qquad y_x'' + \frac{ry_x'}{x} + Ax^m y = 0$$

est toujours intégrable en forme finie par des quadratures indéfinies, si entre m et r la relation

$$\frac{m+2r}{1-r} = -\frac{4n}{2n\pm 1},$$

a lieu, ou, ce qui revient au même, si

$$(17.) \qquad m = -\frac{4(n\pm\frac{1}{2}r)}{2n\pm 1};$$

n étant un nombre entier quelconque, ou zéro.

Corollaire. Donc pour $r=0$ ***il faut que*** $m = -\frac{4n}{2n\pm 1}$,

pour $m=0$ - - - $r = \pm 2n$.

Ces deux cas particuliers étaient les seuls connus jusqu'ici.

§. 5. Supposons dans (17.):

$$m = -\frac{4s}{2s\pm 1},$$

s étant un nombre entier quelconque, nous aurons

$$r = \frac{(2s\pm n)}{2s\pm 1};$$

où cependant il faut observer que les signes doubles du numérateur et du dénominateur sont parfaitement indépendants les uns des autres. Donc on peut poser

$$(18.) \qquad r = \pm\frac{2i}{2s\pm 1};$$

i désignant un nombre entier quelconque. Delà suit:

Théorème II. Si dans l'équation différentielle linéaire du 2me ordre

$$(19.) \qquad y_x'' + \frac{ry_x'}{x} + Ax^m y = 0,$$

m satisfait à la condition d'intégrabilité de Riccati,

$$(20.) \qquad m = -\frac{4s}{2s\pm 1}:$$

l'équation est toujours intégrable en forme finie par des quadratures indéfinies, si

$$(21.) \qquad r = \pm\frac{2i}{2s\pm 1};$$

i étant un nombre entier quelconque.

Corollaire. Désignons par s_1 un nombre entier quelconque, et faisons

$$i = s_1(2s \pm 1).$$

Cela donne

$$(22.) \qquad r = \pm 2s_1.$$

Donc *l'équation* (19.) ***est intégrable en forme finie par des quadratures indéfinies, toutes les fois que l'exposant m satisfait à la condition d'intégrabilité de Riccati et qu'en même temps le coefficient r est un nombre pair quelconque, c'est à dire, si en même temps***

$$r = \pm 2s_1 \quad et \quad m = -\frac{4s}{2s \pm 1};$$

s_1 ***et s désignant des nombres entiers quelconques***

§. 6. Enfin nous ferons voir que la condition d'intégrabilité du Théorème I. est la seule qui existe, et que par conséquent sans cela l'équation (16.) ne peut être intégrée par un nombre limité des fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques de x; même si l'on y joint le signe $\int$ d'intégration indéfinie, relative à cette variable indépendante.

Pour cela nous recourrons à ce que Mr. ***Liouville*** à démontré dans le mémoire cité plus haut („***Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati***" Journ. d. Mathém. Tome VI. p. 1), savoir qu'une condition nécessaire de l'intégrabilité de l'équation

$$(23.) \qquad y_x'' = \left(A + \frac{B}{x^2}\right) y$$

en forme finie au moyen des quadratures indéfinies relatives à x, est, que B doit être de la forme

$$B = n(n+1);$$

n étant un nombre entier quelconque. L'expression (23.) désigne un nombre quelconque fini des fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques.

Transformant l'équation

$$(24.) \qquad y_x'' + \frac{r y_x'}{x} + Ax^m y$$

dans une autre de la forme (23.), en faisant

$$(25.) \qquad x = z^q, \quad y = z^{pq} . u,$$

on obtient

$$y_x' = \frac{z^{q(p-1)+1}}{q} \cdot u_z' + pz^{q(p-1)} . u,$$

$$y_x'' = \frac{z^{q(p-2)+2}}{q^2} \cdot u_z'' + \frac{2pq - q + 1}{q^2} \cdot z^{q(p-2)+1} . u_z' + p(p-1) . z^{q(p-2)} . u;$$

et delà, en substituant dans (24.), après avoir multiplié chaque terme par

$$q^2 . z^{-q(p-2)-2},$$

on tire

$$(25\tfrac{1}{2}.) \qquad u_z'' + \frac{(2pq-q+1+qr)}{z} . u_z' + q^2 . u\left(Az^{q(m+2)-2} + \frac{p(p-1+r)}{z^2}\right).$$

Puis, en déterminant p et q de sorte que

$$(26.) \qquad q = \frac{2}{m+2}, \qquad p = \frac{q-qr-1}{2q} = \frac{1-r}{2} - \frac{1}{2q},$$

d'où

$$p(p-1+r) = -\tfrac{1}{4}\left\{(1-r)^2 - \frac{1}{q^2}\right\},$$

on tirera de $(25\tfrac{1}{2}.)$:

$$u_2'' + u\left(q^2 A - \frac{q^2(1-r)^2-1}{4z^2}\right) = 0,$$

et si l'on y substitue la valeur de q (26.):

$$(27.) \qquad u_z'' + \frac{U}{(m+2)^2}\left(4A - \frac{4(1-r)^2-(m+2)^2}{4z^2}\right) = 0.$$

Cette équation, comparée avec (23.), donne

$$B = \frac{4(1-r)^2-(m+2)^2}{4(m+2)^2},$$

donc on a pour condition d'intégrabilité de l'équation (27.), ou, ce qui revient au même, de l'équation (24.):

$$(28.) \qquad n(n+1) = \frac{4(1-r)^2-(m+2)^2}{4(m+2)^2};$$

n étant un nombre entier quelconque, ou zéro. Mais cette équation donne immédiatement

$$m = -2 \pm \frac{2(1-r)}{2n+1},$$

c'est à dire, selon qu'on met le signe $+$ ou $-$:

$$m = -\frac{4(n+\frac{1}{2}r)}{2n+1}, \quad \text{ou} \quad m = -\frac{4(n-\frac{1}{2}r)}{2n-1}.$$

Ces deux valeurs de m, en mettant dans la dernière $n-1$ à la place de n, peuvent être exprimées par la seule formule

$$m = -\frac{4(n\pm\frac{1}{2}r)}{2n\pm1}.$$

Donc nous voilà arrivé à cet important

Théorème III. ***Si l'équation différentielle linéaire du 2me ordre***

$$(29.) \qquad y_x'' + \frac{r y_x'}{x} + Ax^m y = 0$$

doit être intégrable par des quadratures indéfinies relatives à x, ***il faut et il suffit qu'entre*** m ***et*** r ***la relation***

$$(30.) \qquad m = -\frac{4(n \pm \frac{1}{2}r)}{2n \pm 1}$$

ait lieu; n ***étant un nombre entier quelconque.***

Corollaire. Pour $m = -1$, c'est à dire pour l'équation

$$x.y_x'' + r.y_x' + Ay = 0,$$

on a

$$\pm r = n + \tfrac{1}{2};$$

n étant un nombre entier. C'est la condition d'intégrabilité de l'équation de Mr. ***Liouville,*** dans le cas où sa méthode (différentiation à indices quelconques) devient fautive.

P. S. Si l'on voulait examiner de la même manière la condition d'intégrabilité de l'équation encore plus générale

$$(31.) \qquad y_x'' + \frac{r y_x'}{x} = \left(Ax^m + \frac{s}{x^2}\right) y,$$

on obtiendrait pour résultat une relation entre r, m et s qui redonnerait comme cas particuliers les conditions déjà trouvées. En effet, si l'on fait

$$x = z^q \quad \text{et} \quad y = z^{pq}.u,$$

on aura, en substituant dans (31.):

$$(32.) \qquad u_z'' + \frac{(2pq - q + 1 + qr)}{z}.u_z' = q^2.u\left(Az^{q(m+2)-2} - \frac{p(p-1) + pr - s}{z^2}\right);$$

et delà, puisque

$$2pq - q + 1 + qr = 0,$$

on obtient

$$u_z'' = u\left(q^2.A.z^{q(m-2)-2} + \frac{q^2((1-r)^2 + 4s) - 1}{4z^2}\right).$$

Puis, en déterminant q de sorte que

$$q = \frac{2}{m+2},$$

on aura

$$u_z'' = u\left\{\left(\frac{2}{m+2}\right)^2 A + \frac{4((1-r)^2 + 4s) - (m+2)^2}{4(m+2)^2.z^2}\right\},$$

ce qui donne pour condition d'intégrabilité:

$$\frac{4((1-r)^2+4s)-(m+2)^2}{4(m+2)^2} = n(n+1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$m = -2 \pm \frac{2\sqrt{((1-r)^2+4s)}}{2n+1}.$$

Delà

Théorème IV. *Si l'équation différentielle linéaire du 2me ordre*

$$(33.) \quad y_x'' + \frac{ry_x'}{x} = \left(Ax^m + \frac{s}{x^2}\right)y$$

doit être intégrable par des quadratures indéfinies relatives à x, *il faut et il suffit qu'entre* r, m *et* s *la relation*

$$(34.) \quad m = -2 \pm \frac{2\sqrt{((1-r)^2+4s)}}{2n+1},$$

ait lieu, n *étant un nombre entier quelconque.*

Corollaire 1. Pour $s=0$, c'est à dire pour l'équation (29.), on retrouvera la condition (30.).

Corollaire 2. Pour $s=r$, c'est à dire pour l'équation

$$(35.) \quad y_x'' + \frac{ry_x'}{x} = \left(Ax^m + \frac{r}{x^2}\right)y$$

on aura la condition suivante d'intégrabilité:

$$(36.) \quad m = -\frac{4(n \pm \frac{1}{2}r)}{2n \mp 1}.$$

Corollaire 3. Pour $r=1$, c'est à dire (en posant $s=a^2$) pour l'équation

$$(37.) \quad y_x'' + \frac{y_x'}{x} = \left(Ax^m + \frac{a^2}{x^2}\right),$$

la condition d'intégrabilité devient

$$(38.) \quad m = -4 \cdot \frac{n \mp (a-\frac{1}{2})}{2n \pm 1}.$$

Corollaire 4. Pour $r=0$, c'est à dire (en posant $s=a(a+1)$) pour l'équation

$$(39.) \quad y_x'' = \left(Ax^m + \frac{a(a+1)}{x^2}\right)y,$$

la condition d'intégrabilité est

$$(40.) \quad m = -\frac{4(n \mp a)}{2n \pm 1}.$$

Upsàla le 18 Mars 1849.

15.

Note sur les fonctions Elliptiques.

(Par Mr. le Dr. *C. I. Malmstèn,* Prof. des Mathém. à l'université d'Upsàla.)

Dans cette note nous démontrerons une expression nouvelle du rapport entre les fonctions elliptiques complètes $E'(k)$ et $F'(k)$, qui nous semble mériter l'attention des Géomètres.

Soit

$$k'^2 = 1 - k^2,$$

on tirera des équations connues

$$(1.)\quad \begin{cases} k \cdot \dfrac{dE'}{dk} = E' - F', \\ k.k'^2 \cdot \dfrac{dF'}{dk} = E' - k'^2 . F' \end{cases}$$

sans difficulté celle-ci:

$$(2.)\quad k^2 . k'^2 \cdot \frac{dF'}{dk} \cdot \frac{dE}{dk} = \overline{E'}^2 - (1 + k'^2) . E' . F' + k'^2 . \overline{F'}^2.$$

Ici et dans la suite E' et F' signifie $E'(k)$ et $F'(k)$. Mais les équations (1.) peuvent aussi être écrites comme suit:

$$F' = E' - k \cdot \frac{dE}{dk},$$

$$E' = k'^2 . F' + k . k'^2 \cdot \frac{dF}{dk},$$

et en les multipliant on aura, ayant divisé par $\overline{F'}^2$:

$$\frac{E'}{F'} = k'^2 \cdot \frac{E'}{F'} - k . k' \left\{ \frac{F' \cdot \dfrac{dE'}{dk} - E' \cdot \dfrac{dF'}{dk}}{\overline{F'}^2} \right\} - \frac{k^2 . k'^2}{\overline{F'}^2} \cdot \frac{dF'}{dk} \cdot \frac{dE'}{dk},$$

c'est à dire, en vertu de (2.):

$$(3.)\quad (y^2 - 2k'^2 y + k'^2)\, dk + k . k'^2\, dy = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$y = \frac{E'(k)}{F'(k)}.$$

Maintenant, pour transformer l'équation (3.) dans une autre entre x (variable indépendante) et u (variable dépendante), de la forme

$$(Ax^2 + Bx + C)\left(u^2 + \frac{du}{dx}\right) + (Dx + E) . u + F = 0,$$

supposons

$$k = z, \qquad y = v + s.u,$$

où z, v et s sont des fonctions indéterminées de x. La substitution faite dans (3.), donne

$$(4.) \quad v^2.z' + 2suvz' + s^2u^2z' - 2vz'(1-z^2) - 2suz'(1-z^2) + z'(1-z^2) + v'z(1-z^2) + s'uz(1-z^2) + sz(1-z^2).\frac{du}{dx} = 0,$$

où

$$s' = \frac{ds}{dx}, \qquad v' = \frac{dv}{dx}, \qquad z' = \frac{dz}{dx}.$$

En supposant

$$(5.) \quad s = \frac{z(1-z^2)}{z'},$$

d'où

$$s' = 1 - 3z^2 - \frac{z(1-z^2).z''}{z'^2},$$

l'équation (4.) se transforme en

$$\frac{z^2(1-z^2)^2}{z'^2}\left(u^2 + \frac{du}{dx}\right) + u\left\{2vz(1-z^2) - 2z(1-z^2)^2 + z(1-z^2)\left(1 - 3z^2 - \frac{z(1-z^2).z''}{z'^2}\right)\right.$$
$$+ z'(v^2 - 2v(1-z^2) + 1 - z^2) + v'z(1-z^2) = 0,$$

d'où, en supposant

$$(6.) \quad v = 1 - z^2, \qquad v' = -2z.z',$$

on aura, ayant divisé par $1-z^2$:

$$(7.) \quad z^2(1-z^2)\left(u^2 + \frac{du}{dx}\right) + uzz'.\left(1 - 3z^2 - \frac{z(1-z^2).z''}{z'^2}\right) - z^2.z'^2 = 0.$$

Or, en faisant

$$(8.) \quad 2zz' = m \text{ (une const.)}, \quad \text{d'où} \quad z = (b + mx)^{\frac{1}{2}},$$

on obtiendra

$$(9.) \quad (m^2x^2 + m(2b-1)x + b^2 - 1)\left(u^2 + \frac{du}{dx}\right) + mu(2mx + 2b - 1) + \tfrac{1}{4}m^2 = 0,$$

ou, en posant $2b - 1 = c$:

$$(10.) \quad (m^2x^2 + mcx + \tfrac{1}{4}(c^2-1))\left(u^2 + \frac{du}{dx}\right) + mu(2mx + c) + \tfrac{1}{4}m^2 = 0,$$

où

$$(11.) \quad y = \frac{E'(k)}{F'(k)} = \frac{E'((\frac{1}{2}(1+c+2mx))^{\frac{1}{2}})}{F'((\frac{1}{2}(1+c+2mx))^{\frac{1}{2}})} = \tfrac{1}{2}(1 - c - 2mx) + \frac{1-(c+2mx)^2}{2m}.u,$$

c'est à dire, à l'aide de la seconde des formules (1.):

$$(12.) \qquad u = \frac{dF'((\frac{1}{2}(1+c+2mx))^{\frac{1}{2}})}{dx} \cdot \frac{1}{F'((\frac{1}{2}(1+c+2mx))^{\frac{1}{2}})}.$$

Soit, pour abréger,

$$(13.) \qquad t = F((\tfrac{1}{2}(1+c+2mx))^{\frac{1}{2}}),$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{t'}{t}.$$

Substituant dans (10.) on aura

$$(14.) \qquad (m^2x^2+mcx+\tfrac{1}{4}(c^2-1)).t''+m(2mx+c).t'+\tfrac{1}{4}m^2.t = 0.$$

En différentiant cette équation $n-1$ fois, on aura

$$(m^2x^2+mcx+\tfrac{1}{4}(c^2-1)).t^{(n+1)}+m.n(2mx+c).t^{(n)}+\tfrac{1}{4}((2n-1)^2m^2).t^{(n-1)} = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(15.) \qquad \frac{t^{(n)}}{t^{(n-1)}} = \cfrac{-\dfrac{(2n-1)^2.m}{4(2mx+c)}}{n+\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2-1)}{2m^2x+mc}\cdot\dfrac{t^{(n+1)}}{t^{(n)}}},$$

et en faisant $n = 1, 2, 3$, etc.:

$$(16.) \qquad \frac{t'}{t} = u = \cfrac{-\dfrac{m}{2mx+c}}{1-\cfrac{3\cdot3\cdot\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2-1)}{(2mx+c)^2}}{2-\cfrac{5\cdot5\cdot\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2-1)}{(2mx+c)^2}}{3-\cfrac{7\cdot7\cdot\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2-1)}{(2mx+c)^2}}{4-\cfrac{9\cdot9\cdot\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2-1)}{(2mx+c)^2}}{\ddots\;-\cfrac{(2n-1)^2\cdot\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2-1)}{(2mx+c)^2}}{n+\dfrac{m^2x^2+cmx+\frac{1}{4}(c^2+1)}{2m^2x+mc}\cdot\dfrac{t^{(n+1)}}{t^{(n)}}}}}}}},$$

où, à cause de (13.):

$$\frac{t^{(n+1)}}{t^{(n)}} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1)m\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi.\sin^{2n+2}\varphi}{(1-\frac{1}{2}(1+c+2mx)\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n+3)}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi.\sin^{2n}\varphi}{(1-\frac{1}{2}(1+c+2mx)\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n+1)}}}.$$

Pour $x = 0$ on tirera des formules précédentes:

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{E'\sqrt{(\frac{1}{2}(1+c))}}{F'\sqrt{(\frac{1}{2}(1+c))}} = \frac{1}{2}(1-c) + \dfrac{1-c^2}{2m}\cdot u_1, \\ u_1 = \cfrac{-\frac{m}{2c}}{1+\cfrac{3\cdot 3\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{2+\cfrac{5\cdot 5\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{3+\cfrac{7\cdot 7\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{4+\cfrac{9\cdot 9\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{\ddots\;(n-1)+\cfrac{(2n-1)^2\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{n-\frac{1-c^2}{4c}\cdot R_n}}}}}}, \end{cases}$$

où

$$R_n = \tfrac{1}{2}(2n+1)\cdot \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi\,.\sin^{2n+2}\varphi}{(1-\frac{1}{2}(1+c)\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n+3)}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi\,.\sin^{2n}\varphi}{(1-\frac{1}{2}(1+c)\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n+1)}}}.$$

En mettant $-c$ à la place de c, on aura

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{E'\sqrt{(\frac{1}{2}(1-c))}}{F'\sqrt{(\frac{1}{2}(1-c))}} = \frac{1}{2}(1+c) + \dfrac{1-c^2}{2m}\cdot u_2, \\ u_2 = \cfrac{\frac{m}{2c}}{1+\cfrac{3\cdot 3\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{2+\cfrac{5\cdot 5\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{3+\cfrac{7\cdot 7\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{4+\cfrac{9\cdot 9\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{\ddots\;(n-1)+\cfrac{(2n-1)^2\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{n+\frac{1-c^2}{4c}\cdot R_n'}}}}}}, \end{cases}$$

où

$$R'_n = \tfrac{1}{2}(2n+1)\cdot \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \cdot \sin^{2n+2}\varphi}{(1-\frac{1}{2}(1-c)\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n+3)}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \cdot \sin^{2n}\varphi}{(1-\frac{1}{2}(1-c)\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n+1)}}}.$$

Quant à l'expression (18.), on voit sans difficulté que pour $c<1$ la fraction continue est convergente et que le reste

$$r_n = \frac{1-c^2}{4c}\cdot R'_n$$

est positif. Voilà les deux conditions qui suffisent pour que u_2 soit la limite vers laquelle converge la fraction continue pour $n=\infty$. Donc nous aurons cette expression remarquable:

$$(19.)\quad \frac{E'\sqrt{(\frac{1}{2}(1-c))}}{c.F'\sqrt{(\frac{1}{2}(1-c))}} = \frac{1+c}{2c} + \cfrac{\frac{1-c^2}{4c^2}}{1+\cfrac{3\cdot 3\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{2+\cfrac{5\cdot 5\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{3+\cfrac{7\cdot 7\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{4+\cfrac{9\cdot 9\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{5+\cfrac{11\cdot 11\cdot\frac{1-c^2}{4c^2}}{6+\text{ etc. in infin.}}}}}}}$$

$$(0<c\leqq 1)$$

En faisant dans (19.)

$$\frac{1-c^2}{4c^2} = \tfrac{1}{4}x^2,$$

et en posant, pour abréger,

$$b = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}\right)\right]},$$

on aura pour toutes les valeurs positives et négatives de x:

$$(20.)\quad (1-2b^2)\left\{\frac{E'(b)}{F'(b)} - \frac{1-b^2}{1-2b^2}\right\} = \cfrac{x}{2+\cfrac{3.3.x^2}{4+\cfrac{5.5.x^2}{6+\cfrac{7.7.x^2}{8+\cfrac{9.9.x^2}{10+\cfrac{11.11.x^2}{12+\text{ etc. in infin.}}}}}}}$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

Cette formule aura sa place à côté de la formule connue

$$\tfrac{1}{2}x\,.\,\text{arc}\,(\text{tang}=2x) = \cfrac{x^2}{1+\cfrac{2.2.x^2}{3+\cfrac{4.4.x^2}{5+\cfrac{6.6.x^2}{7+\cfrac{8.8.x^2}{9+\cfrac{10.10.x^2}{11+\text{etc. in infin.}}}}}}}$$

P. S. La formule (17.) fait voir aussi, combien on se trompe en concluant qu'***indépendamment du signe du reste,*** une expression, développée en fraction continue, soit la véritable limite vers laquelle converge cette fraction prolongée indéfiniment, si elle est convergente. En admettant cette conclusion, on tirerait de (17.):

$$\frac{\mathrm{E}'\sqrt{(\frac{1}{2}(1+c))}}{\mathrm{F}'\sqrt{(\frac{1}{2}(1+c))}} = \frac{1-c}{2c} - \cfrac{\cfrac{1-c^2}{4c^2}}{1+\cfrac{3\cdot3\cdot\cfrac{1-c^2}{4c^2}}{2+\cfrac{5\cdot5\cdot\cfrac{1-c^2}{4c^2}}{3+\cfrac{7\cdot7\cdot\cfrac{1-c^2}{4c^2}}{4+\cfrac{9\cdot9\cdot\cfrac{1-c^2}{4c^2}}{5+\text{etc. in infin.}}}}}}$$

et cela, comparé avec (19.), donnerait

$$\frac{\mathrm{E}'\sqrt{(\frac{1}{2}(1+c))}}{\mathrm{F}'\sqrt{(\frac{1}{2}(1+c))}} + \frac{\mathrm{E}'\sqrt{(\frac{1}{2}(1-c))}}{\mathrm{F}'\sqrt{(\frac{1}{2}(1-c))}} = 1:$$

résultat dont la fausseté est évidente, en vertu de la relation connue (Voir ***Legendre*** Fonct. Ellipt. Tome I. p. 61)

$$\mathrm{E}'\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1+c))}.\mathrm{F}'\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1-c))} + \mathrm{E}'\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1-c))}.\mathrm{F}'\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1+c))} - \mathrm{F}'\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1+c))}.\mathrm{F}'\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1-c))} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Upsàla le 18 Mars 1849.

16.
Abrifs einer Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Prof. *E. Heine* zu Bonn.)

Im 32ten Bande des gegenwärtigen Journals erwähnt ***Jacobi,*** dafs er in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen von den Θ auszugehen pflege, und deutet das Verfahren an, durch welches er die wesentlichsten von den Formeln ableitet, welche in seinem Werke „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" zu finden sind. Auch in dem vorliegenden Abrifs ist der Weg verlassen, welcher in den „Fundamentis" eingeschlagen wurde: ich versuche die wesentlichsten Puncte der Theorie möglichst elementar festzustellen, indem ich mich der Methode anschliefse, nach welcher man die Hauptbeziehungen der Kreisfunctionen aus den Reihen zu entwickeln pflegt. Zu letzterem Zwecke stellt man die Reihen auf, welche gleich dem Sinus und Cosinus von x sind, und zeigt durch Quadriren, dafs $\cos^2 x + \sin^2 x$ gleich 1 ist, d. h. dafs $\cos x$ eine Function von $\sin x$, nemlich $\sqrt{(1-\sin^2 x)}$ ist. Beweiset man ferner durch einfache Differentiation, dafs

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,$$

so ist klar, dafs

$$x = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{(1-\sin^2 x)}},$$

wo das Integral so zu nehmen ist, dafs es für $\sin x = 0$ verschwindet, indem die Reihe, welche mit $\sin x$ bezeichnet war, mit x zugleich Null wird. In ähnlicher Weise kann man hier die drei Reihen für $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$ aufstellen, und durch Quadriren leicht zeigen, dafs

$$\cos \operatorname{am} x = \sqrt{(1-\sin^2 \operatorname{am} x)},$$
$$\Delta \operatorname{am} x = \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} x)},$$

wo k eine gewisse Constante (nach x) bezeichnet. Fügt man hinzu, dafs die zweite Reihe ($\cos \operatorname{am} x$), mit der dritten ($\Delta \operatorname{am} x$) multiplicirt, den Differentialquotienten der ersten nach x giebt $\left(\frac{d\sin \operatorname{am} x}{dx}\right)$, dafs ferner $\sin \operatorname{am} x$ mit x verschwindet, so erhält man die bekannte Relation zwischen dem elliptischen

Integral erster Gattung und seiner oberen Grenze, dafs nämlich, wenn

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2z^2)}}$$

gesetzt wird, z von x so abhängt, wie in der ersten Reihe $\sin\mathrm{am}\, x$ von x. Diese Entwickelungen findet man im II. Abschnitt. Im III. Abschnitt sind die Formeln für die Addition der elliptischen Functionen durch einfache Multiplication von Reihen abgeleitet; in ähnlicher Weise, wie man die Ausdrücke für die Addition der trigonometrischen Functionen aus den Reihen, durch die sie dargestellt werden, zu beweisen pflegt.

Sind einmal die drei Reihen aufgestellt, so scheint mir die im Vorhergehenden angedeutete Art der Untersuchung nicht zu fern zu liegen. Es liegt nahe, jede Reihe mit sich selbst, und darauf mit einer von den beiden andern zu multipliciren; eben so nahe, nachher drei mit einander zu verbinden. Die erste Art von Combinationen verschafft die Entwickelungen des II. Abschnitts, die zweite Art die des dritten. Auf die drei Reihen, so wie auf die übrigen ihnen verwandten führt aber der Gedanke, die Reihen für $\sin x$, $\cos x$, $\arctang x$, etc. durch Einführung einer neuen Gröfse q, nach dem Princip zu verallgemeinern, welches in meiner Abhandlung in diesem Journal Bd. 34. S. 285 angewandt wurde, um aus der *Gaufsischen* hypergeometrischen Reihe eine neue zu bilden. Dem aufmerksamen Geometer wird die einfache Form der aus solcher Übertragung entstehenden Ausdrücke ein hinreichender Grund zu ihrer weiteren Untersuchung sein. Nur zur leichteren Darstellung sind sogleich drei zusammengehörige Reihen an die Spitze des II. Abschnitts gestellt: *eine* Reihe hätte genügt, zu der man die beiden andern ohne Mühe findet.

Anstatt die drei Reihen fertig aufzustellen, leite ich sie im I. Abschnitt aus den unendlichen Producten durch eine allgemeine Formel ab, deren Beweis dort im Zusammenhange zu finden ist, obgleich er schon in der vorerwähnten Abhandlung gegeben wurde. Die Untersuchungen der beiden letzten Abschnitte sind übrigens im wesentlichen von denen des ersten unabhängig; durch ihn erhalten aber die Formeln die elegante Gestalt, in welcher sie in den „Fundamentis" vorkommen. Die Lehre von der Multiplication *) der elliptischen

*) In der oben erwähnten Abhandlung komme ich auf die Multiplication der elliptischen Functionen, indem ich für die *Gaufsische* Formel

$$n^{nz}\Pi z\,\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right)\Pi\left(z-\frac{2}{n}\right)\ldots\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{(n)}}\Pi nz$$

Functionen, wie sie *Jacobi* in diesem Journal Band 3. Seite 305 angedeutet hat, würde, wenn es die Absicht gewesen wäre, hier eine vollständige Theorie zu geben, am Ende des ersten Abschnitts eingeschaltet worden sein. Auch die Entwickelung der elliptischen Functionen in Kettenbrüche ist hier fortgelassen, da es nicht zweckmäfsig schien, die hierher gehörigen Formeln von den allgemeinen zu trennen, die an einer andern Stelle abgeleitet wurden.

I. Abschnitt.

Der Ausdruck

$$(1.)\qquad \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots.}{(1-2q^{\alpha+1}\cos 2x+q^{2\alpha+2})(1-2q^{\alpha+3}\cos 2x+q^{2\alpha+6})(1-2q^{\alpha+5}\cos 2x+q^{2\alpha+10})\ldots.},$$

in welchem q und x reelle oder imaginäre Gröfsen bezeichnen, von denen die erstere, wenn sie reell, und ihr Modulus, wenn sie imaginär ist, kleiner als 1 sein mag, läfst sich leicht in eine nach Cosinus der Vielfachen von x fortschreitende Reihe entwickeln. Setzt man dazu $z = e^{2ix}$, so ist (1.) das Product der beiden Ausdrücke

$$\frac{(1-qz)(1-q^3z)\ldots.}{(1-q^{\alpha+1}z)(1-q^{\alpha+3}z)\ldots.} \quad \text{und} \quad \frac{\left(1-\frac{q}{z}\right)\left(1-\frac{q^3}{z}\right)\ldots.}{\left(1-\frac{q^{\alpha+1}}{z}\right)\left(1-\frac{q^{\alpha+3}}{z}\right)\ldots.},$$

von denen sich der erste durch eine nach aufsteigenden, der zweite durch eine nach fallenden Potenzen von z geordnete Reihe darstellen läfst. Es ist nämlich

$$(2.)\qquad \frac{(1-qz)(1-q^3z)\ldots.}{(1-q^{\alpha+1}z)(1-q^{\alpha+3}z)\ldots.} = 1+\frac{(1-q^{-\alpha})}{(1-q^2)}q^{\alpha+1}z+\frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{2-\alpha})}{(1-q^2)(1-q^4)}q^{2(\alpha+1)}z^2+\ldots.,$$

so dafs wir als Factor von $2\cos 2mx$ in der Entwickelung von (1.), wenn m irgend eine ganze positive Zahl vorstellt, Folgendes erhalten:

$$\frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{2-\alpha})\ldots.(1-q^{2m-2-\alpha})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.(1-q^{2m})}q^{m(\alpha+1)}\left\{1+\frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{2m-\alpha})}{(1-q^2)(1-q^{2m+2})}q^{2(\alpha+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{2-\alpha})(1-q^{2m-\alpha})(1-q^{2m+2-\alpha})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})}q^{4(\alpha+1)}+\ldots.\right\}.$$

---

die zwei analogen (90.) und (91.) suche, von denen die erste die eine Transformation, die zweite ihre supplementäre giebt. Die Endresultate (93.) und (94.) sind dort unrichtig angegeben. Man vergleiche das am Ende dieser Abhandlung befindliche Verzeichnifs einiger in jener vorkommenden Errata.

Die in der Parenthese eingeschlossene Reihe gehört zu der allgemeinen Classe derer, von welchen in einer früheren Abhandlung gezeigt wurde, dafs sie sich durch ein im Allgemeinen unendliches Product summiren lassen. Macht man nämlich

$$\varphi(a,b,c) = 1 + \frac{(1-q^{2a})(1-q^{2b})}{(1-q^2)(1-q^{2c})}x + \frac{(1-q^{2a})(1-q^{2a+2})(1-q^{2b})(1-q^{2b+2})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^{2c})(1-q^{2c+2})}x^2 + \ldots,$$

so findet man durch einfache Subtraction, dafs die Differenz

$$q^{2(a+b-c)}x(1-q^{2c-2b})\varphi(a+1,b,c+1) - (1-q^{2c})\varphi(a,b,c)$$

sich als Product von $(1-q^{2c})\varphi(a+1,b,c)$ in $(q^{2(a+b-c)}x-1)$ darstellen läfst, dafs sie also für $x = q^{2(c-a-b)}$ verschwindet, wenn q^{c-a-b} kleiner als 1 ist. Für diesen Werth von x erhält man demnach

$$\varphi(a,b,c) = \frac{(1-q^{2c-2b})}{(1-q^{2c})}\varphi(a+1,b,c+1),$$

und durch wiederholte Anwendung derselben Formel (indem

$$\varphi(\infty,b,\infty) = 1 + \frac{(1-q^{2b})}{(1-q^2)}q^{2(c-a-b)} + \frac{(1-q^{2b})(1-q^{2b+2})}{(1-q^2)(1-q^4)}q^{4(c-a-b)} + \ldots.$$

nach (2.) gleich ist $\frac{(1-q^{2c-2a})(1-q^{2c+2-2a})\ldots.}{(1-q^{2c-2a-2b})(1-q^{2c+2-2a-2b})\ldots.}$):

$$\varphi(a,b,c) = \frac{\{(1-q^{2c-2a})(1-q^{2c+2-2a})\ldots.\}\{(1-q^{2c-2b})(1-q^{2c+2-2b})\ldots.\}}{\{(1-q^{2c})(1-q^{2c+2})\ldots.\}\{1-q^{2c-2a-2b})(1-q^{2c+2-2a-2b})\ldots.\}}.$$

Man hat nur $a = -\frac{1}{2}\alpha$, $b = m - \frac{1}{2}\alpha$, $c = m+1$ zu machen, und findet dann für den Factor von $2\cos 2mx$ den Werth

$$q^{m(\alpha+1)}\cdot\frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{2-\alpha})\ldots.(1-q^{2m-2-\alpha})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.(1-q^{2m})}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\alpha+4})\ldots.}{(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})\ldots.}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+2m+2})(1-q^{\alpha+2m+4})\ldots.}{(1-q^{2\alpha+2})(1-q^{2\alpha+4})\ldots.},$$

also schliefslich

$$(3.)\quad \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}{(1-2q^{\alpha+1}\cos 2x+q^{2\alpha+2})(1-2q^{\alpha+3}\cos 2x+q^{2\alpha+6})\ldots.} =$$

$$\frac{\{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\alpha+4})(1-q^{\alpha+6})\ldots.\}^2}{\{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.\}\{1-q^{2\alpha+2})(1-q^{2\alpha+4})\ldots.\}}\Big\{1+2\frac{(1-q^{-\alpha})}{(1-q^{\alpha+2})}q^{\alpha+1}\cos 2x$$

$$+2\frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{2-\alpha})}{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\alpha+4})}q^{2(\alpha+1)}\cos 4x+\ldots.\Big\}.$$

Aus dieser allgemeinen Formel lassen sich ohne Mühe die folgenden ableiten:

$$(4.)\quad \{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.\}\{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.\}$$
$$= 1-2q^1\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots.,$$

$$(5.)\quad \{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.\}\sin x\{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.\}$$
$$= \sin x - q^{1,2}\sin 3x + q^{2,3}\sin 5x - q^{3,4}\sin 7x+\ldots.,$$

$$(6.)\quad \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1-q)(1-q^3)\ldots.}\right\}^2 \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}{\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}$$
$$= \frac{1}{\sin x}+\frac{4q}{1-q}\sin x+\frac{4q^3}{1-q^3}\sin 3x+\ldots.$$

$$(7.)\quad \sqrt{q}\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1-q)(1-q^3)\ldots.}\right\}^2 \frac{\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}$$
$$= \frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin x+\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3x+\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin 5x+\ldots.,$$

$$(8.)\quad \sqrt{q}\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1+q)(1+q^3)\ldots.}\right\}^2 \frac{\cos\,(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}$$
$$= \frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos x+\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos 3x+\frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos 5x+\ldots..,$$

$$(9.)\quad \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots.}\right\}^2 \frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}$$
$$= 1+\frac{4q}{1+q^2}\cos 2x+\frac{4q^2}{1+q^4}\cos 4x+\frac{4q^3}{1+q^6}\cos 6x+\ldots.,$$

$$(10.)\quad \sqrt{q}\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1-q)(1-q^3)\ldots.}\right\}^2 \frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}$$
$$= \frac{\sqrt{q}.(1+q)}{1-2q\cos 2x+q^2}+\frac{\sqrt{q^3}.(1+q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{\sqrt{q^5}.(1+q^5)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}+\ldots.,$$

$$(11.)\quad \sqrt{q}\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1+q)(1+q^3)\ldots.}\right\}^2 \frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}$$
$$= \frac{\sqrt{q}.(1-q)}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{\sqrt{q^3}.(1-q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{\sqrt{q^5}.(1-q^5)}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\ldots.$$

Aus (3.) folgt nämlich (4.) für $\alpha=\infty$, und (6.) für $\alpha=1$. Hierdurch entsteht zunächst:

$$\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1-q)(1-q^3)\ldots.}\right\}^2 \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}$$
$$= \frac{(1-q^2)}{(1-q)^2}-\frac{2(1-q^2)}{(1-q)(1-q^3)}q\cos 2x-\frac{2(1-q^2)}{(1-q^3)(1-q^5)}q^3\cos 4x-\ldots.$$

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch $\sin x$, entwickelt rechts nach *Sinus* der Vielfachen von x, mit Hülfe der Formel

$$\frac{\cos 2mx}{\sin x}=\frac{\cos(2m-2)x}{\sin x}-2\sin(2m-1)x$$
$$=\frac{1}{\sin x}-2\sin x-2\sin 3x-\ldots.-2\sin(2m-1)x,$$

und vereinfacht dann die Coëfficienten der Sinus der Vielfachen durch die Zerlegung

$$\frac{q^{2p-1}(1-q^2)}{(1-q^{2p-1})(1-q^{2p+1})}=\frac{q^{2p-1}}{1-q^{2p-1}}-\frac{q^{2p+1}}{1-q^{2p+1}},$$

so erhält man die Gleichung (6.) in der oben aufgestellten Form; ferner (9.) aus (3.) für $\alpha = \frac{\pi i}{\log q}$, nach Vertauschung von x mit $\frac{1}{2}\pi - x$. Aus (4.) entsteht (5.), und (7.) aus (6.), wenn man $x - \frac{1}{2}(i \log q)$ für x setzt, und (8.) aus (7.) durch gleichzeitige Vertauschung von q mit $-q$ und x mit $\frac{1}{2}\pi - x$. Ferner erhält man (10.) aus (7.), wenn man die identische Gleichung

$$\frac{1}{1-\xi} + \frac{\zeta}{1-q^2\xi} + \frac{\zeta^2}{1-q^4\xi} + \ldots = \frac{1}{1-\zeta} + \frac{\xi}{1-q^2\zeta} + \frac{\xi^2}{1-q^4\zeta} + \ldots$$

mit $\sqrt{\zeta}$ multiplicirt, und darauf $\xi = q$ und ζ einmal gleich qe^{2ix}, dann gleich qe^{-2ix} setzt, und hierauf die eine der so entstehenden Gleichungen von der andern subtrahirt. Hätte man $\xi = -q$ gemacht, so hätte sich (11.) aus (8.) ergeben.

Die Formeln, welche aus (4.) bis (11.) für gewisse einfache Werthe von x, z. B. $x = 0$, $\frac{1}{2}\pi$, π, folgen, wird man den obigen leicht hinzufügen.

* * *

Aufser den Gleichungen (4.) bis (11.), die sich aus (3.) unmittelbar ergeben, folgen aus dieser allgemeinen Formel noch einige andere interessante Beziehungen, die hier Platz finden mögen, obgleich sie nicht unmittelbar zu unserm Zwecke nothwendig sind.

A) Um die bekannte Gleichung

$$\{1 + 2q^1 + 2q^4 + 2q^9 + \ldots\}^2 = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \ldots$$

zu beweisen, mache man $x = \frac{1}{2}\pi$ in (4.) und (6.); man hat dann nur noch zu zeigen, dafs

$$\{(1-q^2)(1-q^4)\ldots\}^2\{(1+q)(1+q^3)\ldots\}^4 = \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots}{(1-q)(1-q^3)\ldots}\right\}^2\left\{\frac{(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}\right\}^2$$

oder dafs

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} \text{ ist.}$$

Diese Gleichung verificirt man auf der Stelle, wenn man sie mit $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots$ multiplicirt, wodurch die Identität entsteht:

$$\{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots\}\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots\} = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

B) Die so eben hergeleitete Formel ist nur ein specieller Fall einer weit allgemeinern, die aus der identischen Gleichung folgt:

$$\{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots\}^2$$
$$= \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots}{\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots}\Bigg\}$$
$$\{\sin x\,(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots\}.$$

Setzt man für die drei in Parenthesen eingeschlossenen unendlichen Producte ihre Werthe aus (4.), (6.) und (5.), nachdem man in letzterer q für q^2 geschrieben hat, benutzt endlich auch die Formel

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.}{\{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.\}^2} = 1+q^{\frac{1.2}{2}}+q^{\frac{2.3}{2}}+q^{\frac{3.4}{2}}+\ldots.,$$

die sich aus (5.) durch Verwandlung von q^2 und x in q und $\frac{1}{2}\pi$ ergiebt, so erhält man die Gleichung

$$\{1-2q^1\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots.\}^2$$
$$=\left\{\frac{1}{\sin x}+\frac{4q}{1-q}\sin x+\frac{4q^3}{1-q^3}\sin 3x+\ldots.\right\}$$
$$\left\{\frac{\sin x-q^{\frac{1.2}{2}}\sin 3x+q^{\frac{2.3}{2}}\sin 5x-q^{\frac{3.4}{2}}\sin 7x+\ldots.}{1+q^{\frac{1.2}{2}}+q^{\frac{2.3}{2}}+q^{\frac{3.4}{2}}+\ldots.}\right\}$$

welche für $x=\frac{1}{2}\pi$ in die unter (*A*) abgeleitete übergeht.

C) Endlich setzen wir für α eine gerade Zahl $\alpha=2m$ in (3.), und finden so die Reihen-Entwickelung eines *endlichen* Products

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.(1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2})$$

nach Cosinus der Vielfachen von x. Das Product auf der rechten Seite von (3.), welches noch mit der unendlichen Reihe zu multipliciren ist, verwandelt sich dadurch in

$$\frac{\{(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})\ldots.\}^2}{\{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.\}\{(1-q^{4m+2})(1-q^{4m+4})\ldots.\}}=\frac{(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})\ldots.(1-q^{4m})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.(1-q^{2m})}$$
$$=\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.(1-q^{4m})}{\{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.(1-q^{2m})\}^2}$$
$$=\frac{(1+q)(1+q^2)\ldots.(1+q^{2m})}{(1-q)(1-q^2)\ldots.(1-q^{2m})}\{(1-q)(1-q^3)\ldots.(1-q^{2m-1})\}^2.$$

So findet man

$$\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots.(1-q^{2m})}{(1+q)(1+q^2)\ldots.(1+q^{2m})}\cdot\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.(1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2})}{\{(1-q)(1-q^3)\ldots.(1-q^{2m-1})\}^2}$$
$$=1-\frac{2(1-q^{2m})}{(1-q^{2m+2})}q^1\cos 2x+\frac{2(1-q^{2m})(1-q^{2m-2})}{(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})}q^4\cos 4x$$
$$-\frac{2(1-q^{2m})(1-q^{2m-2})(1-q^{2m-4})}{(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})(1-q^{2m+6})}q^9\cos 6x+\ldots.,$$

Für $x=0$ erhält man die Entwickelung des endlichen Products

$$\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots.(1-q^{2m})}{(1+q)(1+q^2)\ldots.(1+q^{2m})}$$

in eine Reihe, die für $m=\infty$ in die bekannte

$$1-2q^1+2q^4-2q^9+\ldots.$$

übergeht.

II. Abschnitt.

Die drei Reihen (7.), (8.), (9.)

$$(a.)\quad \frac{1}{2i}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1-q^{2m+1}}\mathfrak{x}^{\frac{1}{2}(2m+1)},$$

$$(b.)\quad \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}}\mathfrak{x}^{\frac{1}{2}(2m+1)},$$

$$(c.)\quad 2\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\mathfrak{x}^m,$$

deren Ausdrücke durch unendliche Producte im vorigen Abschnitt gefunden wurden, sollen hier zu je zweien mit einander multiplicirt werden. Bezeichnet man ihre Quadrate mit $(a)^2$, $(b)^2$, $(c)^2$, so ist in $(a)^2$ mit $-\frac{1}{4}\mathfrak{x}^m$ die Reihe

$$\left\{\frac{q^m}{(1-q^{2m+1})(1-q^{-1})}+\ldots.+\frac{q^m}{(1-q^{2m+2p+1})(1-q^{-2p-1})}+\ldots.\right\}$$
$$+\left\{\frac{q^m}{(1-q^{2m-1})(1-q)}+\ldots.+\frac{q^m}{(1-q^{2m-2p-1})(1-q^{2p+1})}+\ldots.\right\}$$

multiplicirt Die Glieder der in den beiden Parenthesen befindlichen Reihen lassen sich leicht zerlegen, und zwar setze ich für das $p$te Glied in der ersten:

$$\frac{q^m}{1-q^{2m}}\left\{-\frac{q^{2p+1}}{1-q^{2p+1}}+\frac{q^{2m+2p+1}}{1-q^{2m+2p+1}}\right\}$$

und für das $p$te Glied der zweiten:

$$\frac{q^m}{1-q^{2m}}\left\{\frac{q^{2p+1}}{1-q^{2p+1}}+\frac{1}{1-q^{2m-2p-1}}\right\}.$$

Nun ist der Coëfficient von $-\frac{1}{4}\mathfrak{x}^m$ die Summe (Differenz) von vier Reihen *),

---

*) Die Zerlegung der $p$ten Glieder, die auf verschiedene Arten Statt finden konnte, war deshalb nicht ganz willkürlich, weil, nachdem sie geschehn ist, die durch Zerlegung eines Gliedes entstehenden beiden nicht zusammenbleiben sollen, sondern gegeneinander verschoben werden. Es müssen also solche Zerlegungen vorgenommen werden, dafs die neuen Reihen nicht durch die Vorzeichen convergiren, wie dieses mit der Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots.$ der Fall ist, sondern unabhängig von diesen. So convergirt z. B. die Reihe, deren $p$tes Glied $\frac{q^{2p+1}}{1-q^{2p+1}}$ oder $\frac{1}{1-q^{2m-2p-1}}$ ist, während eine Reihe, deren

von denen zwei sich sofort heben, also gleich

$$\frac{q^m}{(1-q^{2m})}\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{q^{2m+2p+1}}{1-q^{2m+2p+1}}+\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1}{1-q^{2m-2p-1}}\right\}.$$

Die letzte Summe zerfällt in eine von $p=0$ bis $p=m-1$, eine zweite von m bis $2m-1$, und eine dritte von $2m$ bis ∞. Beachtet man, dafs $\frac{1}{1-q^{-r}}=-\frac{q^r}{1-q^r}$, so findet man für obigen Ausdruck:

$$\frac{q^m}{1-q^{2m}}\left\{\frac{1}{1-q^{2m-1}}+\frac{1}{1-q^{2m-3}}+\ldots.+\frac{1}{1-q^{-1}}-\frac{q}{1-q^1}-\ldots.-\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\}$$
$$=\frac{mq^m}{1-q^{2m}},$$

mit Ausnahme des Werthes $m=0$.

So erhält man:

$$(12.)\quad 2(a)^2=\left\{\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{q^5}{(1-q^5)^2}+\ldots.\right\}$$
$$-\frac{1.q}{1-q^2}\cos 2x-\frac{2.q^2}{1-q^4}\cos 4x-\frac{3.q^3}{1-q^6}\cos 6x-\ldots.,$$

und durch einfache Vertauschungen:

$$(13.)\quad 2(b)^2=\left\{\frac{q}{(1+q)^2}+\frac{q^3}{(1+q^3)^2}+\frac{q^5}{(1+q^5)^2}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{1.q}{1-q^2}\cos 2x+\frac{2.q^2}{1-q^4}\cos 4x+\frac{3.q^3}{1-q^6}\cos 6x+\ldots..$$

Auf ähnliche Art wie (12.) ergiebt sich

$$(14.)\quad \tfrac{1}{8}(c)^2=\left\{\tfrac{1}{8}+\frac{q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{q^4}{(1+q^4)^2}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{1.q}{1-q^2}\cos 2x+\frac{2.q^2}{1-q^4}\cos 4x+\frac{3.q^3}{1-q^6}\cos 6x+\ldots..$$

Ehe wir zur Betrachtung der noch fehlenden Producte $(a)(b)$, $(a)(c)$, $(b)(c)$ übergehn, wollen wir aus den so eben gefundenen Formeln einige Folgerungen ziehen. Um unsere Resultate in der bekannten Bezeichnungsweise auszudrücken, führen wir drei Gröfsen k, k', K ein, indem wir setzen

---

$p$tes Glied $\frac{1}{1-q^{2p+1}}$ ist, divergiren würde. Deshalb durfte z. B. das $p$te Glied der zweiten Reihe nicht so dargestellt werden:

$$\frac{q^m}{1-q^{2m}}\left\{\frac{1}{1-q^{2p+1}}+\frac{q^{2m-2p-1}}{1-q^{2m-2p-1}}\right\}.$$

Der hier erwähnte Umstand ist auch bei allen folgenden Zerlegungen sorgfältig zu beachten.

$$(15.) \qquad k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots.}{(1+q)(1+q^3)\ldots.}\right\}^4,$$

$$(16.) \qquad k' = \left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots.}\right\}^4,$$

$$(17.) \qquad \frac{2kK}{\pi} = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots.}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\ldots.}\right\}^2.$$

Dafs k mit k' durch die Gleichung $k^2+k'^2=1$ zusammenhängt, wird sich im weitern Verlaufe leicht ergeben; hier wird diese Relation nicht vorausgesetzt.

Aus (12.) und (13.) erhellt, dafs $(a)^2+(b)^2$ von x unabhängig ist, so dafs, wenn g einen von x unabhängigen Werth darstellt, nämlich

$$2g^2 = \frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q}{(1+q)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{q^3}{(1+q^3)^2}+\ldots.,$$

(a) gleich g mal einem Sinus, (b) gleich g mal dem Cosinus desselben Winkels gesetzt werden kann, also

$$(a) = g\sin f(x),$$
$$(b) = g\cos f(x).$$

Der Werth der Constante g läfst sich übrigens leicht als unendliches Product darstellen, indem für jedes x, also auch für $x=0$, $g=\sqrt{((a)^2+(b)^2)}$ wird. Da nun für $x=0$, (a) verschwindet und (b) nach (8.) und (17.) gleich $\frac{kK}{2\pi}$ ist, so wird

$$(18.) \qquad (a) = \frac{kK}{2\pi}\sin f(x),$$

$$(19.) \qquad (b) = \frac{kK}{2\pi}\cos f(x).$$

Ferner findet man durch Vergleichung von (12.) und (14.)

$$(4a)^2+(c)^2 = h^2,$$

wo h eine Constante (nach x) bezeichnet, die sich wiederum durch ein unendliches Product darstellen läfst, indem für x ein besonderer Werth, $x=0$, gesetzt wird. Dann hat man $(a)=0$; ferner (c) nach (9.), (15.) und (17.) gleich $\frac{2K}{\pi}$, also $h=\frac{2K}{\pi}$, folglich nach (18.)

$$(20.) \qquad (c) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2 f(x))},$$

und macht man zur Abkürzung

$$\Delta f(x) = \sqrt{(1-k^2\sin^2 f(x))},$$

so ist

$$(20^*.) \qquad (c) = \frac{2K}{\pi} \Delta f(x).$$

Da nun für $x = \frac{1}{2}\pi$ nach (7.) und (17.), (a) sich in $\frac{kK}{2\pi}$, (c) nach (9.), (15.), (16.) und (17.) sich in $\frac{2Kk'}{\pi}$ verwandelt, so wird nach (18.)

$$\sin f(\tfrac{1}{2}\pi) = 1$$

und nach (20.)

$$\frac{2Kk'}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2 f(\tfrac{1}{2}\pi))} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{(1-k^2)},$$

also

$$(21.) \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

Wir haben nun die drei Gleichungen

$$(22.) \quad \begin{cases} \frac{kK}{2\pi}\sin(fx) = \frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin x + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3x + \ldots., \\ \frac{kK}{2\pi}\cos(fx) = \frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos x + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos 3x + \ldots., \\ \frac{2K}{\pi}\Delta f(x) = 1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos 2x + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 4x + \ldots. \end{cases}$$

bewiesen, die man noch mit (6.) bis (11.) und ähnlichen Formeln combiniren kann.

Von den übrigen Verbindungen $(a)(b)$, $(a)(c)$, $(b)(c)$ wollen wir nur eine bilden, indem die beiden andern nichts geben, was nicht schon aus einer hervorginge. In dem Producte $(b)(c)$ ist, mit z^{2m+1} multiplicirt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})} + \frac{q^{-1}}{(1+q^{-2})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+3)}}{(1+q^{2m+3})} + \ldots. + \frac{q^{-p}}{(1+q^{-2p})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+2p+1)}}{(1+q^{2m+2p+1})} + \ldots.$$
$$+ \frac{q^{1}}{(1+q^{2})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m-1)}}{(1+q^{2m-1})} + \ldots. + \frac{q^{p}}{(1+q^{2p})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m-2p+1)}}{(1+q^{2m-2p+1})} + \ldots..$$

Für das $p$te Glied der ersten Reihe setze man

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1-q^{2m+1}}\left\{\frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} - \frac{q^{2m+2p+1}}{1+q^{2m+2p+1}}\right\},$$

für das $p$te Glied der zweiten

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1-q^{2m+1}}\left\{-\frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} + \frac{1}{1+q^{2m-2p+1}}\right\},$$

so dafs der Coëfficient von z^{2m+1} (indem man in der oberen Reihe von $p = 0$, in der untern von $p = 1$ an summiren mufs),

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1-q^{2m+1}}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{p=2m}\frac{1}{1+q^{2m-2p+1}}+\sum_{p=2m+1}^{p=\infty}\frac{1}{1+q^{2m-2p+1}}-\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{q^{2m+2p+1}}{1+q^{2m+2p+1}}\right\}$$
$$=(m+\tfrac{1}{2})\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1-q^{2m+1}}$$

wird. Man hat also nach (19.) und (20*.):

$$\frac{kK^2}{\pi^2}\cos f(x)\Delta f(x)=\frac{1.q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\cos x+\frac{3.q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}\cos 3x+\frac{5.q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}\cos 5x+\ldots.$$
$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\sin x+\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}\sin 3x+\frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}\sin 5x+\ldots.\right\}$$
$$=\frac{kK}{2\pi}\frac{d\sin f(x)}{dx},$$

folglich

$$\frac{2Kx}{\pi}=\int\frac{d\sin f(x)}{\cos f(x)\Delta f(x)},$$

und da $\sin f(x)$ nach (22.) für $x=0$ verschwindet, so ist das Integral von $\sin f(x)=0$ anzunehmen. Es genügt demnach

$$z=\sin f(x)=\frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin x+\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3x+\ldots.\right\}$$

der Gleichung

$$(23.)\qquad \frac{2Kx}{\pi}=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2z^2)}}.$$

III. Abschnitt.

Während wir im Vorhergehenden zwei von den Reihen (*a.*), (*b.*), (*c.*) mit einander verbanden, die dasselbe Argument x hatten, wollen wir jetzt das Product dreier von ihnen betrachten, von denen die eine das Argument x hat, die zweite y, die dritte das aus beiden symmetrisch zusammengesetzte $x+y$. Setzt man deshalb nicht nur $z=e^{2xi}$, sondern auch $v=e^{2yi}$, so wird z. B. in dem Producte

$$\left\{\frac{1}{2i}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1-q^{2m+1}}z^{\frac{1}{2}(2m+1)}\right\}\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1+q^{2n+1}}z^{\frac{1}{2}(2n+1)}\right\}\left\{2\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}(zv)^r\right\}$$

mit $\frac{1}{2i}z^{\frac{1}{2}(2m+1)}v^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ folgende Reihe multiplicirt sein:

$$(24.)\quad \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1-q^{2m+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})}+\ldots\ldots\ldots+\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+2p+1)}}{(1-q^{2m+2p+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+2p+1)}}{(1+q^{2n+2p+1})}\frac{q^{-p}}{(1+q^{-2p})}+\ldots.\right\}$$
$$+\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}(2m-1)}}{(1-q^{2m-1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{(1+q^{2n-1})}\frac{q^1}{(1+q^2)}+\ldots.+\frac{q^{\frac{1}{2}(2m-2p+1)}}{(1-q^{2m-2p+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n-2p+1)}}{(1+q^{2n-2p+1})}\frac{q^p}{(1+q^{2p})}+\ldots.\right\}.$$

Das $p$te Glied der obern Reihe läfst sich zunächst als die Summe zweier darstellen; es ist nämlich gleich

$$\frac{q^{m+n+1}}{1+q^{2m+1}}\left\{\frac{q^p}{(1+q^{2n+2p+1})(1+q^{-2p})}+\frac{q^{3p+2m+1}}{(1+q^{2n+2p+1})(1-q^{2m+2p+1})}\right\},$$

und das erste Glied der in der vorstehenden Parenthese befindlichen wird gleich

$$\frac{1}{1-q^{2n+1}}\left\{\frac{q^p}{1+q^{2n+2p+1}}-\frac{q^p}{1+q^{2p}}\right\},$$

das zweite gleich

$$\frac{1}{1+q^{2n-2m}}\left\{\frac{q^p}{1-q^{2m+2p+1}}-\frac{q^p}{1+q^{2n+2p+1}}\right\},$$

so dafs wir für die erste Reihe von (24.)

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}}\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1-q^{2n+1}}\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2n+2p+1}}-\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2p}}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1+q^{2n-2m}}\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{q^p}{1-q^{2m+2p+1}}-\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2n+2p+1}}\right\}\right\}$$

erhalten. Wird die Summation nach p in der obigen Formel nicht mehr von 0 bis ∞, sondern von -1 bis $-\infty$ ausgeführt, so entsteht die zweite Reihe des Ausdrucks (24.), und der ganze Coëfficient von $\frac{1}{2i}z^{\frac{1}{2}(2m+1)}v^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ wird

$$-\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2p}}+\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})}\frac{q^{n-m}}{(1+q^{2n-2m})}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2p+1)}}{1-q^{2p+1}}.$$

Diese Formel folgt unmittelbar aus der vorhergehenden, da

$$\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^p}{1-q^{2m+2p+1}}=q^{-\frac{1}{2}(2m+1)}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+2p+1)}}{1-q^{2m+2p+1}}$$

offenbar 0 ist, und

$$\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2n+2p+1}}=q^{-\frac{1}{2}(2n+1)}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+2p+1)}}{1+q^{2n+2p+1}}=q^{-\frac{1}{2}(2n+1)}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2p+1)}}{1+q^{2p+1}}.$$

Setzt man für

$$\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2p}},\qquad\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2p+1)}}{1+q^{2p+1}}$$

noch ihre Werthe $\frac{K}{\pi}$ und $\frac{kK}{\pi}$ aus (22.), so wird in dem Producte der drei mit einander multiplicirten Reihen der Coëfficient von $\frac{1}{2i}z^{\frac{1}{2}(2m+1)}v^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ gleich

$$-\frac{K}{\pi}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})}+\frac{kK}{\pi}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})}\frac{q^{n-m}}{(1+q^{2n-2m})}.$$

Man hat also

$$\left(\frac{kK}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{2K}{\pi} \sin f(x) \cos f(y) \Delta f(x+y)$$

$$= -\frac{K}{\pi} \cdot \frac{kK}{2\pi} \cdot \frac{kK}{\pi} \cos f(x) \sin f(y) + \frac{kK}{\pi} \cdot \frac{1}{2i} \Sigma \frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})} \frac{q^{n-m}}{(1+q^{2n-2m})} z^{\frac{1}{2}(2m+1)} v^{\frac{1}{2}(n+1)},$$

wenn in der letzten Summe, unabhängig von einander, für m und n alle ganze Zahlen von $-\infty$ bis ∞ gesetzt werden. Um auch diese unendliche Doppelreihe in ein Product zweier einfachen zu verwandeln, setze man in der Gleichung

$$\frac{kK^2}{2\pi^2} \sin f(y) \Delta f(x) = \frac{1}{2i} \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} \left\{ \frac{q^p}{1+q^{2p}} z^p \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1-q^{2n+1}} v^{\frac{1}{2}(2n+1)} \right\}$$

vz statt v, während man z, also auch x, ungeändert läfst. Dadurch ändert sich auf der linken Seite y in $(x+y)$ um, indem

$$\frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1-q^{2n+1}} (zv)^{2n+1} = \frac{\sqrt{q}}{1-q} \sin(x+y) + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3} \sin 3(x+y) + \ldots.$$

gleich $\frac{kK}{2\pi} \sin f(x+y)$ ist, während die rechte Seite sich in

$$\frac{1}{2i} \Sigma \frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1-q^{2n+1}} v^{\frac{1}{2}(2n+1)} \frac{q^p}{1+q^{2p}} z^{\frac{1}{2}(2p+2n+1)}$$

verwandelt. Macht man $m = p+n$ statt p zum Summationsbuchstaben, und benutzt die Gleichung

$$\frac{q^{m-n}}{1+q^{2m-2n}} = \frac{q^{n-m}}{1+q^{2n-2m}},$$

so hat man

$$\frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1-q^{2n+1}} v^{\frac{1}{2}(2n+1)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{q^{n-m}}{1+q^{2n-2m}} z^{\frac{1}{2}(2m+1)} = \frac{kK^2}{2\pi^2} \sin f(x+y) \Delta f(x),$$

also schliefslich

(25.) $$\sin f(x) \cos f(y) \Delta f(x+y) = \sin f(x+y) \Delta f(x) - \cos f(x) \sin f(y).$$

Aus dieser Gleichung kann man auch leicht die Ausdrücke von $\Delta \operatorname{am}(x+y)$, $\sin \operatorname{am}(x+y)$ und daraus den von $\cos \operatorname{am}(x+y)$ in der gewöhnlichen Form erhalten. Vertauscht man nämlich in (25.) die Gröfsen x und y miteinander, so erhält man

$$\sin f(y) \cos f(x) \Delta f(x+y) = \sin f(x+y) \Delta f(y) - \cos f(y) \sin f(x)$$

und hat so zwei Gleichungen, in denen $\sin f(x+y)$ und $\Delta f(x+y)$ linear vorkommen; so dafs man eine von ihnen leicht eliminiren kann. Dadurch findet man

$$\Delta f(x+y) = \frac{\Delta f(x)\Delta f(y) - \sin f(x)\cos f(x)\sin f(y)\cos f(y)}{1-k^2\sin^2 f(x)\sin^2 f(y)},$$

$$\sin f(x+y) = \frac{\sin f(x)\cos f(y)\Delta f(y) + \sin f(y)\cos f(x)\Delta f(x)}{1-k^2\sin^2 f(x)\sin^2 f(y)}.$$

Durch Vertauschung von q, x etc. mit $-q$, $\frac{1}{2}\pi - x$, etc. oder durch directe Multiplication dreier Reihen erhält man noch andre ähnliche Formeln.

Um noch ein Beispiel der Ausführung einer solchen Multiplication zu geben, betrachte man, obgleich man dadurch kein allgemeineres Resultat als (25.) erhält, das Prôduct

$$\left(\frac{kK}{2\pi}\right)^2 \frac{2K}{\pi}\sin f(x)\sin f(y)\Delta f(x+y) = -\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{q^{m+n+r+1} z^{\frac{1}{2}(2m+1)} v^{\frac{1}{2}(2n+1)} (zv)^r}{(1-q^{2m+1})(1-q^{2n+1})(1+q^{2r})};$$

die Summation nach m, n, r von $-\infty$ bis ∞ ausgeführt. Es ist dann mit $-\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(2m+1)} v^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ eine Reihe multiplicirt, deren $p$tes Glied

$$\frac{q^{m+n+p+1}}{(1-q^{2m+2p+1})(1-q^{2n+2p+1})(1+q^{-2p})}$$

ist, wo p alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ annimmt. Dieses Glied zerfällt, so lange nicht $m = n$ ist, in

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}}\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1+q^{2n+1}}\left\{-\frac{q^p}{1+q^{2p}} + \frac{q^p}{1-q^{2n+2p+1}}\right\} + \frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{1-q^{2n-2m}}\left\{\frac{q^p}{1-q^{2m+2p+1}} - \frac{q^p}{1-q^{2n+2p+1}}\right\}\right\}.$$

Da die übrigen Glieder bei der Summation von $p = -\infty$ bis $p = \infty$ verschwinden, so reducirt sich der Coëfficient von $-\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(2m+1)} v^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ auf

$$-\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^p}{1+q^{2p}} = -\frac{K}{\pi}\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})}.$$

Ist aber $m = n$, so wird der Coëfficient von $-\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(2m+1)} v^{\frac{1}{2}(2m+1)}$ gleich der Summe von

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}}\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}}\left\{-\frac{q^p}{1+q^{2p}} + \frac{q^p}{1-q^{2m+2p+1}}\right\} + \frac{q^{3p+3m+\frac{3}{2}}}{(1-q^{2m+2p+1})^2}\right\},$$

von $p = -\infty$ bis $p = \infty$, also gleich

$$-\frac{K}{\pi}\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})},$$

vermehrt um $\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}}$, multiplicirt in die Summe

$$\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{3}{2}(2p+1)}}{(1-q^{2p+1})^2} = -\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2p+1)}}{1-q^{2p+1}} + \sum_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2p+1)}}{(1-q^{2p+1})^2}.$$

Von den beiden Summen rechts in vorstehender Gleichung ist die erste offenbar $=0$, die zweite

$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}(2p+1)}(1+q^{2p+1})}{(1-q^{2p+1})^2},$$

also nach (10.), (15.) und (17.)

$$= k.\left(\frac{K}{\pi}\right)^2.$$

Während also im allgemeinen der Factor von $-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(2m+1)}v^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ gleich

$$-\frac{K}{\pi}.\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{(1+q^{2m+1})}\,\frac{q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})}$$

ist, so wird er für $m=n$ gleich dem obigen Werthe, vermehrt um

$$\frac{kK^2}{\pi^2}.\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{1+q^{2m+1}};$$

folglich erhält man

$$\sin f(x)\sin f(y)\Delta f(x+y) = \cos f(x)\cos f(y) - \cos f(x+y)$$

oder

$$\cos f(x+y) = \cos f(x)\cos f(y) - \sin f(x)\sin f(y)\Delta f(x+y).$$

Auch aus dieser Formel findet man ohne Mühe die Ausdrücke für $\cos f(x+y)$, $\Delta f(x+y)$ und hieraus für $\sin f(x+y)$, in der gewöhnlichen Gestalt.

Verzeichniß der Druckfehler in meiner Abhandlung in diesem Journal Band 34. p. 285 et seq.

S. 306 Z. 7 v. o. im Nenner l. m. $(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma}x)(1-q^{\gamma+1}x)$ statt $(1-q)(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma}x)(1-q^{\gamma+1}x)$

— 306 — 1 v. u. sind die Zähler der drei Glieder nicht 1, 1, 1, sondern 1, q^2, q^4.

— 308 — 7 v. o. l. m. mit $\varphi\left(\alpha, 1, 1, q, \frac{q^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z}\right)$ st. mit $\varphi(\alpha, 1, 1, q, q^{\frac{1}{2}-\alpha}z)$

— 313 — 6 v. o., Z. 1. v. u., S. 314 Z. 2 v. o. l. m. auf der rechten Seite der Gleichungen respective

$$h.\frac{e^{(\frac{1}{2}\pi-b)(n-1)i}}{q^{\frac{1}{4}(n-1)^2}}.H\left(q, \frac{2Kb}{\pi}\right),$$

$$h.\frac{e^{(\frac{1}{2}\pi-b)(n-1)i}}{q^{\frac{1}{4}(n-1)^2}}.\Theta\left(q, \frac{2Kb}{\pi}\right),$$

$$h.\frac{e^{(\frac{1}{2}\pi-b)(n-1)i}}{q^{\frac{1}{4}(n-1)^2}}.H\left(q, \frac{2Kb}{\pi}\right).$$

— 319 — 1 v. o. statt und l. m. also

— 324 — 4 v. u. statt folgender Gleichungen l. m. die Gleichung (I.)

— 326 — 10 v. o. statt r^m, r^{2m} l. m. r, r^2

— 326 — 12 v. o. statt $\cos x$, $\cos mx$ l. m. $r\cos 2x$, $r^m\cos 2mx$

— 326 — 10 v. u. statt $\varphi(2\alpha-1, 1, 1, q, r)$ l. m. $\varphi(2\alpha-1, 1, 1, q, r^2)$

— 328 — 13 v. o. statt $=\varphi$ etc. l. m. $=(1-q^{1-\gamma})\varphi$ etc.

17.

Théorème relatif au cercle qui passe par trois points d'une ellipse.

(Par Mr. *Joachimsthal* de Berlin.)

Théorème. Étant menée une circonférence par trois points x, y, z d'une ellipse, le rayon sera égal au produit des demi-diamètres parallèles aux trois cordes xz, yz et xy, divisé par le produit des demi-axes.

Démonstration. Qu'on mène (fig. 1e) du centre c les trois demi-diamètres

$$cx' = D \text{ parallèlement à la droite } yz,$$
$$cy' = D' \text{ - - - - - - } zx,$$
$$cz' = D'' \text{ - - - - - - } xy,$$

et la corde $x'y'$; et qu'on fasse ensuite la projection orthogonale de la figure, de manière que l'ellipse devienne une circonférence de cercle. (Dans la figure 1e X est la projection de x, X' de x' etc. etc.)

En désignant par A et B les demi-axes de l'ellipse, et par R le rayon du cercle qui passe par x, y et z, on aura

$$R = \frac{\overline{xy}}{2\sin x} = \frac{xy}{4}\,\frac{DD'}{\triangle cx'y'} \quad \text{et} \quad \frac{\triangle CX'Y'}{\triangle cx'y'} = \frac{A}{B}.$$

Comme on a

$$2\triangle CX'Y' = A^2 \sin Y'CX' = A^2 \sin Z = A^2 \frac{XY}{2CZ'},$$

on en tire

$$2\triangle cx'y' = AB \cdot \frac{XY}{2CZ'},$$

Or le rapport de deux droites parallèles étant égal à celui des projections, on aura

$$\frac{XY}{CZ'} = \frac{xy}{cz'} = \frac{xy}{D''},$$

donc

$$(1.) \qquad 4\triangle cx'y' = AB \cdot \frac{xy}{D''}$$

et

$$(2.) \qquad R = \frac{DD'D''}{AB}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

On en tire aisément le théorème connu, suivant lequel les cordes communes d'un cercle et d'une ellipse sont également inclinées sur les axes.

Corollaire 1. On voit à l'aide de la formule (1.), ou bien de celle-ci,

$$(3.) \qquad DD'\sin(D,D') = AB\frac{xy}{2D''},$$

que l'expression $DD'\sin(D,D')$ ne change pas de valeur, puisque le sommet z du triangle décrit l'ellipse. Il en sera de même de l'aire du parallélogramme formé par les quatre tangentes aux extrémités des diamètres parallèles aux côtés mobiles xz et yz. Le côté xy étant un diamètre $= 2D''$, on aura

$$DD'\sin(D,D') = AB;$$

ce qui est le théorème connu sur les diamètres conjugués.

Corollaire 2. Concevons que les points z et y viennent se réunir en un seul, p. e. en y, on aura $D' = D''$, et D sera la demi-diamètre parallèle à la tangente en y; donc $R = \frac{D'^2 D}{AB}$. Mais la distance du centre à la tangente en y étant P, on a $PD = AB$, donc:

> Le rayon d'un cercle qui passe par deux points y et x d'une ellipse et qui touche la courbe en y, est égal à $\frac{D'^2}{P}$; D' étant le demi-diamètre parallèle à la corde xy, et P la distance du centre de la courbe à la tangente en y.

En faisant coïncider les trois points x, y, z, on obtient les formules connues pour le rayon du cercle osculateur.

Les formules analogues pour l'ellipsoïde seront développées dans un mémoire sur l'application des déterminants à la Géométrie.

Berlin Avril 1849.

18.

Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln.

(Von Herrn *S. Aronhold* zu Berlin.)

Im acht und zwanzigsten Bande dieses Journals hat ***Hesse*** eine Reihe von Problemen aufgestellt, die sowohl für die Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln wichtig, als für die Algebra dadurch interessant sind, dafs sie das erste Beispiel einer neuen Gattung höherer Gleichungen liefern, die zu den algebraisch auflösbaren gehören.

Die Lösung der dort vorliegenden Gleichung neunten Grades, von der für die geometrische Anwendung die Bestimmung der Wendepuncte einer Curve dritten Grades abhängig ist, kann nämlich durch eine ***biquadratische*** geschehen, aus deren Wurzeln und den übrigen Constanten sich eine cubische Gleichung zusammensetzen läfst, welche ihrerseits das Problem sofort auf die Auflösung von linearen Gleichungen zurückführt.

In der citirten Abhandlung ist gezeigt worden, wie man durch bestimmte Operationen, und nach Auflösung eines interessanten Systems linearer Gleichungen, zu denjenigen Functionen gelangen kann, aus welchen sich die reducirte ***biquadratische*** Gleichung zusammensetzen läfst.

Es dürfte nun, bei der vielfachen Anwendung, welche diese Gleichung in der ganzen Theorie findet, zweckmäfsig sein, eine Darstellung derselben zu kennen, nach welcher sie in ihrer schliefslichen und einfachsten Endform aus den ursprünglichen Constanten sich ergiebt, ohne dafs man genöthigt ist, zuvor die von ***Hesse*** vorgeschriebenen Operationen auszuführen.

Untersuchungen, die ich über die homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln in der Weise angestellt habe, dafs ich die wichtigsten algebraischen Verbindungen ihrer Coëfficienten und die ihnen bei- und untergeordneten Functionen zu ermitteln suchte, führten zu neuen Eigenthümlichkeiten derselben, die ich in einer ausführlichen Abhandlung mitzutheilen mir erlauben werde. Andrerseits lieferten sie eine Darstellung der ***Hesse***'schen Probleme, nach welchen es möglich ist, den Character der genannten biquadratischen Gleichung, so wie ihre Wurzeln, vollständig anzugeben und die Func-

tionen, aus denen sie zusammengesetzt ist und welche für die ganze Theorie wichtig sind, in der Einfachheit zu bilden, wie sie vielleicht den in diesem Journale ausgesprochenen Wünschen von ***Cayley*** (Bd. 29. S. 55.) und ***Hesse*** (Bd. 36. S. 144.) entsprechen dürfte.

Im Folgenden will ich die Resultate dieser Untersuchungen mittheilen, ohne jedoch auf die weitere Ausführung derselben einzugehen, welche ich in der gröfsern Abhandlung zu geben beabsichtige.

§. 1.

Man bezeichne eine homogene Function dritten Grades der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 durch

$$f(x_1, x_2, x_3)$$
$$= a_{1,1,1}x_1^3 + a_{2,2,2}x_2^3 + a_{3,3,3}x_3^3 + 6a_{1,2,3}x_1x_2x_3 + 3a_{2,2,3}x_2^2x_3 + 3a_{2,3,3}x_2x_3^2$$
$$+ 3a_{1,3,3}x_1x_3^2 + 3a_{1,1,3}x_1^2x_3 + 3a_{1,2,2}x_1x_2^2 + 3a_{1,1,2}x_1^2x_2,$$

oder kürzer durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu,$$

wo für $\varkappa$, λ, μ alle Combinationen, mit Wiederholungen, der Zahlen 1, 2, 3 zu setzen sind, und Permutationen der Indices den Coëfficienten ungeändert lassen; was für alle analogen Bezeichnungen hier gültig sein soll.

Es sei ferner die homogene Function dritten Grades

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa,\lambda,\mu}x_{\varkappa,\lambda,\mu}$$

die ***Functionaldeterminante*** der frühern, d. h. die Determinante des Systems der zweiten Differentialquotienten

$$f''(x_1, x_1),\quad f''(x_1, x_2),\quad f''(x_1, x_3),$$
$$f''(x_2, x_1),\quad f''(x_2, x_2),\quad f''(x_2, x_3),$$
$$f''(x_3, x_1),\quad f''(x_3, x_2),\quad f''(x_3, x_3),$$

und zwar nachdem diese Function durch 6^2 dividirt ist, so dafs von dem Zahlenfactor 6^3, den sie wegen der mit dem Factor 6 behafteten zweiten Differentialquotienten erhält, nur noch die Zahl 6 zurückbleibt, welche dazu dient, die Coëfficienten $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ ohne Zahlendivisoren darzustellen.

Das Letztere gilt für die Bildung jeder hier vorkommenden Functionaldeterminante, welche überall durch ein dem Functionszeichen vorgesetztes Δ angedeutet werden soll.

Nach der gewöhnlichen Determinantenbezeichnung wäre hiernach

$$\Delta f = \frac{1}{6^2}\Sigma\pm f''(x_1, x_1).f''(x_2, x_2).f''(x_3, x_3);$$

woraus hervorgeht, dafs die Coëfficienten $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *homogene* Functionen der Gröfsen $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ sind, und in Bezug auf dieselben *vom dritten Grade.*

In dem zweiten Theile der citirten Abhandlung „Über die Wendepuncte einer Curve dritten Grades", Bd. 28. dieses Journals, ist unter Lehrsatz 14. die Lösung des folgenden algebraischen Problems gegeben:

1. Die Werthe der Unbekannten $\frac{x_1}{x_3}$ ***und*** $\frac{x_2}{x_3}$ ***aus den Gleichungen dritten Grades:***

$$1. \quad \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \Delta f(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases}$$

zu ermitteln.

Diese Aufgabe setzt offenbar die Lösung einer Gleichung neunten Grades voraus und liefert neun bestimmte Werthe, die im Allgemeinen weder Null, noch unendlich sind.

Der specielle Character des Systems 1. besteht aber darin, dafs *jede **lineare Function der Unbekannten, welche für zwei den Gleichungen (1.) genügende Werthensysteme verschwindet, diese Eigenschaft auch noch jedesmal für ein bestimmtes drittes, denselben Gleichungen genügendes Werthensystem besitzt,*** und geht aus dem folgenden, als Lehrsatz 8. derselben Abhandlung gegebenen Theorem hervor:

2. Man kann die Functionen f ***und*** Δf ***auf vier verschiedene Arten mit solchen constanten Factoren multipliciren, dafs ihre Summe in drei lineare Factoren zerlegbar ist.***

Es sei λ der Factor von f, der andere $=1$, was immerhin zuläfsig ist, so müfste nach diesem Theorem die Gleichung

$$2. \quad \lambda f + \Delta f = y_1 . y_2 . y_3$$

Statt finden, in welcher y_1, y_2, y_3 lineare homogene Functionen der Gröfsen x_1, x_2, x_3 bezeichnen.

Offenbar findet aber zugleich mit $f=0$ und $\Delta f=0$ auch die Gleichung

$$\lambda f + \Delta f = 0 \quad \text{oder} \quad y_1 . y_2 . y_3 = 0$$

Statt, aus welcher hervorgeht, dafs die Werthe der Unbekannten den Gleichungen

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

Genüge leisten.

Hieraus folgt die angegebene Eigenschaft der Wurzeln des Systems 1. Da nämlich *jede* der Gleichungen $y_\varkappa = 0$ mit einer des Systems 1. zu verbinden ist, so müssen auch jeder derselben ***drei*** Werthensysteme genügen.

Zur Bestimmung des Factors λ findet ***Hesse*** eine biquadratische Gleichung; woraus hervorgeht, dafs es ***vier*** Zerlegungen giebt.

Dieser Umstand giebt sofort die Lösung des Problems. Wählt man nämlich von diesen Wurzeln zwei beliebige λ' und λ'', so kann man durch Auflösung einer cubischen Gleichung die Factorenzerlegung

$$\lambda' f + \Delta f = y_1' \cdot y_2' \cdot y_3',$$
$$\lambda'' f + \Delta f = y_1'' \cdot y_2'' \cdot y_3''$$

ausführen, wo $y_\varkappa'$ und $y_\varkappa''$ aus den Functionen $y_\varkappa$ gefunden werden, wenn man in denselben statt λ respective λ' und λ'' setzt.

Da nun beide Functionen für die Werthe der Unbekannten verschwinden müssen, so hat man die Gleichungen

$$y_1' \cdot y_2' \cdot y_3' = 0,$$
$$y'' \cdot y_2'' \cdot y_3'' = 0;$$

aus welchen hervorgeht, dafs jeder Factor einzeln verschwindet.

Verbindet man daher jede der Gleichungen

$$y_1' = 0, \quad y_2' = 0, \quad y_3' = 0$$

mit jeder des zweiten Systems:

$$y_1'' = 0, \quad y_2'' = 0, \quad y_3'' = 0,$$

so erhält man durch Auflösung linearer Gleichungen die verlangten neun Werthensysteme der Unbekannten.

Die ganze Aufgabe kommt also auf die Bestimmung von λ oder der biquadratischen Gleichung hinaus, deren Wurzel λ ist. Hiezu dient der Lehrsatz 6. der angegebenen Abhandlung:

3. Wenn man durch a und b beliebige Factoren bezeichnet, und durch $\Delta(af + b\Delta f)$ die Functionaldeterminante für $af + b\Delta f$: so findet immer die Gleichung

$$3. \quad \Delta(af + b\Delta f) = Af + B.\Delta f$$

Statt, wo A und B homogene Functionen dritten Grades der Gröfsen a und b und ganze Functionen der Coëfficienten $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ sind.

Dieser Satz ist nicht allein für den vorliegenden Fall, sondern auch für die ganze Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln wichtig.

Bildet man aus den Gröfsen

$$\begin{matrix} A, & B \\ a, & b \end{matrix}$$

die Function

$$G = Ba - Ab,$$

welche in Bezug auf a und b homogen und vom vierten Grade ist, und setzt

$$4. \qquad G = Ba - Ab = 0,$$

so erhält man die verlangte biquadratische Gleichung.

4. Nennt man λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 die Wurzeln der nach $\frac{a}{b}$, als Unbekannten, aufgelöseten Gleichung $G = 0$, so haben die Functionen

$$\lambda_1 f + \Delta f, \quad \lambda_2 f + \Delta f, \quad \lambda_3 f + \Delta f, \quad \lambda_4 f + \Delta f$$

die verlangte Eigenschaft der Zerlegbarkeit.

Die von *Hesse* gegebene Darstellung, welche einen andern Ausgangspunct hat, läfst das algebraische Problem eher als ein Corollar der übrigen Entwicklungen erscheinen; ich habe es daher nicht für überflüssig gehalten, die von ihm gegebenen Sätze, mit einer geringen Veränderung der Bezeichnung, wie sie für das Folgende passend schien, in der Reihenfolge vorzuführen, in welcher sie direct die Auflösung der Aufgabe gewähren.

§. 2.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dafs das Problem wesentlich von den Sätzen 2. und 4. abhängig ist, und dafs zur Durchführung desselben die Kenntnifs der Functionen A, B, G erforderlich ist.

Der Beweis des zweiten Satzes wird in der citirten Abhandlung von der dort durchgeführten Transformation der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln abhängig gemacht. Für eine directe Darstellung des algebraischen Problems dürfte es zweckmäfsig sein, die Benutzung der transformirten Form zu vermeiden. Dies hat überdies noch einen andern Grund, den ich im Folgenden auseinandersetzen werde.

Das Problem verlangt die Bestimmung einer einzigen Unbekannten λ, damit die homogene Function dritten Grades

$$\lambda f + \Delta f$$

in drei Factoren zerlegbar sei. Man überzeugt sich leicht durch Coëfficienten-Abzählung, dafs *drei Bedingungsgleichungen* erfüllt sein müssen, damit eine

homogene Function dritten Grades von drei Variabeln diese Eigenschaft besitze. Es entsteht daher die Frage, wie es möglich sei, eine ***einzige*** Gröfse so zu bestimmen, dafs dadurch ***dreien*** Gleichungen genügt werde. Der von ***Hesse*** gegebene Beweis durch die transformirte Form erledigt diese Frage nicht, da er nur feststellt, dafs in ***dieser*** Form, auf welche die allgemeine jederzeit zurückgeführt werden kann, die Zerlegbarkeit durchführbar ist.

Eine Darstellung symmetrischer Bedingungsgleichungen für die Zerlegbarkeit einer homogenen Function dritten Grades von drei Variabeln in drei lineare Factoren ist, soviel ich weifs, bisher noch nicht gegeben worden. Ich werde daher die darauf bezüglichen Sätze hier zunächst kurz anführen; so weit sie zu dem angegebenen Beweise nothwendig sind.

§. 3.

Bezeichnet man durch

$$F = \Sigma A_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu, \qquad \Delta F = \Sigma B_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

die ***gegebene*** homogene ***Function*** dritten Grades von drei Variabeln und ihre ***Functionaldeterminante,*** und dann eine aus den Coëfficienten beider gebildete Function auf folgende Weise:

$$A_{\varkappa,\lambda,\mu} B_{\varkappa_1,\lambda_1,\mu_1} - A_{\varkappa_1,\lambda_1,\mu_1} B_{\varkappa,\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \varkappa, & \lambda, & \mu \\ \varkappa_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix},$$

so ist ***der Ausdruck*** $\begin{pmatrix} \varkappa, & \lambda, & \mu \\ \varkappa_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix}$ ***eine homogene Function vierten Grades der Gröfsen*** $A_{\varkappa,\lambda,\mu}$.

In Bezug auf diese finden die folgenden Sätze Statt:

Wenn man für $\varkappa, \lambda, \mu, \varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ ***alle möglichen Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 setzt, so werden die sämmtlichen Gleichungen***

$$5. \quad \begin{pmatrix} \varkappa, & \lambda, & \mu \\ \varkappa_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix} = A_{\varkappa,\lambda,\mu} B_{\varkappa_1,\lambda_1,\mu_1} - B_{\varkappa,\lambda,\mu} A_{\varkappa_1,\lambda_1,\mu_1} = 0$$

erfüllt, so oft die Function F in drei lineare Factoren zerlegbar ist.

Umgekehrt hat die Function F die angegebene Eigenschaft, wenn es möglich ist, allen Gleichungen 5. zu genügen, und es ist zu bemerken, dafs die Functionen 5., deren Anzahl 45 beträgt und welche in theils von einander abhängigen, theils in unabhängigen bestehen, die Eigenschaft haben, zu gleicher Zeit sämmtlich zu verschwinden, sobald dies für drei derselben Statt findet, die von einander unabhängig sind.

Für den vorliegenden Zweck genügen diese Sätze. Ich bemerke indessen noch, dafs die gegenseitige Abhängigkeit der Functionen 5. aus der

identischen Gleichung

$$\begin{pmatrix} x, & \lambda, & \mu \\ x_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, & \lambda_1, & \mu_1 \\ x_1, & \lambda, & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1, & \lambda, & \mu_1 \\ x, & \lambda_1, & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1, & \lambda_1, & \mu \\ x, & \lambda, & \mu_1 \end{pmatrix}$$

und aus der bekannten Eigenschaft der Determinanten

$$0 = \begin{pmatrix} x, & \lambda, & \mu \\ x_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix} A_{x_2,\lambda_2,\mu_2} + \begin{pmatrix} x_2, & \lambda_2, & \mu_2 \\ x, & \lambda, & \mu, \end{pmatrix} A_{x_1,\lambda_1,\mu_1} + \begin{pmatrix} x_1, & \lambda_1, & \mu_1 \\ x_2, & \lambda_2, & \mu_2 \end{pmatrix} A_{x,\lambda,\mu}$$

hervorgeht.

Da sämmtliche 45 Gleichungen nur die Stelle von dreien vertreten, so stimmt dies mit der durch Coëfficienten-Abzählung erhaltenen Anzahl überein; man wird jedoch wohl thun, bei der Anwendung dieser Bedingungsgleichungen jedesmal *alle* aufzustellen. Bildet man die Bedingungsgleichungen für diejenige Function, in welche F übergeht, wenn sie durch lineare Substitutionen transformirt wird, nennt die neuen Variabeln y_1, y_2, y_3 und setzt

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^1 y_1 + x_1^2 y_2 + x_1^3 y_3, \\ x_2 &= x_2^1 y_1 + x_2^2 y_2 + x_2^3 y_3, \\ x_3 &= x_3^1 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^3 y_3, \end{aligned}$$

wo die obern Zahlen bei den Substitutions-Coëfficienten Indices bezeichnen, so geht, für die transformirte Form, der Ausdruck $\begin{pmatrix} x, & \lambda, & \mu \\ x_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix}$ in den folgenden über:

$$r^2 . \Sigma[(A_{\varrho,\sigma,\tau} B_{\varrho_1,\sigma_1,\tau_1} - B_{\varrho,\sigma,\tau} A_{\varrho_1,\sigma_1,\tau_1})\{(x_x^\varrho x_\lambda^\sigma x_\mu^\tau)(x_{x_1}^{\varrho_1} x_{\lambda_1}^{\sigma_1} x_{\mu_1}^{\tau_1}) - (x_x^{\varrho_1} x_\lambda^{\sigma_1} x_\mu^{\tau_1})(x_{x_1}^\varrho x_{\lambda_1}^\sigma x_{\mu_1}^\tau)\}],$$

in welchem r die Determinante der Substitutions-Coëfficienten bezeichnet und die Summe über alle Werthe 1, 2, 3, sowohl für ϱ, σ, τ, als für ϱ_1, σ_1, τ_1, auszudehnen ist.

Aus der vorstehenden Gleichung geht hervor, dafs *jede Bedingungsgleichung von der transformirten Form aus der Summe der Producte gewisser Verbindungen der Substitutions-Coëfficienten und solcher Functionen der ursprünglichen Coëfficienten besteht, welche, wenn sie verschwinden, die sämmtlichen Bedingungen für die Zerlegbarkeit der ursprünglichen Function darstellen.*

§. 4.

Es sei $af + b\Delta f$ die gegebene Function F, so ist nach (§. 1. 3.) ihre Functionaldeterminante ΔF:

$$\Delta F = Af + B\Delta f,$$

folglich:

$$A_{x,\lambda,\mu} = a.a_{x,\lambda,\mu} + b.b_{x,\lambda,\mu},$$
$$B_{x,\lambda,\mu} = A.a_{x,\lambda,\mu} + B.b_{x,\lambda,\mu}.$$

Soll nun $af + bAf$ in drei Factoren zerlegbar sein, so müssen nach §. 3. die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x, & \lambda, & \mu \\ x_1, & \lambda_1, & \mu_1 \end{pmatrix} = (a.a_{x,\lambda,\mu} + b.b_{x,\lambda,\mu})(A.a_{x_1,\lambda_1,\mu_1} + B.b_{x_1,\lambda_1,\mu_1}) - (a.a_{x_1,\lambda_1,\mu_1} + b.b_{x_1,\lambda_1,\mu_1})(A.a_{x,\lambda,\mu} + B.b_{x,\lambda,\mu}) = 0$$

erfüllt werden.

Nach einem bekannten Determinantensatze nimmt die vorstehende Gleichung die Form

$$8. \quad (Ba - Ab)(a_{x,\lambda,\mu} b_{x_1,\lambda_1,\mu_1} - a_{x_1,\lambda_1,\mu_1} b_{x,\lambda,\mu}) = 0$$

an, folglich haben *alle* Bedingungsgleichungen den Factor (§. 1. 4.)

$$G = Ba - Ab$$

und werden demnach erfüllt, sobald der *einen* Gleichung

$$G = Ba - Ab = 0$$

Genüge geschehen ist.

Man kann daher immer über eine Gröfse so verfügen, dafs die Factorenzerlegung möglich ist, und es geschieht dieses durch Auflösung der Gleichung

$$G = Ba - Ab = 0;$$

was die Sätze (§. 1. 2.) ***und*** (§. 1. 4.) ***verlangten.***

Man ersieht aus (8.) noch, dafs, wenn

$$G = Ba - Ab$$

nicht verschwindet, die Gleichungen

$$a_{x,\lambda,\mu} b_{x_1,\lambda_1,\mu_1} - a_{x_1,\lambda_1,\mu_1} b_{x,\lambda,\mu} = 0$$

erfüllt werden müfsten; welche die Bedingungen sind, dafs f in lineare Factoren zerlegbar sei. Es folgt daher, ***dafs, wenn f nicht in Factoren zerlegbar ist, die Zerlegbarkeit nur durch Auflösung der Gleichung*** $G = 0$ ***bewirkt werden kann.***

§. 5.

Im Folgenden werde ich die Operationen kurz angeben, welche ***Hesse*** vorschreibt, um zur Kenntnifs der Functionen A, B, G zu gelangen, von welchen die Lösung des Problems abhängig ist.

Wenn für $\varkappa$, λ, μ alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholungen gesetzt werden, und Permutationen der Elemente unberücksichtigt bleiben, so stellen von den Buchstaben $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ jeder zehn Gröfsen dar, die in der citirten Abhandlung durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$9.\quad \begin{cases} \Sigma a_{1,\varkappa,\lambda} p_{1,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma a_{2,\varkappa,\lambda} p_{1,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma a_{3,\varkappa,\lambda} p_{1,\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{1,\varkappa,\lambda} p_{2,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma a_{2,\varkappa,\lambda} p_{2,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma a_{3,\varkappa,\lambda} p_{2,\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{1,\varkappa,\lambda} p_{3,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma a_{2,\varkappa,\lambda} p_{3,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma a_{3,\varkappa,\lambda} p_{3,\varkappa,\lambda} = 0, \end{cases}$$

$$10.\quad \begin{cases} \Sigma b_{1,\varkappa,\lambda} q_{1,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma b_{2,\varkappa,\lambda} q_{1,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma b_{3,\varkappa,\lambda} q_{1,\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{1,\varkappa,\lambda} q_{2,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma b_{2,\varkappa,\lambda} q_{2,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma b_{3,\varkappa,\lambda} q_{2,\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{1,\varkappa,\lambda} q_{3,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma b_{2,\varkappa,\lambda} q_{3,\varkappa,\lambda} = 0, & \Sigma b_{3,\varkappa,\lambda} q_{3,\varkappa,\lambda} = 0, \end{cases}$$

in welchen die Summen über alle Werthe 1, 2, 3 für $\varkappa$ und λ auszudehnen sind.

Die Gleichungen (9. und 10.) sind vollkommen hinreichend zur Bestimmung der ***Verhältnisse*** der Unbekannten, die allein hier benutzt werden. Die Werthe dieser Verhältnisse sind die ersten partiellen Determinanten der Systeme (9. und 10.), so dafs man die Gröfsen $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ selbst den partiellen Determinanten des Systems (9.) gleich setzen kann, wodurch sie Functionen der Gröfsen $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ werden, welche in Bezug auf dieselben homogen und vom 9ten Grade sind. Die Gröfsen $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ bedeuten in der citirten Abhandlung die Quotienten, welche man durch Division der partiellen Determinanten aus (10.) mit einer Function 16ten Grades in Bezug auf die Coëfficienten $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ erhält. Die partiellen Determinanten des Systems (10.) führen diese Function als Factor mit sich, nach dessen Beseitigung, welche, wie gezeigt wird, ***a priori*** leicht bewerkstelligt werden kann, die Gröfsen $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ als Functionen 11ten Grades in Bezug auf $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ auftreten.

Es wird ferner in der genannten Abhandlung die Gleichung

$$11.\quad \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu} q_{\varkappa,\lambda,\mu} = \Sigma b_{\varkappa,\lambda,\mu} p_{\varkappa,\lambda,\mu} = (R)$$

bewiesen, wo (R) eine homogene Function 12ten Grades ist und

$$(R) = 0$$

sich als Resultat der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen:

$$f'x_1 = 0, \quad f'x_2 = 0, \quad f'x_3 = 0$$

ergiebt.

Schliefslich wird die Berechnung der sämmtlichen Coëfficienten von

$$\Delta(af + b\Delta f)$$

verlangt, so dafs, wenn die Werthe derselben durch $c_{\varkappa,\lambda,\mu}$ bezeichnet werden,

die Gleichung

$$\Delta(af+b\Delta f) = Af+B\Delta f$$

die Form

$$\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu = A\Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu + B\Sigma b_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

annimmt. Setzt man in dieselbe, statt der Potenzen und Producte der Variabeln, sowohl die entsprechenden Gröfsen $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, als $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so finden wegen (9. und 10.) die Gleichungen

$$\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}p_{\varkappa,\lambda,\mu} = B\Sigma b_{\varkappa,\lambda,\mu}p_{\varkappa,\lambda,\mu} = B.(R),$$
$$\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}q_{\varkappa,\lambda,\mu} = A\Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu}q_{\varkappa,\lambda,\mu} = A.(R)$$

Statt, aus welchen A und B gefunden werden, wenn man durch (R) dividirt.

Die Functionen A und B haben, als homogene Functionen dritten Grades der Gröfsen a und b, die Form:

$$12.\quad \begin{cases} A = \alpha_1 a^3+\alpha_2 a^2 b+\alpha_3 ab^2+\alpha_4 b^3, \\ B = \beta_1 a^3+\beta_2 a^2 b+\beta_3 ab^2+\beta_4 b^3; \end{cases}$$

wo die Gröfsen α und β ganze Functionen der Coëfficienten $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ sind. Zur Aufstellung der biquadratischen Gleichung ist die Kenntnifs jeder dieser Gröfsen nothwendig.

Durch die angegebene Darstellungsweise ist die Möglichkeit gegeben, sie zu bilden, indem man die Functionen $\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ nach den Potenzen von a und b ordnet. Indessen ist zu bemerken, dafs (R) ein *überflüssiger* Factor ist, weil A und B *ganze* Functionen sind, und dafs, obwohl die Bildungsweise desselben durch die Gleichung (11.) bekannt ist, doch die Division durch (R) sich im Allgemeinen nicht leicht wird bewerkstelligen lassen.

Von den 8 Gröfsen α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4 sind nur 6 zu bestimmen, indem sich $\beta_1 = 1$ aus blofser Ansicht der Gleichung (3.) ergiebt, und $\alpha_1 = 0$ *a priori* ermittelt werden kann; wie aus der genannten Abhandlung zu ersehen ist.

Die hier folgende Darstellung der 6 Functionen macht es möglich, den überflüssigen Factor (R) von vorne herein zu vermeiden, und führt zu dem Resultate, dafs sämmtliche Functionen α und β nur von *zwei Gröfsen* abhangen, welche überhaupt zu den wichtigen Verbindungen der Coëfficienten einer homogenen Function dritten Grades von drei Variabeln gehören.

Es läfst sich überdies aus diesen Functionen (R) höchst einfach zusammensetzen und *es ergiebt sich, sowohl hiezu, wie zur Bestimmung der Gröfsen A, B, weder die Kenntnifs der Auflösungen der Systeme* (9.) *und* (10.) *noch die Berechnung der Coëfficienten* $c_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *nothwendig.*

§. 6.

Die Coëfficienten zweier homogenen Functionen zweiten Grades der drei Variabeln x_1, x_2, x_3, nämlich:

$$\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda \quad \text{und} \quad \Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda,$$

lassen sich bekanntlich in folgende Systeme bringen:

$$13. \quad \begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3}, \end{cases}$$

zu welchen zwei andere gehören, die aus den partiellen Determinanten der vorstehenden gebildet und wie folgt bezeichnet werden sollen:

$$14\,a. \quad \begin{cases} (aa)^{1,1}, & (aa)^{1,2}, & (aa)^{1,3}, \\ (aa)^{2,1}, & (aa)^{2,2}, & (aa)^{2,3}, \\ (aa)^{3,1}, & (aa)^{3,2}, & (aa)^{3,3}, \end{cases} \qquad 14\,b. \quad \begin{cases} (bb)^{1,1}, & (bb)^{1,2}, & (bb)^{1,3}, \\ (bb)^{2,1}, & (bb)^{2,2}, & (bb)^{2,3}, \\ (bb)^{3,1}, & (bb)^{3,2}, & (bb)^{3,3}; \end{cases}$$

wo die obern Zahlen Indices bedeuten, und wo z. B. $(aa)^{1,1}$, $(aa)^{1,2}$, $(bb)^{1,1}$, $(bb)^{1,2}$ die folgenden Werthe haben:

$$(aa)^{1,1} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{2,3}, \qquad (aa)^{1,2} = a_{1,3}a_{2,3} - a_{1,2}a_{3,3}, \text{ u. s. w.},$$
$$(bb)^{1,1} = b_{2,2}b_{3,3} - b_{2,3}b_{2,3}, \qquad (bb)^{1,2} = b_{1,3}b_{2,3} - b_{1,2}b_{3,3}, \text{ u. s. w.}$$

Man kann aber aus den Coëfficienten beider Functionen ein ihnen gemeinschaftliches System bilden, nämlich:

$$15. \quad \begin{cases} (ab)^{1,1}, & (ab)^{1,2}, & (ab)^{1,3}, \\ (ab)^{2,1}, & (ab)^{2,2}, & (ab)^{2,3}, \\ (ab)^{3,1}, & (ab)^{3,2}, & (ab)^{3,3}; \end{cases}$$

welches man aus (14 *a.*) erhält, ***wenn man die Functionen dieses Systems nach allen Gröfsen a differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden b substituirt; oder aus*** (14 *b.*), ***wenn man die Functionen dieses Systems nach allen Gröfsen b differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden a substituirt.***

Hiernach findet man

$$(ab)^{1,1} = a_{2,2}b_{3,3} + a_{3,3}b_{2,2} - 2a_{2,3}b_{2,3},$$
$$(ab)^{1,2} = a_{1,3}b_{2,3} + a_{2,3}b_{1,3} - a_{1,2}b_{3,3} - a_{3,3}b_{1,2},$$
u. s. w.

und es ist

$$16. \quad (ab)^{\varkappa,\lambda} = (ab)^{\lambda,\varkappa}.$$

Anstatt der angenommenen homogenen Functionen zweiten Grades sollen jetzt je zwei der ersten partiellen Differentialquotienten der Functionen f und Δf nach den Variabeln gewählt werden.

Wenn man r allmälig die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten läfst, so stellen die Functionen

$$\tfrac{1}{3}f'x_r = a_{r,1,1}x_1^2 + a_{r,2,2}x_2^2 + a_{r,3,3}x_3^2 + 2a_{r,2,3}x_2x_3 + 2a_{r,1,3}x_1x_3 + 2a_{r,1,2}x_1x_2,$$

$$\tfrac{1}{3}\Delta f'x_r = b_{r,1,1}x_1^2 + b_{r,2,2}x_2^2 + b_{r,3,3}x_3^2 + 2b_{r,2,3}x_2x_3 + 2b_{r,1,3}x_1x_3 + 2b_{r,1,2}x_1x_2$$

alle Differentialquotienten dar. Man sieht, dafs die Coëfficienten eines jeden ***nach x_r, den festen Index r*** haben, während die übrigen Indices alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu je zwei eingehen. Es läfst sich daher für $(ab)^{\varkappa,\lambda}$ aus (15.) die Bezeichnung

$$(a_r a_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$$

setzen, wenn statt der Functionen $\Sigma a_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda$, $\Sigma b_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda$ respective die Differentialquotienten $\frac{1}{3}f'x_r$ und $\frac{1}{3}f'x_\varrho$ gewählt werden; und eben so

$$(a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda},$$

wenn man $\frac{1}{3}f'x_r$ und $\frac{1}{3}\Delta f'x_\varrho$ gewählt hat.

Die Zusammensetzung der Functionen

$$(a_r a_\varrho)^{\varkappa,\lambda} \text{ und } (a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$$

ist aus der Bezeichnung sofort zu ersehen, wenn die Kenntnifs des Systems (14.) vorausgesetzt wird; welches hinlänglich im Gebrauche ist. Es ist z. B.

$$(a_r a_\varrho)^{1,1} = a_{r,2,2}a_{\varrho,3,3} + a_{r,3,3}a_{\varrho,2,2} - 2a_{r,2,3}a_{\varrho,2,3};$$

$$(a_r b_\varrho)^{1,1} = a_{r,2,2}b_{\varrho,3,3} + a_{r,3,3}b_{\varrho,2,2} - 2a_{r,2,3}b_{\varrho,2,3};$$

u. s. w.

Die Functionen $(a_r a_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$ sind in Bezug auf die Coëfficienten $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ homogen und ***vom zweiten Grade***, die Functionen $(a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$ hingegen vom ***vierten Grade***.

Es ist noch zu beachten, dafs wegen (16.) die Gleichungen

$$17. \qquad (a_r a_\varrho)^{\varkappa,\lambda} = (a_\varrho a_r)^{\varkappa,\lambda}, \qquad (a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda} = (b_\varrho a_r)^{\varkappa,\lambda}$$

Statt finden, jedoch $(a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$ nicht $(a_\varrho b_r)^{\varkappa,\lambda}$ gleich ist; so dafs für die letztgenannten Gröfsen eine Vertauschung der Indices nicht Statt finden darf. Aus diesem Grunde ist die Anzahl der Functionen $(a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$ gröfser als die Anzahl der Functionen $(a_r a_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$, und diese beträgt in der That 36, während jene 45 ist.

Die Functionen mit gleichen untern Indices $(a_r a_r)^{\varkappa,\lambda}$ können sowohl direct aus (14.) abgeleitet werden, als auch aus den Functionen $(a_r a_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$, wenn man darin $r = \varrho$ setzt. Man findet sie jedoch im letztern Falle ***doppelt*** so

grofs als im erstern. ***Der bessern Uebereinstimmung wegen soll deshalb*** $(a_r a_r)^{x,\lambda}$ ***so definirt werden, dafs es aus*** $(a_r a_\varrho)^{x,\lambda}$ ***hervorgeht, wenn man*** $r = \varrho$ ***setzt; wodurch diese Functionen den Factor 2 bekommen.***

Alle nun folgenden Operationen sollen mit Hülfe der Functionen $(a_r a_\varrho)^{x,\lambda}$, $(a_r b_\varrho)^{x,\lambda}$ und den ursprünglichen Coëfficienten ausgeführt, und überdies soll noch die Bildung der in $(a_r b_\varrho)^{x,\lambda}$ enthaltenen $b_{x,\lambda,\mu}$ aus den Coëfficienten und den erstgenannten Functionen angegeben werden; so dafs eigentlich nur diese Verbindungen der Coëfficienten, welche vom ***zweiten*** Grade sind, zur Darstellung der Formeln nothwendig sich zeigen.

§. 7.

Es sei

$$S = (a_1a_1)^{1,1}(a_1a_1)^{1,1} + (a_1a_1)^{2,2}(a_2a_2)^{1,1} + (a_1a_1)^{3,3}(a_3a_3)^{1,1} + 2(a_1a_1)^{2,3}(a_2a_3)^{1,1} + 2(a_1a_1)^{1,3}(a_1a_3)^{1,1} + 2(a_1a_1)^{1,2}(a_1a_2)^{1,1} = \Sigma(a_1a_1)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,1},$$

so ist überdies noch

$$18.\quad \begin{cases} S = \Sigma(a_1a_1)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,1}, & S = \Sigma(a_2a_2)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{2,2}, & S = \Sigma(a_3a_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{3,3}, \\ S = 2\Sigma(a_2a_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{2,3}, & S = 2\Sigma(a_1a_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,3}, & S = 2\Sigma(a_1a_2)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,2}. \end{cases}$$

Die Function S enthält alle Coëfficienten $a_{x,\lambda,\mu}$, ***in Bezug auf welche sie homogen und vom vierten Grade ist; sie hat ferner die Eigenschaft, ihre Form nicht zu verändern, wenn sie aus den Coëfficienten derjenigen Function gebildet wird, in welcher die gegebene f übergeht, wenn man sie durch lineare Substitutionen transformirt.***

Bezeichnet man wie in (§. 3.) durch r die Determinante der Substitutionscoëfficienten, und durch S_1 die aus den Coëfficienten der transformirten Form gebildete Function S, so ist

$$19.\quad S_1 = r^4 S.$$

Man bezeichne ferner durch $\tau_{x,\lambda}$ die folgenden Ausdrücke:

$$20.\quad \begin{cases} \tau_{1,1} = \Sigma(a_1b_1)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,1}, & \tau_{1,2} = \Sigma(a_1b_2)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,2}, & \tau_{1,3} = \Sigma(a_1b_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{1,3}, \\ \tau_{2,1} = \Sigma(a_2b_1)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{2,1}, & \tau_{2,2} = \Sigma(a_2b_2)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{2,2}, & \tau_{2,3} = \Sigma(a_2b_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{2,3}, \\ \tau_{3,1} = \Sigma(a_3b_1)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{3,1}, & \tau_{3,2} = \Sigma(a_2b_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{3,2}, & \tau_{3,3} = \Sigma(a_3b_3)^{x,\lambda}(a_xa_\lambda)^{3,3}, \end{cases}$$

so erhält man durch Addition der in einer Horizontal- oder Verticalreihe stehenden Gröfse immer dieselbe Summe, welche, weil sie den Factor 2 hat *), durch $2T$ bezeichnet werden soll, also:

$$21.\quad 2T = \tau_{1,1} + \tau_{1,2} + \tau_{1,3}, \quad 2T = \tau_{2,1} + \tau_{2,2} + \tau_{2,3}, \quad 2T = \tau_{3,1} + \tau_{3,2} + \tau_{3,3};$$

*) Dieser Factor rührt von den mit dem Factor 2 versehenen Gröfsen $(a_r a_r)^{x,\lambda}$ her.

wobei überdies noch die Gleichung

$$\tau_{r,\varrho} = \tau_{\varrho,r}$$

gilt, obwohl $(a_\varrho b_r)^{\varkappa,\lambda}$ nicht $(a_r b_\varrho)^{\varkappa,\lambda}$ gleich ist (17.).

Die Function T enthält alle Coëfficienten $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$, in Bezug auf welche sie homogen und vom 6ten Grade ist; sie hat ferner die Eigenschaft, ihre Form nicht zu verändern, wenn sie aus den Coëfficienten der durch lineare Substitutionen transformirten Function f gebildet wird.

Bezeichnet man durch T_1 die aus den Coëfficienten der transformirten Form gebildete Function T, so ist

$$22. \qquad T_1 = r^6 T.$$

§. 8.

Die Functionen S und T sind für die ganze Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln characteristisch und stellen, wenn sie verschwinden, die folgenden Eigenschaften derselben dar:

Wenn eine homogene Function dritten Grades von drei Variabeln in die Summe von drei Cuben zerlegbar ist, so ist immer

$$S = 0;$$

und umgekehrt.

Wenn eine homogene Function dritten Grades von drei Variabeln die Eigenschaft hat, dafs die Functionaldeterminante ihrer Functionaldeterminante wieder die ursprüngliche Function ist, so findet die Gleichung

$$T = 0$$

Statt; und umgekehrt.

Aus beiden Functionen läfst sich die folgende neue zusammensetzen:

$$23. \qquad R = T^2 - S^3.$$

Diese Function hat ebenfalls die Eigenschaft, ihre Form nicht zu ändern, wenn sie aus den Coëfficienten der transformirten Function f gebildet wird, und es ist

$$24. \qquad R_1 = r^{12} R;$$

wo R_1 die aus den Coëfficienten der transformirten Form gebildete Function R ist. Für diese gilt der folgende Satz:

Das Resultat der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen

$$f'x_1 = 0, \quad f'x_2 = 0, \quad f'x_3 = 0$$

wird durch die Gleichung

$$R = T^2 - S^3 = 0$$

dargestellt.

Aus demselben folgt, dafs der (§. 5. 11.) aufgeführte ***überflüssige Factor*** (R) mit der vorstehenden Function R bis auf einen Zahlenfactor übereinstimmt, und man findet

$$(R) = 6R,$$

wenn man berücksichtigt, dafs die Gröfsen $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ als die ersten partiellen Determinanten des linearen Systems (9.) definirt sind *).

§. 9.

Mit Hülfe der in (§. 6. und §. 7.) aufgestellten Verbindungen erhält man die Coëfficienten der Functionen A und B (§. 5. 12.) wie folgt:

$$25. \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 3S, & \alpha_3 = 6T, & \alpha_4 = 3S^2, \\ \beta_1 = 1, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = -3S, & \beta_4 = -2T, \end{cases}$$

so dafs auch β_2 verschwindet; ferner

$$26. \quad \begin{cases} A = 3Sa^2b + 6Tab^2 + 3S^2b^3, \\ B = \quad a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3; \end{cases}$$

endlich

$$27. \quad G = Ba - Ab = a^4 - 6Sa^2b^2 - 8Tab^3 - 3S^2b^4.$$

Es ist ersichtlich, dafs sich A und B durch Differentiation aus G ableiten lassen, und zwar ist

$$28. \quad A = -\tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial b}, \qquad B = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial a}.$$

Diese Gleichungen können *a priori* bewiesen werden.

§. 10.

Es finden sich noch folgende Verbindungen der Coëfficienten und der Functionen $(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa,\lambda}$:

1) ***Die Coëfficienten der Function Δf:***

$$29. \quad b_{\varrho,\sigma,\tau} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa,\lambda} a_{\tau,\varkappa,\lambda} = \Sigma(a_\sigma a_\tau)^{\varkappa,\lambda} a_{\varrho,\varkappa,\lambda} = \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa,\lambda} a_{\sigma,\varkappa,\lambda},$$

wo die Summen über alle Werthe 1, 2, 3 für $\varkappa$, λ auszudehnen sind.

2) ***Die Coëfficienten der Function $\Delta(af + b\Delta f)$:***

$$30. \quad c_{\varrho,\sigma,\tau} = (3Sa^2b + 6Tab^2 + 3S^2b^3)a_{\varrho,\sigma,\tau} + (a^3 - 3Sab^3 - 2Tb^3)b_{\varrho,\sigma,\tau},$$

aus welchen

$$31. \quad \Delta\Delta f = 3S^2 f - 2T\Delta f$$

folgt; so dafs der Coëfficient von f als ***vollständiges Quadrat*** sich ergiebt.

*) Die Function, welche durch R in der oft citirten Abhandlung bezeichnet ist, unterscheidet sich von der obenstehenden durch einen noch gröfsern Zahlenfactor; sie ist nämlich $= 4.6^4.(T^2 - S^3)$.

3) ***Die Functionen*** $q_{\varrho,\sigma,\tau}$ ***als Functionen der Gröfsen*** $p_{\varrho,\sigma,\tau}$:

$$q_{\varrho,\sigma,\tau} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa,\lambda} p_{\tau,\varkappa,\lambda} = \Sigma(a_\tau a_\sigma)^{\varkappa,\lambda} p_{\varrho,\varkappa,\lambda} = \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa,\lambda} p_{\sigma,\varkappa,\lambda},$$

durch welche die Auflösungen des Systems (10.) ***aus denen des Systems*** (9.) ***in den ursprünglichen Coëfficienten angegeben werden.***

Man sieht hieraus, dafs die von ***Hesse*** verlangten Operationen bei der Darstellung der Functionen ***A, B, G*** vermieden werden können und sich vielmehr *a posteriori* aus diesen und den einfachsten Verbindungen der Coëfficienten angeben lassen. Auch für die Lösungen der Systeme (9. und 10.) selbst, erhält man einfache Ausdrücke, ohne zur Bildung der partiellen Determinanten seine Zuflucht nehmen zu dürfen, wenn man die Kenntnifs ***der partiellen Differentialquotienten der Functionen S und T nach den ursprünglichen Coëfficienten*** $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ voraussetzt. Diese lassen sich nach einfachen bestimmten Gesetzen aus den ursprünglichen Coëfficienten leichter bilden, als durch wirkliche Ausführung der Differentiation. Doch gehe ich hierauf nicht weiter ein und füge nur die ***Werthe*** der Gröfsen $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ hinzu. Man findet:

4) ***Für die Functionen*** $p_{\varrho,\sigma,\tau}$, ***d. h. für die ersten partiellen Determinanten des Systems*** (9.):

$$32.\quad \begin{cases} 12.p_{\varrho,\sigma,\tau} = 3T\dfrac{\partial S}{\partial a_{\varrho,\sigma,\tau}} - 2S\dfrac{\partial T}{\partial a_{\varrho,\sigma,\tau}}, \\ 6.p_{\varrho,\varrho,\tau} = 3T\dfrac{\partial S}{\partial a_{\varrho,\varrho,\tau}} - 2S\dfrac{\partial T}{\partial a_{\varrho,\varrho,\tau}}, \\ 2.p_{\varrho,\varrho,\varrho} = 3T\dfrac{\partial S}{\partial a_{\varrho,\varrho,\varrho}} - 2S\dfrac{\partial T}{\partial a_{\varrho,\varrho,\varrho}}, \end{cases}$$

in welchen Ausdrücken die Indices immer *verschiedene* der drei Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen; was auch für die folgenden Ausdrücke gilt.

5) ***Die Functionen*** $q_{\varrho,\sigma,\tau}$, ***d. h. die ersten partiellen Determinanten des Systems*** (10.), ***nachdem dieselben durch einen allen gemeinschaftlichen Factor 16ten Grades in Bezug auf die ursprünglichen Coëfficienten*** (§. 5.) ***dividirt worden, sind:***

$$33.\quad \begin{cases} 12.q_{\varrho,\sigma,\tau} = -3S^2\dfrac{\partial S}{\partial a_{\varrho,\sigma,\tau}} + 2T\dfrac{\partial T}{\partial a_{\varrho,\sigma,\tau}}, \\ 6.q_{\varrho,\varrho,\tau} = -3S^2\dfrac{\partial S}{\partial a_{\varrho,\varrho,\tau}} + 2T\dfrac{\partial T}{\partial a_{\varrho,\varrho,\tau}}, \\ 2.q_{\varrho,\varrho,\varrho} = -3S^2\dfrac{\partial S}{\partial a_{\varrho,\varrho,\varrho}} + 2T\dfrac{\partial T}{\partial a_{\varrho,\varrho,\varrho}}. \end{cases}$$

Der erwähnte Factor ergiebt sich als ***vollständige vierte Potenz und hat den Werth*** $9S^4$.

§. 11.

Aus (27.) folgt die biquadratische Gleichung, durch welche der Factor λ so bestimmt wird, dafs

$$\lambda f + \Delta f$$

in drei Factoren zerlegbar sei.

Setzt man nemlich aus (27.):

$$G = a^4 - 6Sa^2b^2 - 8Tab^3 - 3S^2b^3 = 0,$$

dividirt die Gleichung durch b^4 und führt λ statt $\frac{a}{b}$ ein, so erhält man die Gleichung

$$34. \quad 0 = \lambda^4 - 6S\lambda^2 - 8T\lambda - 3S^2,$$

deren Character dadurch bedingt wird, dafs ihre Coëfficienten nur von *zwei* Gröfsen abhängen, welche *ganze* Functionen der Coëfficienten der Function f sind.

Es folgt hieraus, dafs zwischen den Coëfficienten einer allgemeinen biquadratischen Gleichung zwei Bedingungen erfüllt werden müssen, damit sie die Gleichung (34.) darstelle.

Wenn man eine allgemeine biquadratische Gleichung, wie folgt, bezeichnet:

$$\mathfrak{A}\lambda^4 + 4\mathfrak{B}\lambda^3 + 6\mathfrak{C}\lambda^2 + 4\mathfrak{D}\lambda + \mathfrak{E} = 0,$$

so ergiebt sich sofort

$$\mathfrak{B} = 0$$

als erste Bedingungsgleichung der Coëfficienten für die Gleichung (34.). Diese ist indessen keine wesentliche. Um die zweite zu erhalten, bemerke man Folgendes:

Der Character der Lösungen einer biquadratischen Gleichung hängt wesentlich von den folgenden Functionen ab:

$$D = \mathfrak{A}\mathfrak{E} + 3\mathfrak{C}^2 - 4\mathfrak{B}\mathfrak{D},$$
$$E = \mathfrak{A}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{E} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}^3,$$

welche sich unter Andern im 27ten Bande dieses Journals*) befinden. Man findet dort ebenfalls angegeben, ***dafs das Product der Cubikwurzeln, welche in der Lösung der reducirten cubischen Gleichung vorkommen, dem Ausdrucke*** $\frac{1}{3}D$ ***gleich ist***, woraus sich die Gröfse unter dem ***letzten*** Wurzelzeichen in der Auflösung der ***biquadratischen*** Gleichung, welche man auch

*) „Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden" von *Eisenstein*.

die ***Determinante*** der biquadratischen Gleichung nennt, als die Function

$$F = 3(27.E^2 - D^3)$$

ableiten läfst. Diese Form der Determinante ist übrigens von *Cayley* im 30ten Bande dieses Journals S. 19 angegeben worden.

Für die Gleichung (34.) findet man nun als *zweite* Bedingungsgleichung:

$$35. \quad D = 0.$$

Sie hat nach der obigen Bemerkung zur Folge, ***dafs eine der Cubikwurzeln in der Lösung der reducirten cubischen Gleichung verschwinden*** *mufs,* ***also dafs dieselbe eine reine ist.***

Ferner geht die Determinante F in

$$F = 81E^2 = (9E)^2,$$

also in ein ***vollständiges Quadrat*** über, wenn D verschwindet; und da die letzte Wurzel in der Lösung einer jeden biquadratischen Gleichung eine Quadratwurzel ist, so folgt, ***dafs die Auflösung der vorliegenden biquadratischen Gleichung*** (34.) ***die letzte Quadratwurzel gar nicht enthält.***

Man findet übrigens

$$E = 4(T^2 - S^3) = 4R \quad (23.),$$

folglich:

$$36. \quad F = (36R)^2.$$

Die vorstehenden Sätze finden ihre Bestätigung in der jetzt folgenden Auflösung der Gleichung (34.).

Setzt man in

$$\lambda^4 - 6S\lambda^2 - 8T\lambda - 3S^2 = 0,$$
$$\lambda = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3},$$

so findet man zur Bestimmung der Gröfsen u die reducirte cubische Gleichung

$$u^3 - 3Su^2 + 3S^2u - T^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (u - S)^3 = T^2 - S^3 = R,$$

d. h. eine ***reine*** cubische Gleichung, deren Wurzeln folgende sind:

$$37. \quad u_1 = S + \sqrt[3]{R}, \quad u_2 = S + \varrho\sqrt[3]{R}, \quad u_3 = S + \varrho^2\sqrt[3]{R},$$

wo 1, ϱ, ϱ^2 die dritten Wurzeln der Einheit bezeichnen. Hieraus gehen die 4 Wurzeln der biquadratischen Gleichung wie folgt hervor:

$$38. \quad \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{(S + \sqrt[3]{R})} + \sqrt{(S + \varrho\sqrt[3]{R})} + \sqrt{(S + \varrho^2\sqrt[3]{R})}, \\ \lambda_2 = \sqrt{(S + \sqrt[3]{R})} - \sqrt{(S + \varrho\sqrt[3]{R})} - \sqrt{(S + \varrho^2\sqrt[3]{R})}, \\ \lambda_4 = -\sqrt{(S + \sqrt[3]{R})} + \sqrt{(S + \varrho\sqrt[3]{R})} - \sqrt{(S + \varrho^2\sqrt[3]{R})}, \\ \lambda_4 = -\sqrt{(S + \sqrt[3]{R})} - \sqrt{(S + \varrho\sqrt[3]{R})} + \sqrt{(S + \varrho^2\sqrt[3]{R})}; \end{cases}$$

so dafs die 4 in lineare Factoren zerlegbaren homogenen Functionen dritten Grades die folgenden sind:

39. $\{\pm\sqrt{(S+\sqrt[3]{R})}\pm\sqrt{(S+\varrho\sqrt[3]{R})}\pm\sqrt{(S+\varrho^2\sqrt[3]{R})}\}f(x_1,x_2,x_3)+\Delta f(x_1,x_2,x_3)$;

wobei die zusammengehörigen Zeichen aus (38.) zu entnehmen sind.

§. 12.

Schliefslich möge noch die vollständige Ausführung des folgenden, als Aufgabe 1. der citirten Abhandlung von ***Hesse*** aufgestellten Problems hier folgen.

Es ist eine homogene Function dritten Grades von drei Variabeln gegeben: man soll eine andere derselben Variabeln finden, deren Functional-Determinante die gegebene Function ist.

Ist $f(x_1,x_2,x_3)$ die gegebene Function, so findet man nach (§. 1. 3.):

$$\Delta(af+b\Delta f) = Af+B\Delta f.$$

Setzt man daher

$$A=1, \quad B=0,$$

bestimmt aus diesen Gleichungen a und b und setzt die Werthe dieser Gröfsen in $\Delta(af+b\Delta f)$, so ist

$$\Delta(af+b\Delta f) = f:$$

also ist $af+b\Delta f$ die gesuchte Function.

So weit ist das Problem in der citirten Abhandlung geführt; es folge jetzt die vollständige Lösung der Gleichungen.

Setzt man aus (26.) statt B seinen Werth

$$B = a^3-3Sab^2-2Tb^3 = 0,$$

so ergeben sich für $\frac{a}{b}$ die drei Werthe

40.
$$\begin{cases} \frac{a_1}{b_1} = \sqrt[3]{(T+\sqrt{R})}+\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})}. \\ \frac{a_2}{b_2} = \varrho\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})}+\varrho^2\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})}, \\ \frac{a_3}{b_3} = \varrho^2\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})}+\varrho\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe für a_1, a_2, a_3 in die Gleichung

$$A = 3Sa^2b+6Tab^2+3S^2b^3 = 1,$$

so erhält man für b_1, b_2, b_3 die folgenden Werthe:

$$41.\quad \begin{cases} \frac{1}{b_1^3} = 3\{(3T+\sqrt{R})\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})} + (3T-\sqrt{R})\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})} + 2S^2\} = \mu_1, \\ \frac{1}{b_2^3} = 3\{(3T+\sqrt{R})\varrho^2\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})} + (3T-\sqrt{R})\varrho\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})} + 2S^2\} = \mu_2, \\ \frac{1}{b_3^3} = 3\{(3T+\sqrt{R})\varrho\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})} + (3T-\sqrt{R})\varrho^2\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})} + 2S^2\} = \mu_3, \end{cases}$$

mithin durch Substitution in $\Delta(af+b\Delta f)$ folgende 3 Functionen, deren Functional-Determinanten der Function f gleich sind:

$$42.\quad \begin{cases} \Delta\{[\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})} + \sqrt[3]{(T-\sqrt{R})}]f+\Delta f\} = \mu_1.f, \\ \Delta\{[\varrho\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})} + \varrho^2\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})}]f+\Delta f\} = \mu_2.f, \\ \Delta\{[\varrho^2\sqrt[3]{(T+\sqrt{R})} + \varrho\sqrt[3]{(T-\sqrt{R})}]f+\Delta f\} = \mu_3.f. \end{cases}$$

Es läfst sich hieraus leicht folgender Satz ableiten:

Wenn es möglich ist den Functionen S und T die Formen

$$43.\quad \begin{cases} 3S = P^2 - Q, \\ 2T = P.Q \end{cases}$$

zu geben, in welchen P und Q neue Functionen der Coëfficienten bezeichnen, die nur rational sein dürfen, so giebt es immer eine homogene Function dritten Grades mit rationalen Coëfficienten, deren Functional-Determinante der gegebenen f gleich ist.

Die letztgenannte Eigenschaft besitzt offenbar die Function Δf selbst: daher müssen für dieselbe die Gleichungen (43.) erfüllt werden. Bezeichnet man die ihr entsprechenden S und T durch S_b und T_b, so findet man:

$$44.\quad \begin{cases} S_b = 4T^2 - 3S^3, \\ T_b = T(9S^3 - 8T^2), \end{cases}$$

folglich

$$P = 2T, \qquad Q = 9S^3 - 8T^2.$$

Ich werde in der ausführlicheren Abhandlung eine zweite, ganz allgemeine homogene Function dritten Grades von drei Variabeln angeben, welche der gegebenen f beigeordnet ist und deren S und T den Gleichungen (43.) genügen.

Berlin im Juli 1849.

19.

Über die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt.

(Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.)

§. 1.

Unter den elliptischen Functionen, welche wegen der Willkürlichkeit des elliptischen Moduls ein unendliches Gebiet von transcendenten Functionen umfassen, giebt es eine gewisse Classe, welche, neben den allgemeinen von *Jacobi* und *Abel* aufgestellten Eigenschaften aller elliptischen Functionen, noch besondere characteristische Eigenthümlichkeiten besitzt, durch die sie in sehr nahe Beziehung mit der Zahlentheorie versetzt wird, namentlich mit der Theorie der zweigliedrigen complexen ganzen Zahlen, welche aus den binären quadratischen Formen mit negativer Determinante entspringen. Es sind hiermit diejenigen elliptischen Functionen gemeint, von denen *Jacobi*, seiner Bezeichnungsweise gemäfs, sagt:

> „Dafs bei ihnen der Modul durch die Transformation in sein Complement, oder auch in sich selbst zurückkehrt,"

und die sich auch als solche bezeichnen lassen,

> „Welche eine complexe Periodicität und eine complexe Multiplication besitzen."

Unter einer complex periodischen Function ist hier eine solche zu verstehen, welche unverändert bleibt, wenn ihr Argument um ein beliebiges *complexes* ganzes Vielfache einer gewissen Gröfse, des Moduls der Periodicität, vermehrt wird. Der Character der complexen Multiplication, auf welchen auch schon *Abel* und *Jacobi* aufmerksam gemacht haben (Gegenw. Journal 3. Bd. S. 181, 195) besteht darin, dafs die Function für ein *complexes* ganzes Vielfache des Arguments sich algebraisch in die Function des einfachen Arguments ausdrücken läfst, während dies im *Allgemeinen* bei den elliptischen Functionen nur für einen *reellen* ganzen Werth des Multiplicators des Arguments gültig ist. Jede der in dieser Classe enthaltenen elliptischen Functionen entspricht einer anderen Gattung von complexen Zahlen; die lemniscatischen

Functionen, welche allen andern unter ihnen vorangehen, entsprechen den von *Gaufs* eingeführten complexen ganzen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$.

Auf alle hier besonders hervorgehobenen Functionen lassen sich ferner, in Rücksicht auf ihre Theilung, die *Gaufsi*schen Principien der Kreistheilung mit gröfserer oder geringerer Leichtigkeit anwenden *). Dafs dies bei den lemniscatischen Functionen (und mit diesen haben wir es zunächst nur zu thun) möglich ist, hat schon *Gaufs* in seinen „Disquisitiones Arithm." angedeutet. *Abel,* indem er die Elemente **) der Lemniscatentheilung aufstellte, begnügte sich damit, die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen zu zeigen, von denen die Theilung abhängt, ohne näher in den speciellen Character der Resultate und deren Verknüpfung mit andern Gebieten der Mathematik einzugehen. Im Grunde erscheint bei *Abel* der vorliegende Fall nur als Beispiel für seine allgemeine Theorie der algebraisch lösbaren Gleichungen (4. Band dieses Journals Seite 131), und es wird daher die Untersuchung nicht weiter verfolgt, als sie sich für alle algebraischen Gleichungen durchführen läfst, in denen jede Wurzel als rationale Function einer Wurzel dargestellt werden kann.

Indem ich zuerst von den biquadratischen Resten aus auf diesen Gegenstand geführt wurde, habe ich in die von *Abel* ihren Grundzügen nach gegebene Theorie weiter einzudringen und namentlich dieselbe für zahlentheoretische Anwendungen fruchtbar zu machen gesucht. Als erstes Resultat dieser Untersuchungen ergaben sich meine neueren Beweise des biquadratischen Fundamentaltheorems. Die ferneren Ergebnisse meiner Forschungen erlaube ich mir hier und in einigen folgenden Abhandlungen den Freunden der Wissenschaft vorzulegen.

Ehe ich zu dem eigentlichen Gegenstand übergehe, wird es gut sein, auf eine allgemeine Schwierigkeit aufmerksam zu machen, mit welcher man in diesen Gebieten stets zu kämpfen hat. Es giebt sehr viele Sätze bei den elliptischen Functionen, welche eine blofse *Möglichkeit* behaupten, so zu sagen blofse Existenzsätze, und welche nicht den individuellen Character des Resultats erkennen lassen. So weifs man z. B., dafs sich die elliptischen Functionen eines vielfachen Arguments in die des einfachen ausdrücken lassen, und zwar

---

*) Die Theilung, welche hier gemeint wird, ist nicht mit der allgemeinen Theilung für ein unbestimmtes Argument zu verwechseln, für welche *Jacobi* die Fundamentalformeln aufgestellt hat.

**) 3. Band dieses Journals S. 162. Vergl. auch *Dirichlet* im 24. Band dieses Journals S. 366.

algebraisch; man weifs, dafs die von ***Jacobi*** zwischen den beiden Moduln bei der Transformation aufgestellte Gleichung eine algebraische ist; man weifs, dafs jede Wurzel der Gleichung für die Theilung der Lemniscate einer rationalen Function irgend einer andern Wurzel gleich ist, u. s. w.: fragt man aber nach der speciellen Art der Zusammensetzung dieser und ähnlicher algebraischer oder rationaler Ausdrücke, und verlangt man dieselben namentlich in einer solchen fertigen Form, welche sich zum weitern Fortschliefsen benutzen läfst, so bleibt die Theorie meistens die Antwort schuldig; in noch höherem Grade zeigt sich dieser Umstand, wenn man über die elliptischen Functionen hinaus zu andern Transcendenten fortschreitet. Ja noch mehr, in besonderer Rücksicht auf unseren Gegenstand: man kennt nicht einmal die Gleichung selbst, von der die Lemniscatentheilung abhängt und welche man doch auflösen soll; man weifs nur, dafs sie überhaupt existirt; man kennt ihren Grad und einen gewissen Algorithmus, um sie zu bilden, wenn der Divisor ***numerisch*** gegeben ist: ganz anders ist dies bei der Kreistheilung, wo die aufzulösende Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ gleich von vorn herein vollständig gegeben ist, und wo die Relationen zwischen ihren Wurzeln ebenfalls vollkommen bekannt sind, indem jede Wurzel sich als Potenz einer von ihnen ausdrücken läfst. Bei vielen Untersuchungen ist es freilich hinreichend, überhaupt nur zu wissen, dafs sich eine Gröfse in eine gewisse andere Gröfse algebraisch u. s. w. ausdrücken läfst, ohne näher das ***Wie?*** zu kennen. Wo Dies jedoch nicht ausreicht, da könnte man zwei Wege einschlagen. Einmal könnte man sich bemühen, den angeregten Mangel, wenn es überhaupt ein solcher ist, zu ergänzen; ich habe aber diesen Weg bald verlassen, weil ich auf demselben nicht fortkommen konnte. Dann kann man aber auch nach solchen Principien forschen, welche möglichst fruchtbar sind und doch zugleich nur eine möglichst geringe, gleichsam an der Oberfläche bleibende Einsicht in diejenigen Beziehungen erheischen, welche man beim jetzigen Standpuncte der Wissenschaft nur ihrer blofsen Existenz nach anzuwenden vermag. Dies Letztere habe ich zu thun versucht, so weit es meine Kräfte erlaubten.

§. 2.

Gaufs eröffnet seine Untersuchungen über Kreistheilung mit dem Beweise der Irreductibilität der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ für den einfachsten Fall, wenn p, der Divisor, die Anzahl der Theile, eine (reelle pos.) Primzahl ist:

es möchte daher passend sein, die analoge Frage auch bei der Theilung der ganzen Lemniscate an die Spitze zu stellen. Dies wird den Hauptgegenstand vorliegender Abhandlung ausmachen.

Zuvor will ich ins Gedächtnifs zurückrufen, was unter der Theilung der ganzen Lemniscate zu verstehen sei.

Man weifs, dafs bei einer solchen Theilung für den Divisor, oder was ihm analog ist, eine ganze *complexe* Zahl und im einfachsten Falle eine *complexe* Primzahl *) genommen werden kann, welche an die Stelle der reellen positiven Primzahl als der Anzahl der Theile in der Kreistheilung tritt. Die geometrischen Schwierigkeiten, welche der Begriff einer solchen complexen Division darbietet, will ich hier bei Seite stellen (Vergl. *Jacobi* im 19ten Bande dieses Journals Seite 314). In algebraischem Sinne hat man unter der ganzen Lemniscate oder ihrem Umfange denjenigen einfachsten Modul der Periodicität zu verstehen, welcher selbst und dessen ganze *complexe* Vielfache dem Argumente der lemniscatischen Function hinzugefügt werden können, ohne den Werth dieser Function zu ändern; jener Modul der complexen Periodicität ist, wenn man $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \varpi$ setzt, nicht 4ϖ, der Umfang der reellen geometrischen Lemniscate, sondern schon $(2+2i)\varpi$. Bezeichnet man denselben durch $C=(2+2i)\varpi$, so bedeutet die Theilung der ganzen Lemniscate, für den complexen Divisor m oder die Theilung derselben in m gleiche Theile, nichts anderes, als die Auffindung derjenigen Werthe der lemniscatischen Function, welche zunächst dem Argumente $\frac{C}{m}$ und dann auch den complexen Vielfachen $\frac{rC}{m}$ dieses Arguments entsprechen. Wegen der complexen Periodicität gehören zu congruenten Werthen von r (mod. m) gleiche Werthe der lemniscatischen Function; man hat daher nur die incongruenten zu betrachten, welche ein vollständiges Restensystem (mod. m) formiren; ihre Anzahl ist der Norm von m gleich, $= N(m) = p$. Schliefst man noch das durch den Modul m theilbare Glied aus, welches ein Vielfaches von C und für die lemniscatische Function den Werth Null giebt, so ziehen sich alle Werthe von r auf die $p-1$ Glieder eines reducirten Restensystems (mod. m) zurück. Die diesen wesent-

*) Also entweder eine solche von der Form $a+b\sqrt{-1}$, welche aus der Zerfällung einer reellen positiven Primzahl $p \equiv 1$ (mod. 4) in die Form $p=(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ entspringt; oder eine reelle Primzahl $\pm q$, welche, abgesehn vom Zeichen, $\equiv 3$ (mod. 4) ist; beide Fälle werden vereinigt hier betrachtet; im ersten ist p, im zweiten q^2 die Norm.

lich verschiedenen Werthen von r entsprechenden lemniscatischen Functionen von $\frac{rC}{m}$ sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $W=0$ vom $p-1$ten Grade mit ganzen complexen Coëfficienten. Nennt man $x=\varphi(t)$ die lemniscatische Function von t für eine unbestimmte Variabele t, $y=\varphi(mt)$ die von mt, so dafs

$$t=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}, \qquad mt=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}},$$

und bezeichnet man durch $y=\frac{U}{V}$ diejenige rationale Function, durch welche y in x ausgedrückt wird, so ist U vom $p$ten Grade in x, durch x theilbar, und man findet die linke Seite W der eben erwähnten Gleichung $W=0$, wenn man U durch x dividirt, also $W=\frac{1}{x}U$; wie dies Alles durch *Abel* und *Jacobi* hinlänglich bekannt ist. Die auf diese Weise aus dem Zähler von y erhaltene Gleichung $W=0$ ist das Analogon zu der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ oder zu den ähnlichen für die verschiedenen Arten der trigonometrischen Functionen, welche *Gaufs* am Anfange der siebenten Section seines Werkes im Vorbeigehen aufführt, und das sogenannte Problem der Theilung der ganzen Lemniscate fällt mit der algebraischen Auflösung dieser Gleichung zusammen.

Da ich mich mit der Untersuchung über die Irreductibilität der Fundamentalgleichung $W=0$ beschäftigen will, so ist zunächst zu erörtern, in welchem Sinne diese Frage hier aufgefafst werden mufs. Mit der Betrachtung der lemniscatischen Functionen ist man ganz und gar in das Gebiet der *complexen* ganzen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ versetzt, welche hier in jeder Hinsicht die Rolle der gewöhnlichen reellen ganzen Zahlen übernehmen. Wenn man also im Allgemeinen unter einer irreductibeln Gleichung mit ganzen Coëfficienten eine solche versteht, von welcher keine Wurzel zugleich Wurzel einer Gleichung niederen Grades mit ebenfalls ganzen Coëfficienten sein kann, so wird hier bei unserer Gleichung das Wort „ganz" beide Male in complexem Sinne zu nehmen sein; nämlich, wenn irgend eine Wurzel der Gleichung $W=0$ zugleich Wurzel einer Gleichung niederen Grades $Z=0$ ist, so mufs gezeigt werden, dafs Z *weder mit reellen, noch* (was mehr behauptet und das erste als speciellen Fall einschliefst) mit *complexen ganzen* Coëfficienten angenommen werden kann.

Die Einleitung zum Beweise dieses Satzes besteht in Folgendem. Hätte

Z ganze complexe Coëfficienten, so könnte man durch die Operation der Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen W und Z eine ganze Function mit ebenfalls ganzen oder sicher rationalen complexen Coëfficienten finden, welche in W algebraisch aufgeht. W, welches die Form

$$W = x^{p-1} + A_1 x^{p-5} + A_2 x^{p-9} + \ldots + A_{\frac{1}{4}(p-1)}$$

hat, wo $A_1, A_2, \ldots$ sämmtlich ganze complexe Zahlen sind, zerfiele demnach in das Product zweier ganzen Functionen mit rationalen complexen Coëfficienten. Nach einem von *Gaufs* in den „Disq. Arithm. Art. 42." zunächst für reelle Zahlen aufgestellten Satze, dessen Beweis sich aber wörtlich auf complexe Zahlen anwenden läfst, müfsten sich die Factoren auf eine solche Form bringen lassen, dafs ihr höchstes Glied die Einheit zum Coëfficienten hat, und dafs alle übrigen Coëfficienten ganze complexe Zahlen sind. Es bliebe also nur noch die Unmöglichkeit einer Zerfällung von folgender Form nachzuweisen:

$$W = (x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-2} + \ldots.)(x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + b_2 x^{\nu-2} + \ldots.),$$

wo $\mu + \nu = p-1$, $0 < \mu < p-1$, $0 < \nu < p-1$, und alle a und alle b ganze complexe Zahlen sind.

Bis hierher sind die Betrachtungen denen der Kreistheilung ganz analog und lassen sich auf jede Gleichung anwenden. Versucht man aber in derselben Weise wie bei *Gaufs* weiter zu gehen, so stöfst man auf Schwierigkeiten von der Art, wie sie schon in §. 1. angedeutet sind. Diese Schwierigkeiten, welche sich durch die ganze Theorie der Lemniscatentheilung hindurchziehen, liegen daran, dafs die ***Relationen*** zwischen den Wurzeln der Gleichung $W = 0$, wie folgenreich auch die Kenntnifs ihrer blofsen Existenz und ihres allgemeinen algebraischen Characters sein mag, doch viel zu complicirt und ihrer speciellen Beschaffenheit nach viel zu unbekannt sind, um jene Wurzeln einfachen Operationen (z. B. der Multiplication) mit derselben Leichtigkeit unterwerfen zu können, wie dies bei den Wurzeln der Einheit geschieht. Mit einem Worte: man kann nicht aus jenen Relationen *selbst* Vortheil ziehn, weil man sie nicht kennt, sondern nur aus allgemeinen Eigenschaften derselben, und man mnfs daher die Zahl der letztern zu vermehren suchen.

Der Beweis unseres Satzes gelingt, wenn man eine Eigenschaft der Coëfficienten $A_1, A_2, \ldots.$ zu Hülfe nimmt, welche ich bei einer früheren Gelegenheit schon, wenigstens für eine zweigliedrige (nicht reelle) complexe Primzahl m aufgestellt und bewiesen habe. Nämlich den Satz, dafs sämmt-

liche Coëfficienten A_1, A_2, ... $A_{\frac{1}{4}(p-1)}$ durch m theilbar sind, und dafs der letzte, abgesehn von einer complexen Einheit, welche als Factor hinzutreten kann, m selbst gleich ist. Dieser Satz läfst sich auch so aussprechen: Nennt man zwei ganze Functionen von x, wie $a+a'x+a''x^2+....$ und $b+b'x+b''x^2+....$ congruent (mod. m), wenn einzeln und für alle Coëfficienten $a \equiv b$, $a' \equiv b'$, $a'' \equiv b''$, ... (mod. m) ist, so hat man $W \equiv x^{p-1}$ (mod. m) und $A_{\frac{1}{4}(p-1)} = \varepsilon m$, wo ε eine complexe Einheit ist. Die höchst einfache Methode, durch welche ich aus dieser Eigenschaft der Coëfficienten von W die Irreductibilität der Gleichung $W = 0$ ziehe, liefert zugleich den Beweis des folgenden allgemeineren Satzes, welcher die Irreductibilität einer sehr ausgedehnten Gattung von algebraischen Gleichungen ausspricht:

„Wenn in einer ganzen Function $F(x)$ von x von beliebigem Grade „der Coëfficient des höchsten Gliedes $= 1$ ist, und alle folgenden Coëfficienten „ganze (reelle, complexe) Zahlen sind, in welchen eine gewisse (reelle resp. „complexe) Primzahl m aufgeht, wenn ferner der letzte Coëfficient $= \varepsilon m$ ist, „wo ε eine nicht durch m theilbare Zahl vorstellt: so ist es unmöglich $F(x)$ „auf die Form

$$(x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + ... + a_\mu)(x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + ... + b_\nu)$$

„zu bringen, wo μ und $\nu \geqq 1$, $\mu+\nu =$ dem Grad von $F(x)$, und alle a „und b (reelle resp. complexe) *ganze* Zahlen sind; und die Gleichung $F(x)=0$ „ist demnach irreductibel."

Wäre obige Zerfällung von $F(x)$ möglich, so hätte man zunächst $a_\mu b_\nu =$ dem letzten Coëfficienten von $F(x)$, also $= \varepsilon m$: folglich müfste, da m als Primzahl vorausgesetzt worden ist, eine der beiden Zahlen a_μ, b_ν, $= \varepsilon'$, die andere $= \varepsilon'' m$ sein, wo ε', ε'' zwei Factoren, deren Product $= \varepsilon$ ist, welche also beide nicht durch m theilbar sind. Es sei, da die Wahl willkürlich ist, $a_\mu = \varepsilon'$, $b_\nu = \varepsilon'' m$. Nach den gemachten Voraussetzungen ist ferner $F(x) \equiv x^{\mu+\nu}$ (mod. m); es wäre also

$$(x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + ... + \varepsilon')(x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + ... + \varepsilon'' m) \equiv x^{\mu+\nu} \text{ (mod. } m),$$

folglich auch, nach Weglassung des durch m theilbaren Gliedes $\varepsilon'' m$ im zweiten Factor links:

$$(x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + ... + \varepsilon')(x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + ... + b_{\nu-1} x) \equiv x^{\mu+\nu}.$$

Der Coëfficient von x ist hier $\varepsilon' b_{\nu-1}$, und da ein Glied mit der ersten Potenz von x rechts nicht vorkommt, so ist $\varepsilon' b_{\nu-1}$, also auch $b_{\nu-1}$ durch m theilbar. Läfst man wiederum das Glied $b_{\nu-1} x$ aus dem zweiten Factor links weg, so

erhält man eine dritte Congruenz, aus der zu sehen, dafs $b_{\nu-2}$ durch m theilbar sein mufs; der zweite Factor links kann daher abermals um ein Glied $b_{\nu-2}x^2$ vermindert werden. So fortfahrend, zeigt sich nach und nach, dafs sämmtliche $b \equiv 0 \pmod{m}$ sein müssen, und man wird zuletzt zu der Congruenz

$$(x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + \varepsilon').x^\nu \equiv x^{\mu+\nu} \pmod{m}$$

geführt. Diese ist aber offenbar unmöglich, da sich links multiplicando das *nicht* durch m theilbare Glied $\varepsilon' x^\nu$ ergiebt, zu welchem sich rechts kein entsprechendes findet. Demnach kann auch die ursprüngliche Zerfällung von $F(x)$ ohne Widerspruch nicht angenommen werden, und es ergiebt sich die Richtigkeit des obigen Satzes.

Die Gleichung $W = 0$ befindet sich unmittelbar in dem Falle des allgemeinen Satzes *), und ihre Irreductibilität ist somit erwiesen. Die Gleichung $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, wo p eine positive ungerade Primzahl, läfst sich durch eine leichte Substitution ebenfalls auf die Form bringen, welche der Satz verlangt. Man setze $x - 1 = z$, so wird $x = z + 1$ und man bekommt die Gleichung

$$z^{p-1} + pz^{p-2} + \tfrac{1}{2}p(p-1)z^{p-3} + \ldots + p = 0,$$

in der alle Coëfficienten durch p theilbar sind und der letzte $= p$ selbst ist. Dies giebt also, wenn man will, einen neuen und höchst einfachen Beweis der Irreductibilität der Gleichung $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$; und zwar setzt dieser Beweis im Unterschiede mit früheren **) nicht die Kenntnifs der Wurzeln und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit voraus. — Die analogen Gleichungen für die trigonometrischen Functionen sind ebenfalls sämmtlich in dem allgemeinen Satze enthalten.

Der obige Satz läfst sich noch leicht dahin verallgemeinern: dafs die Gleichung $F(x) = 0$ auch dann noch irreductibel ist, wenn nur ein einziger der durch m theilbaren Coëfficienten in $F(x)$ nicht mit m^2 aufgeht, und es braucht dies nicht gerade der letzte zu sein, so dafs jede Gleichung mit ganzen Coëfficienten irreductibel ist, in welcher, aufser dem ersten, sämmtliche Coëfficienten durch m, aber nicht sämmtlich durch m^2 theilbar sind.

Ich will gelegentlich den häufig vorkommenden Satz beweisen, dafs bei einem Producte zweier ganzen ganzzahligen Functionen $S(x)T(x)$, welches $\equiv 0 \pmod{m \text{ Primzahl}}$ ist, nothwendig einer der beiden Factoren durch m

*) Siehe §. 3.

**) Aufser dem Beweise von *Gaufs* ist mir nur der von *Kronecker* im 29ten Bande dieses Journals Seite 280 bekannt.

theilbar sein mufs. Wäre dies nicht der Fall, d. h. wären in *keinem* der beiden Factoren *sämmtliche* Coëfficienten durch m theilbar, so müfste es in *jedem* derselben eine *niedrigste* Potenz von x geben (diese kann auch x^0 sein), deren Coëfficient nicht durch m theilbar ist. Es sei dies x^σ in $S(x)$ und x^τ in $T(x)$, den Fall σ oder $\tau = 0$ nicht ausgeschlossen, so dafs die Coëfficienten von $x^{\sigma-1}$, $x^{\sigma-2}$ etc. in $S(x)$ und die von $x^{\tau-1}$, $x^{\tau-2}$ etc. in $T(x)$ wirklich durch m theilbar sind; in dem Producte $S(x)\,T(x)$ wäre dann der Coëfficient von $x^{\sigma+\tau} \equiv$ dem Producte der beiden Coëfficienten von x^σ und x^τ in $S(x)$ resp. $T(x)$; dieser Coëfficient wäre also nicht durch m theilbar, was der Voraussetzung widerstreitet, nach welcher alle Coëfficienten des entwickelten Productes $\equiv 0 \pmod m$ sein sollen. — Aus diesem Satze folgt durch wiederholte Anwendung der weiter oben benutzte, welcher sich, wenigstens für reelle Zahlen, wie bemerkt, in „Disq. Arith. 42." findet. Es ist offenbar nur zu beweisen, dafs in einer Gleichung von der Form

$$k.(x^{\mu+\nu} + c_1 x^{\mu+\nu-1} + \ldots + c_{\mu+\nu})$$
$$= (a_0 x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a_\mu).(b_0 x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + \ldots + b_\nu) = S(x)\,T(x),$$

wo k und alle a, b, c ganze (reelle oder complexe) Zahlen sind, der Multiplicator k immer so auf die beiden ganzen Functionen S und T vertheilt werden kann, dafs k dem Producte zweier ganzen Factoren $k_1 k_2$ gleich wird, von denen der eine k_1 in $S(x)$, der andere k_2 in $T(x)$ aufgeht. Dies ergiebt sich daraus, dafs für jeden Primfactor m von k, $S(x)\,T(x) \equiv 0 \pmod m$ ist, also nach dem Obigen entweder $S(x)$ oder $T(x)$ mit m aufgeht. Dividirt man wirklich m weg, so erhält man eine neue Gleichung von derselben Form, in welcher $\frac{k}{m}$ an die Stelle von k getreten ist, nämlich entweder

$$\frac{k}{m}.(x^{\mu+\nu} + \text{etc.}) = \frac{1}{m} S(x).T(x) \quad \text{oder} \quad \frac{k}{m}(x^{\mu+\nu} + \text{etc.}) = S(x).\frac{1}{m} T(x),$$

je nachdem S oder T durch m theilbar ist. In dieser Gleichung kann man abermals einen neuen oder denselben Primfactor von $\frac{k}{m}$ fortheben, je nachdem m nur in der ersten Potenz, oder im Quadrat u. s. w. in k aufgeht. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens wird man endlich alle gleichen und ungleichen Primfactoren von k, also das ganze k selbst erschöpft und weggeschafft haben, und es hat sich zugleich k in der angegebenen Weise auf die beiden Factoren S und T vertheilt. Zuletzt erhält man dann eine Gleichung von der Form

$$x^{\mu+\nu} + \text{etc.} = (a_0' x^\mu + a_1' x^{\mu-1} + \text{etc.})(b_0' x^\nu + b_1' x^{\nu-1} + \text{etc.});$$

wo alle Coëfficienten ganz sind und wo, wegen $a_0' b_0' = 1$, $a_0' = b_0' = 1$ angenommen werden kann. Dem Wesen nach ist dieses Verfahren von demjenigen bei *Gauſs* nicht verschieden. Die Grundbetrachtungen über solche Congruenzen, deren Elemente ganze *Functionen* sind, findet man auch in *Schoenemann's* Abhandlung in diesem Journal Band 31. Seite 269 ff.

Aus der bewiesenen Irreductibilität der Gleichung $W = 0$ kann man die gewöhnlichen Folgerungen für die Wurzeln derselben ziehen. Wenn eine ganze Fuuction mit rationalen complexen Coëfficienten und von niederem Grade als dem $p-1$ten, für eine Wurzel der Gleichung $W = 0$ verschwindet, so verschwinden ihre sämmtlichen Coëfficienten; und wenn zwei solche Functionen für eine Wurzel jener Gleichung gleich werden, so müssen ihre entsprechenden Coëfficienten übereinstimmen. Wenn irgend eine ganze Function mit rationalen complexen Coëfficienten für eine solche Wurzel verschwindet, so ist sie durch W algebraisch theilbar und verschwindet also für alle Wurzeln der Gleichung $W = 0$; sind zwei dergleichen ganze Functionen für eine Wurzel einander gleich, so gilt dies ebenfalls für alle Wurzeln, da ihre Differenz durch W theilbar ist, u. s. w. Für die Gleichung $W = 0$ insbesondere ergiebt sich wegen der speciellen Eigenschaften ihrer Wurzeln noch Folgendes. Diese Wurzeln sind in der Form $\varphi\left(\frac{rC}{m}\right)$ enthalten, wo r die $p-1$ Glieder eines reducirten Restensystems (mod. m) durchläuft; welche man alle als *ungerade* Zahlen voraussetzen kann. Diese Wurzeln sind auch $\varphi\left(\frac{rkC}{m}\right)$, wo k eine beliebige nicht durch m theilbare complexe ganze Zahl ist. Hat man nun eine Relation, wie $F(k) = 0$, zwischen diesen Wurzeln, in der letzteren Form, wo $F(k)$ eine ganze Function der Wurzeln mit rationalen complexen Coëfficienten bedeutet, und findet diese Relation für irgend einen Werth von k Statt, so mufs sie für jeden Werth von k richtig bleiben: denn da $\varphi\left(\frac{rkC}{m}\right)$ für jeden ungeraden Werth von r als rationale Function von $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$ also, nach Wegschaffung des Nenners mit Hülfe der Gleichung $W = 0$, auch als ganze Function mit rationalen (nicht ganzen) Coëfficienten von $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$ dargestellt werden kann, so verwandelt sich der ganze Ausdruck $F(k)$ in eine ganze Function von der *einen* Gröfse $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$; wobei die Coëfficienten rational und von k *unabhängig* sind. Verschwindet aber eine solche Function für *einen*

Werth von k, so mufs sie wegen der Irreductibilität für jeden Werth von k verschwinden. Die Einführung des Factors k unter dem Zeichen φ kommt, wie man leicht sieht, auf eine sogenannte cyclische Permutation der Wurzeln hinaus; in jeder Relation von der angegebenen Art kann man also die Wurzeln *cyclisch* permutiren; woraus natürlich *nicht* folgt, dafs *jede* Permutation der Wurzeln erlaubt wäre.

§. 3.

Die Grundlage des Beweises der Irreductibilität der Gleichung $W = 0$ bildet die oben erwähnte Eigenschaft der Coëfficienten der Function W. Ich habe, wie bemerkt, den Beweis dieser Eigenschaft für den einen Fall gegeben, wenn m eine zweigliedrige complexe Primzahl $a+bi$, also $a^2+b^2=p$ eine reelle Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ ist; es bleibt noch der Fall $m = \pm q$, wo q eine reelle positive Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$ ist. Ich habe auch die Schwierigkeit angedeutet *), welche sich der früheren Methode in diesem zweiten Falle entgegenstellt, obwohl der Satz selbst richtig bleibt **). Es ist daher nöthig, im Folgenden einen neuen Beweis aufzustellen, der beide Fälle zugleich umfafst; um so mehr, da dieser Satz als Ausgangspunct auch für fast alle ferneren Untersuchungen in diesem Felde dient, und da es wichtig ist, in der Folge von einer besonderen Rücksichtsnahme auf die Unterscheidung der beiden eben erwähnten Fälle der Primzahl m befreit zu sein.

1) Entwickelt man für einen beliebigen ungeraden Werth von m die rationale Function von x, welche $y = \varphi(mt)$ in $x = \varphi(t)$ ausdrückt, nämlich $y = \frac{A_{\frac{1}{4}(p-1)}x + \text{etc.}}{1 + B_1 x^4 + \text{etc.}} = \frac{U}{V} = \frac{xW}{V}$, in eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von x, so werden die Coëfficienten dieser Reihe sämmtlich zu ganzen complexen Zahlen, da das niedrigste Glied des Divisors $= 1$ ist, also bei der wirklichen Division von U durch V kein numerischer Nenner in den Coëfficienten eintreten kann. Setzt man demnach

$$y = R = c_1 x + c_5 x^5 + c_9 x^9 + \ldots + c_{4\mu+1} x^{4\mu+1} + \text{in inf.},$$

so sind $c_1 = A_{\frac{1}{4}(p-1)}$, $c_5 = A_{\frac{1}{4}(p-5)} - B_1 A_{\frac{1}{4}(p-1)}$, u. s. w., wie bemerkt, sämmtlich ganze Zahlen. Es kommt hier wenig darauf an, ob diese Reihe convergirt, oder nicht, da ich nicht ihre Summe, sondern nur ihre Coëfficienten

---

*) Gegenw. Journal Band 30. Seite 188.

**) Er ist aber nicht mehr richtig, wenn man für m eine reelle positive Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ setzen wollte.

betrachte; übrigens convergirt die Reihe bekanntlich sicher, wenn der analytische Modul von $x <$ als der kleinste unter den Moduln der Wurzeln der Gleichung $V = 0$ ist, was aber für die hier Statt findenden Untersuchungen gleichgültig ist.

2) Man kann dieselbe Reihe R auf einem ganz anderen Wege als dem der Division erhalten, wenn man direct nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten und mit Hülfe der Gleichung

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}} = m\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

y nach Potenzen von x entwickelt. Man findet auf diesem Wege, dafs $c_1 = m$, $c_5 = \frac{1}{10}(m - m^5)$, etc. und dafs der allgemeine Coëfficient die Form

$$c_{4\mu+1} = \frac{1}{\varrho}(\alpha_1 m + \alpha_5 m^5 + \alpha_9 m^9 + \ldots + \alpha_{4\mu+1} m^{4\mu+1}) = \frac{1}{\varrho} f(m)$$

hat, wo alle α und der Nenner ϱ nur von μ abhängige von m unabhängige ganze Zahlen sind, und wo man natürlich immer annehmen kann, dafs ϱ keinen Factor enthält, der in allen α zugleich aufgeht. Um dieses Resultat ohne viele Rechnung übersehen zu können, entwickele man $\varphi(mt)$ nach Potenzen von mt und setze statt der Potenzen von t in dieser Entwicklung die ihnen gleichen Reihen nach $x = \varphi(t)$. Es sei

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = t = x + \beta_5 x^5 + \beta_9 x^9 + \text{etc.},$$
$$t^\nu = x^\nu + \beta^{(\nu)}_{\nu+4} x^{\nu+4} + \beta^{(\nu)}_{\nu+8} x^{\nu+8} + \text{etc.},$$

endlich

$$x = \varphi(t) = t + \gamma_5 t^5 + \gamma_9 t^9 + \text{etc.},$$

wobei sämmtliche β und γ rein numerische und rationale Werthe haben und die $\beta^{(\nu)}$ nur von ν abhangen und ebenfalls rational sind. Da $y = \varphi(mt)$ ist, so erhält man hiernach

$$\begin{aligned} y &= mt + \gamma_5 m^5 t^5 + \gamma_9 m^9 t^9 + \ldots + \gamma_{4\mu+1} m^{4\mu+1} t^{4\mu+1} + \text{etc.} \\ &= m(x + \beta_5 x^5 + \beta_9 x^9 + \ldots + \beta_{4\mu+1} x^{4\mu+1} + \text{etc.}) \\ &\quad + \gamma_5 m^5 (x^5 + \beta^{(5)}_9 x^9 + \ldots + \beta^{(5)}_{4\mu+1} x^{4\mu+1} + \text{etc.}) \\ &\quad + \gamma_9 m^9 (x^9 + \ldots + \beta^{(9)}_{4\mu+1} x^{4\mu+1} + \text{etc.}) \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

und hier ist der Coëfficient von $x^{4\mu+1}$:

$$c_{4\mu+1} = \beta_{4\mu+1} . m + \gamma_5 \beta^{(5)}_{4\mu+1} . m^5 + \gamma_9 \beta^{(9)}_{4\mu+1} . m^9 + \ldots + \gamma_{4\mu+1} . m^{4\mu+1};$$

welcher in der That von der oben angegebenen Form ist. Die so gefundene

Reihe für y gilt natürlich für jeden beliebigen unbestimmten Werth von m, sie läfst sich aber nur dann durch eine rationale Function $\frac{U}{V}$ summiren, oder besser als aus der Entwicklung einer solchen hervorgehend betrachten, wenn m eine *ganze* und *ungerade* complexe Zahl ist.

3) $f(m)$ ist eine ganze ganzzahlige Function von m, welche den Factor m enthält. Da man nun für ganze ungerade Werthe von m bereits weifs, dafs $c_{4\mu+1}$ einer ganzen Zahl gleich ist, nämlich aus der Entwicklung von $y = \frac{U}{V}$ durch Division, so folgt, dafs $c_{4\mu+1}$ in allen den Fällen durch m theilbar ist, wenn m Primzahl, und der Nenner ϱ den Factor m *nicht* enthält. Ich behaupte, dafs ϱ überhaupt nur solche ungerade complexe Primfactoren enthalten kann, deren Norm $\leqq 4\mu+1$ ist. In der That sei n irgend ein ungerader complexer Primtheiler von ϱ, also irgend ein Primtheiler, mit Ausnahme von $1+i$; da $\frac{1}{\varrho} f(m)$ eine ganze Zahl für alle ungeraden (auch zusammengesetzten) Werthe von m ist, so hat man $f(m) \equiv 0 \pmod{\varrho}$, also auch $\pmod{n}$ für dieselben Werthe von m; da aber n ungerade ist, so kann man zu jeder beliebigen ganzen Zahl eine ihr congruente $\pmod{n}$ ungerade Zahl finden und es wird daher die Congruenz $f(m) \equiv 0 \pmod{n}$ für alle ganzen complexen Werthe von m ohne Ausnahme erfüllt. Betrachtet man auf die gewöhnliche Weise nur die incongruenten Wurzelwerthe, so hat die Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ genau $N(n)$ Wurzeln, nämlich alle Glieder eines vollständigen Restensystems $\pmod{n}$. Da nun keine Congruenz mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad beträgt, der hier $4\mu+1$ ist, so hat man, wie behauptet worden war, $N(n) \leqq 4\mu+1$. Es folgt hieraus *a fortiori*, dafs sämmtliche Nenner ϱ der ersten Coëfficienten c_1, c_5 bis $c_{4\mu+1}$ nur solche complexe Primfactoren haben, deren Norm $\leqq 4\mu+1$ ist, und die der Coëfficienten c_1, c_5 bis $c_{4\mu-3}$ nur solche, deren Norm $< 4\mu+1$ ist. Dieser an sich wichtige Satz dient hier nur als Lemma, er wird in der Folge noch mannigfaltige Anwendungen finden.

4) Nehmen wir jetzt die Voraussetzung wieder auf, welche wir einen Augenblick fallen liefsen, dafs m Primzahl sein soll, und setzen wie immer $N(m) = p$, so zeigt sich, dafs m in keinem der Nenner ϱ der ersten Coëfficienten c_1, c_5 bis c_{p-4} aufgehen kann und dafs c_p der erste ist, welcher m in seinem Nenner enthalten könnte. Es sind daher nach der obigen Bemerkung am Anfange von 3) die Coëfficienten aller Potenzen von x unter x^p

durch m theilbare ganze Zahlen, und die Reihe selbst hat die Form $y = R = m.S + x^p.T$, wo S und T Reihen nach x mit ganzen Coëfficienten sind, und noch zu bemerken ist, dafs der Coëfficient der ersten Potenz von x in S, $= 1$ ist.

Multiplicirt man jetzt in der gefundenen Gleichung

$$\frac{U}{V} = \frac{xW}{V} = m.S + x^p.T$$

mit V auf die rechte Seite hinüber, so ergiebt sich

$$U = xW = m.VS + x^p.VT,$$

und man sieht, dafs alle Coëfficienten in U, den von x^p allein ausgeschlossen, durch m theilbar sein müssen, weil auf der rechten Seite, wenn man entwickelt, wirklich alle Glieder mit niedrigeren Potenzen als x^p den Factor m enthalten. Es ist also

$$A_{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv A_{\frac{1}{4}(p-5)} \equiv \ldots \equiv A_2 \equiv A_1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Diese Congruenzen in Verbindung mit der Bemerkung, dafs $A_{\frac{1}{4}(p-1)} = c_1 = m$ ist, enthalten die zu beweisende Eigenschaft.

5) Es läfst sich hiermit die Relation verbinden, die zwischen den Coëfficienten des Zählers U und denen des Nenners V Statt findet. Nimmt man nämlich im Allgemeinen U von der Form $\varepsilon(A_{\frac{1}{4}(p-1)} + \ldots + x^p)$ an, so wird $V = 1 + A_1 x^4 + \ldots + A_{\frac{1}{4}(p-1)}$. Diese Relation findet sich schon bei *Jacobi*, nur nicht die Bestimmung der complexen Einheit ε, welche für meine Untersuchungen von grofser Wichtigkeit ist. Für einen primären Werth von m, d. h. für $m \equiv 1 \pmod{2+2i}$ ist $\varepsilon = 1$ und man hat daher den Satz:

„Dafs für jede primäre complexe Primzahl m, gleichviel ob eingliedrig „oder zweigliedrig, die lemniscatische Function $\varphi(mt)$ von mt in $\varphi(t)$ „durch den Bruch

$$\varphi(mt) = \frac{\varphi(t)^{N(m)} + m.P}{1 + m.Q}$$

„ausgedrückt wird, wo P und Q ganze complex-ganzzahlige Functionen „von $\varphi(t)$ sind."

Zur Erläuterung dieses Beweises möge noch Folgendes hinzugefügt werden.

6) Da für eine primäre Primzahl m, deren Norm p ist, $U \equiv x^p$ und $V \equiv 1 \pmod{m}$ gefunden wurde, so erhält man, wenn man in die Gleichung $U = VR$ substituirt, $x^p \equiv R \pmod{m}$; d. h. alle Coëfficienten der Reihe

$R = c_1 x + c_5 x^5 +$ etc. bis ins Unendliche mit alleiniger Ausnahme von c_p sind durch m theilbar, und c_p ist $\equiv 1 \pmod{m}$. Das erstere, nämlich die Theilbarkeit der Coëfficienten durch m gilt auch für eine *nicht* primäre Primzahl m; dann ist aber nicht mehr $c_p \equiv 1$, sondern im Allgemeinen einer gewissen complexen Einheit congruent.

7) Nimmt man als bewiesen an, dafs in der Reihe R alle Coëfficienten, aufser c_p, durch m theilbar sind, so läfst sich hieraus die Congruenz $c_p \equiv 1 \pmod{m}$ für einen *primären* Werth von m, ohne besondere auf diesen Fall bezügliche Voraussetzung über U und V, auf folgende Art ableiten, welche wegen des Princips für allgemeinere Untersuchungen nützlich ist. Man hat $R \equiv c_p x^p \pmod{m}$, und da $U = VR$, so folgt $U \equiv c_p x^p . V$. Diese letztere Congruenz enthält nur endliche geschlossene Ausdrücke (ganze Functionen), und man darf daher statt x einen speciellen Werth, z. B. $x = 1$ setzen; was bei einer Congruenz mit unendlichen Reihen keinesweges erlaubt sein würde: denn ganz abgesehen von der Frage, betreffend die Convergenz, so hat auch eine unendliche Reihe im Allgemeinen keinen bestimmten arithmetischen Character, da sie, aus lauter rationalen Termen bestehend, doch recht wohl eine irrationale so gut als eine rationale Zahl ausdrücken kann *). Setzt man also $x = 1$ in der zuletzt erhaltenen Congruenz $U \equiv c_p x^p . V$, so ergiebt sich $u \equiv c_p v$, wenn durch $\frac{u}{v}$ der Werth von y bezeichnet wird, der $x = 1$ entspricht; es ist also c_p der Werth des Ausdrucks $\frac{u}{v} \pmod{m}$. Da $x = 1$ dem Werthe $t = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \varpi$ entspricht, und da die lemniscatische Function sich nicht ändert, wenn t um ganze complexe Vielfache von $(2+2i)\varpi = C$ wächst, so ist $\frac{u}{v} = \varphi(m\varpi) = \varphi(\varpi)$, also ebenfalls $= 1$, wenn $m \equiv 1 \pmod{2+2i}$; in diesem Falle also $c_p \equiv 1 \pmod{m}$. Im Allgemeinen ist $\frac{u}{v} = \varphi(m\varpi) = \varphi(i^\mu \varpi) = i^\mu \varphi(\varpi) = i^\mu$ also $c_p \equiv i^\mu \pmod{m}$, wenn $m \equiv i^\mu \pmod{2+2i}$, und bekanntlich ist jede ungerade Zahl irgend einer Potenz von i congruent $\pmod{2+2i}$, so dafs diese Annahme alle Fälle umfafst.

---

*) Die Betrachtung solcher Congruenzen, in denen unendliche Reihen vorkommen, scheint, wenn man sie auf sichere Principien zurückführt, sehr fruchtbar für die Zahlentheorie werden zu können. Vielleicht sollte die VIII. Section der *Disq.* auch dergleichen enthalten.

8) In der Entwicklung von $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}$ sind alle Coëfficienten ohne Ausnahme durch m theilbar; denn durch das Differentiiren nach x tritt $(4\mu+1).c_{4\mu+1}$ an die Stelle von $c_{4\mu+1}$, und in diesem Producte ist für alle von p verschiedenen Werthe des Index $4\mu+1$ der zweite Factor, für $4\mu+1=p$ der erste Factor durch m theilbar. Die Entwicklung von $\frac{1}{m}\frac{\partial y}{\partial x}$ enthält demnach lauter ganze Coëfficienten, also auch die Entwicklung des gleichgeltenden Ausdrucks $\frac{\sqrt{(1-y^4)}}{\sqrt{(1-x^4)}}$. Letztere wird erhalten, wenn man die beiden Quadratwurzeln entwickelt, welche beide mit $+1$ anfangen, und statt der Potenzen von y die entsprechenden Potenzen der Reihe R setzt. Da $R \equiv x^p \pmod{m}$ ist, so vernachlässigt man nur Vielfache von m, wenn man hierbei x^p an die Stelle von y schreibt; man erhält so

$$\frac{1}{m}\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \sqrt{\left(\frac{(1-x^4)^p}{1-x^4}\right)} \equiv \sqrt{\left(\frac{(1-x^4)^p}{1-x^4}\right)} \equiv (1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{m}.$$

Dafs die bei der Entwicklung der Quadratwurzeln vorkommenden Nenner, welche nur Potenzen von 2 sein können, unberücksichtigt bleiben dürfen und der Strenge des Raisonnements keinen Abbruch thun, davon will ich der Kürze wegen die weitere Ausführung einer Gelegenheit überlassen, bei welcher ich überhaupt die algebraischen Functionen in dieser Hinsicht untersuchen werde. Man kann bei Congruenzen immer solche Nenner vernachlässigen, in denen der Modul nicht als Factor enthalten ist und braucht zu dem Ende den Begriff der Congruenz nur dahin zu erweitern, dafs man unter $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{m}$, wo b und d beide nicht durch m aufgehen, nichts anders verstehen will, als $ad-bc \equiv 0 \pmod{m}$ *). — Setzt man $p = mm' = (a+bi)(a-bi)$, so ist in der gefundenen Congruenz $\frac{1}{m}\frac{\partial y}{\partial x} \equiv (1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{m}$ der Coëfficient von x^{p-1} links $= m'c_p$, welches $\equiv m' \pmod{m}$ ist für einen primären Werth von m. Bezeichnet man durch

$$I' = \frac{(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}(\frac{1}{2}(p-1))!}{(\frac{1}{4}(p-1))!(\frac{1}{4}(p-1))!} = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.\frac{\frac{1}{2}(p-1).\frac{1}{2}(p-3)\ldots.\frac{1}{4}(p+3)}{1.2\ldots.\frac{1}{4}(p-1)}$$

den entsprechenden Coëfficienten rechts in $(1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)}$, so hat man $m' \equiv I' \pmod{m}$. Es ist dies der von *Gaufs* gefundene und am Schlusse der

*) Zwei algebraische Ausdrücke sind überhaupt congruent $(\mathrm{mod.}\ m)$, wenn das Resultat der Elimination aus den beiden irreductibeln Gleichungen mit ganzen Coëfficienten, welchen sie genügen, in homogener Form $\equiv 0 \pmod{m}$ ist.

ersten Abtheilung seiner biquadratischen Reste bewiesene merkwürdige Satz. Bemerkenswerth ist die Form, in welcher er hier auftritt, da eine primäre Primzahl in Bezug auf ihre conjugirte Primzahl als Modul bestimmt wird; man kann ihm leicht die gewöhnliche Form geben, wenn man auf beiden Seiten mit m' multiplicirt; dies giebt m'^2, d. h. $(a-bi)^2 \equiv \Gamma.(a-bi) \pmod{p}$, also $a^2-b^2 \equiv a\Gamma$ und $2ab \equiv b\Gamma \pmod{p}$, folglich, wenn b von Null verschieden ist, $2a \equiv \Gamma \pmod{p}$, wie bei *Gaufs*. Da m primär ist so hat man $a \equiv 1$ oder $\equiv -1 \pmod{4}$, je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$. Ich will hiermit nur ein ganz neues Princip zum Beweise solcher Sätze andeuten und überlasse einer späteren Gelegenheit die weitere Ausführung, welche sich an eine allgemeinere Betrachtung der am Anfang erwähnten Classe elliptischer Functionen anschliefst. Ich bemerke noch, dafs, wenn man auch die anderen Coëfficienten von $\frac{1}{m}\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ betrachten will, allgemein $\frac{4\mu+1}{m}c_{4\mu+1} \equiv$ dem Coëfficienten von $x^{4\mu}$ in $(1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{m}$ gefunden wird; hierdurch wird $c_{4\mu+1}$ in Bezug auf den Modul m^2 bestimmt. Man könnte noch weiter gehen und den allgemeinen Coëfficienten der Reihe R auch in Bezug auf m^3 und höhere Potenzen von m als Moduln bestimmen.

9) Dafs der Nenner ϱ des allgemeinen Coëfficienten $c_{4\mu+1}$ in der Form $\frac{1}{\varrho}f(m)$ keine andern complexen Primfactoren enthält, als solche, deren Norm $\leqq 4\mu+1$ ist, sieht man auch auf folgende, mehr elementare Weise ein, ohne den Satz über die gröfste Anzahl der Wurzeln einer Congruenz und ohne die Voraussetzung, dafs die Coëfficienten von U und V ganze Zahlen sind, und dafs V mit 1 anfängt, zu Hülfe zu nehmen. Aus der Art und Weise, wie die Potenzen einer gegebenen Reihe und die durch Umkehrung entstehende Reihe gebildet werden, geht hervor, dafs mit Beibehaltung der Bezeichnung in (2.), die Coëfficienten $\beta^{(\nu)}_{\nu+4}$, $\beta^{(\nu)}_{\nu+8}$, ... bis $\beta^{(\nu)}_{\nu+4\mu}$ für jeden ganzen positiven Werth von ν, und die Coëfficienten γ_5, γ_9, ... bis $\gamma_{4\mu+1}$ in Rücksicht der Primfactoren keine anderen Nenner enthalten können, als solche, die schon in β_5, β_9, ... $\beta_{4\mu+1}$ vorkommen. Es folgt dies aus einer wiederholten Anwendung des Satzes, dafs die Summe und das Product zweier Brüche in ihrem Nenner nur solche Primfactoren enthalten können, welche schon in den Nennern der beiden gegebenen Brüche aufgehen; denn für jede Reihe von der Form

$$t = x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \ldots + \lambda x^{h+1} + \text{ in. inf. *)}$$

*) Wenn die erste Potenz von x einen von 1 verschiedenen Coëfficienten hat, so tritt dieser oder doch sein Zähler bei der Umkehrung der Reihe noch als Nenner hinzu.

sind alle in der Entwicklung von t^ν bis zu dem Gliede mit $x^{h+\nu}$ und alle in der umgekehrten Reihe für x nach t bis zu dem Gliede mit t^{h+1} enthaltenen Coëfficienten ***ganze ganzzahlige*** Functionen der h Gröfsen $\alpha, \beta, \ldots . \lambda$, welche in der ursprünglichen Reihe bis zum Gliede mit x^{h+1} als Coëfficienten vorkommen, und wenn die letzteren als rational vorausgesetzt werden, so kann jeder Primfactor im Nenner des Werthes einer solchen Function nur aus den Nennern der ursprünglichen Elemente $\alpha, \beta, \ldots . \lambda$ entspringen, welche man als auf ihre kleinste Benennung gebracht annehmen darf. Für den hier vorliegenden Fall ist also, in Rücksicht auf die Bildungsweise von $c_{4\mu+1}$ in 2), nur zu zeigen, dafs die Coëfficienten der Reihe für $t = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ bis zu dem Gliede mit $x^{4\mu+1}$ incl. als ***nothwendigen*** Nenner, d. h. als einen solchen, der sich nicht fortheben läfst, keinen complexen Primfactor enthalten können, dessen Norm $> 4\mu+1$ ist, d. h. keine reelle positive Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$, welche $> 4\mu+1$ und keine reelle positive Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$, deren Quadrat $> 4\mu+1$ ist. Aus der Form des allgemeinen Coëfficienten

$$\beta_{4\mu+1} = \frac{1.3.5 \ldots . (2\mu-1)}{2.4.6 \ldots . 2\mu} \frac{1}{4\mu+1} = \frac{1.2.3.4 \ldots . (2\mu)}{(2.3 \ldots . 2\mu)^2} \frac{1}{4\mu+1}$$

$$= \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu}(\mu!)^2} \frac{1}{4\mu+1} = \Delta,$$

ist schon beim blofsen Anblick ersichtlich, dafs derselbe überhaupt keinen Divisor $> 4\mu+1$ im Nenner enthält. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dafs der Ausdruck Δ auch keine Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$, deren Quadrat $> 4\mu+1$ ist, als nothwendigen Nenner enthält. Es läfst sich nun leicht untersuchen, wie oft ***irgend*** eine Primzahl q, d. h. in einer wie hohen Potenz sie im Zähler und im Nenner von Δ enthalten ist. Nach einem schon von ***Legendre*** angewandten Principe enthält das Product $1.2.3 \ldots . \varkappa$ resp. eine Anzahl von $E\left(\frac{\varkappa}{q}\right)$, $E\left(\frac{\varkappa}{q^2}\right)$, $E\left(\frac{\varkappa}{q^3}\right)$, etc. Zahlen, welche respective durch q, q^2, q^3, etc. theilbar sind, wo allgemein $E(u)$ die gröfste in u enthaltene ganze Zahl bedeutet, und es ist daher der Exponent der höchsten in jenem Producte aufgehenden Potenz von q, $= E\left(\frac{\varkappa}{q}\right) + E\left(\frac{\varkappa}{q^2}\right) + E\left(\frac{\varkappa}{q^3}\right) +$ etc. Setzt man zuerst $\varkappa = 2\mu$, dann $\varkappa = \mu$, um den Factor $\frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}$ von Δ zu untersuchen, so zeigt sich, dafs die Differenz

$$E\left(\frac{2\mu}{q}\right)+E\left(\frac{2\mu}{q^2}\right)+E\left(\frac{2\mu}{q^3}\right)+\ldots.$$
$$-2E\left(\frac{\mu}{q}\right)-2E\left(\frac{\mu}{q^2}\right)-2E\left(\frac{\mu}{q^3}\right)-\ldots.,$$

je nachdem sie positiv oder negativ ist, anzeigt, wie oft q respective im Zähler oder im Nenner von $\frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}$ nach allen Reductionen verbleibt. Jene Differenz, welche δ bezeichnen mag, ist aber nie negativ, weil allgemein $E(2u)\geqq 2E(u)$, und zwar kann die Differenz $E(2u)-2E(u)$ überhaupt nur die beiden Werthe 0 oder 1 haben: denn setzt man $u=E(u)+r$, wo $0\leqq r<1$, so folgt $2u=2E(u)+2r$; entweder ist nun $2r$ auch noch <1, wenn $r<\frac{1}{2}$, und dann hat man $E(2u)=2E(u)$, oder es ist $2r\geqq 1$ aber noch <2, wenn $\frac{1}{2}\leqq r<1$, und dann hat man $E(2u)=2E(u)+1$ *). Da der Werth von δ nur positiv oder Null sein kann, und zwar für jede *beliebige* Primzahl q, so geht hervor, dafs, wie auch sonst bekannt, $\frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}$ einer ganzen Zahl M gleich ist; diese geht durch q^δ und keine höhere Potenz von q auf, und es kann $A=\frac{M}{2^{2\mu}}\cdot\frac{1}{4\mu+1}$ aufser der Primzahl 2 nur Theiler von $4\mu+1$ als nothwendige Primfactoren des Nenners enthalten. Da also die Nichttheiler von $4\mu+1$ hierdurch beseitigt sind, so sei q Theiler von $4\mu+1$ und $4\mu+1=q.k$. Wenn aufserdem $q^2>4\mu+1$ vorausgesetzt wird, so ist $k<q$, also geht q nur in der ersten und keiner höheren Potenz in $4\mu+1$ auf, und q kann daher sicher fortgehoben werden, wenn nur mindestens $\delta=1$ und nicht $=0$ ist. Unter der Voraussetzung $q^2>4\mu+1$ besteht ferner δ nur aus den beiden Gliedern $E\left(\frac{2\mu}{q}\right)-2E\left(\frac{\mu}{q}\right)$, weil dann *a fortiori* $2\mu<q^2$ ist und somit alle folgenden Glieder verschwinden; hier kann also δ nur die beiden Werthe 0 oder 1 haben, und zwar ist $\delta=0$ oder $=1$, je nachdem der Rest von μ (mod. q) unter oder über $\frac{1}{2}q$ liegt; nach diesen beiden Fällen wird also q im Nenner von A verbleiben oder *nicht* verbleiben; nun findet gerade der erste oder zweite dieser beiden Fälle Statt, je nachdem $q\equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 4) ist. Denn erstlich für $q\equiv 1$ (mod. 4) folgt aus $4\mu+1=qk$, dafs auch $k\equiv 1$ (mod. 4); setzt man also $q=4h+1$, $k=4l+1$, so erhält man $\mu=\frac{1}{4}(qk-1)=ql+h$, wo der Rest h sogar $<\frac{1}{4}q$ ist. Zweitens für $q\equiv 3$ (mod. 4) ist auch

*) *Gaufs* hat dies bei seinem dritten Beweise des quadratischen Fundamentaltheorems angewendet.

$k \equiv 3 \pmod 4$, also wenn man $q = 4h+3$, $k = 4l+3$ setzt, so folgt $\mu = \frac{1}{4}(qk-1) = ql+3h+2$, wo der Rest $3h+2 > \frac{1}{2}q$ ist. Aus diesem Allen geht hervor, dafs unter sämmtlichen Primzahlen, deren Quadrat $> 4\mu+1$ ist, nur diejenigen im Nenner von Δ nothwendiger Weise zurückbleiben, welche in $4\mu+1$ aufgehen und zugleich von der Form $4h+1$ sind. Diese bleiben aber auch wirklich nach allen Reductionen zurück und aufser ihnen nur Primzahlen, welche die Quadratwurzel aus $4\mu+1$ nicht übersteigen. Da in jeder Zahl höchstens *eine* Primzahl aufgehen kann, welche ihre Quadratwurzel übersteigt, so ist es besser, dieses Resultat so auszusprechen: Wenn $4\mu+1$ einen ihre Quadratwurzel übersteigenden Primfactor enthält, so bleibt dieser im Nenner von Δ, oder er hebt sich fort, je nachdem er von der Form $4h+1$ oder $4h+3$ ist.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

20.

Lehrsätze.

(Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.)

1. Über die Darstellung einer Zahl durch eine ungerade Menge von Quadraten.

Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine ***gerade*** Menge von Quadraten steht bekanntlich in einem merkwürdigen Zusammenhange, wenigstens für 2, 4, 6, 8 und zum Theil noch für 10 Quadrate, mit den Potenzsummen der Factoren der zu zerlegenden Zahl. Eine ganz andere Reihe von Sätzen entspricht den Zerlegungen in eine ***ungerade*** Menge von Quadraten; die letzteren Sätze beobachten ebenfalls eine eigenthümliche Analogie untereinander; für 3 und 5 Quadrate habe ich dieselben schon zusammengestellt; für 7 Quadrate finde ich, wenn $\chi(m)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_7^2=m$ bezeichnet:

$$m\equiv 7\ (\mathrm{mod.}\,8),\quad \chi(m)=-16.37.\Sigma\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu^2,\quad \mu<\tfrac{1}{2}m,$$

$$m\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\,8),\quad \chi(m)=\quad 8.35.\left\{\tfrac{1}{3}m^2\Sigma\left(\frac{\mu}{m}\right)-2\Sigma\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu^2\right\},\quad \mu<\tfrac{1}{2}m,$$

$\Sigma\left(\frac{\mu}{m}\right)$ ist hier das, was ***Dirichlet*** mit $\boldsymbol{A-B}$ bezeichnet,

$$m\equiv 5\ (\mathrm{mod.}\,8),\quad \chi(m)=28.\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu(2m-\mu),$$

μ ungerade und $<m$,

$$\chi(m)=-28.\Sigma(-1)^{\mu}\left(\frac{\mu}{m}\right)(m^2-4\mu^2),$$

μ gerade und ungerade aber $<\frac{1}{2}m$.

$m\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\,8)$ giebt dasselbe, wie $m\equiv 5\ (\mathrm{mod.}\,8)$, nur ist bei der zweiten Darstellung von $\chi(m)$ nicht -28, sondern $+28$ der Factor von Σ. Die Zahl m wird ohne quadratischen Theiler angenommen.

Die Analogie der Sätze für 3, 5 und 7 Quadrate tritt z. B. an folgenden speciellen Fällen recht deutlich hervor: Für eine Primzahl p von der Form $8n+3$ ist die Anzahl der Darstellungen durch 3 Quadrate gleich der 8fachen Differenz zwischen der Anzahl der quadratischen Reste (mod. p) und

der Anzahl der Nichtreste, welche unter $\frac{1}{2}p$ liegen; für eine Primzahl p von der Form $8n+1$, respective $8n+5$, ist die Anzahl der Darstellungen durch 5 Quadrate gleich der -80 respective -112fachen Differenz zwischen der Summe der Reste und der Summe der Nichtreste unter $\frac{1}{2}p$; für eine Primzahl $p=8n+7$ ist die Anzahl der Darstellungen durch 7 Quadrate gleich der -592fachen Differenz zwischen der Summe der Quadrate der Reste und der Quadrate der Nichtreste unter $\frac{1}{2}p$; so dafs, wenn R die quadratischen Reste, N die Nichtreste unter $\frac{1}{2}p$ repräsentirt, die eine Formel $\Sigma R^s - \Sigma N^s$ den Darstellungen durch 3, 5 oder 7 Quadrate entspricht, je nachdem $s=0$, 1 oder 2 gesetzt wird.

Für die Darstellungen durch 9 Quadrate scheinen keine ähnlichen Sätze von gleicher Einfachheit Statt zu finden.

2. Über die Entwicklungs-Coëfficienten der Potenzen unendlicher Reihen.

Die Coëfficienten der negativen Potenzen einer nach Potenzen einer Variabeln fortschreitenden Reihe lassen sich stets ***linear*** in die Coëfficienten der positiven Potenzen ausdrücken. Es sei z. B.

$$R = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \text{in. inf.}$$

die vorgelegte Reihe, und man setze für irgend eine Potenz von R allgemein

$$R^\mu = 1 + c_1^{(\mu)} x + c_2^{(\mu)} x^2 + c_3^{(\mu)} x^3 + \ldots,$$

so sind die Coëfficienten von $\frac{1}{R}$ die folgende:

$$1,\ -c_1,\ c_2^{(2)} - 3c_2,\ -c_3^{(3)} + 4c_3^{(2)} - 6c_3,\ c_4^{(4)} - 5c_4^{(3)} + 10c_4^{(2)} - 10c_4,\ \text{u. s. w.}$$

Auf ähnliche Weise werden die Coëfficienten von $\frac{1}{R^2}$, $\frac{1}{R^3}$, u. s. w. bestimmt. Setzt man $xR = y$, so können hiernach auch die Coëfficienten der Reihen, durch welche x und Potenzen von x nach Potenzen von y entwickelt werden, linear in die Coëfficienten der positiven Potenzen von R ausgedrückt werden. Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ beliebige Gröfsen sind, deren Anzahl $> n$, so hat man

$$\frac{c_n^{(\alpha)}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)} + \frac{c_n^{(\beta)}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\lambda)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\ldots(\lambda-\varkappa)} = 0.$$

Durch diese Sätze ist unter anderen ein Mittel gegeben, Gröfsen darzustellen, welche als Entwicklungs-Coëfficienten von negativen Potenzen gewisser Reihen gegeben werden, wenn die positiven Potenzen dieser Reihen ein einfaches Gesetz befolgen. Hierdurch kann man z. B. in sehr allgemeiner Form ein independentes Gesetz der ***Bernoulli***'schen Zahlen und der sogenannten Secanten-Coëfficienten aufstellen.

3. Über irreductible Congruenzen.

Wenn nach der Bezeichnung von ***Schoenemann*** $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ eine irreductible Congruenz $n$ten Grades, und α eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet, so läfst sich immer ein ***geeigneter*** Ausdruck β von α finden, von der Art, dafs jeder Ausdruck von der Form

$$(1.) \qquad a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \pmod{p, \alpha},$$

dessen Coëfficienten a_0, a_1, ... ganze Zahlen sind, auf eine und nur eine Weise auf die Form

$$(2.) \qquad b_0\beta + b_1\beta^p + b_2\beta^{p^2} + \ldots + b_{n-1}\beta^{p^{n-1}} \pmod{p, \alpha}$$

gebracht werden kann, wo die Coëfficienten b_0, b_1, ... ebenfalls ganze Zahlen sind. Läfst man dann in (2.) alle Coëfficienten die Werthe 0, 1, 2, ... $p-1$ durchlaufen, so constituiren die daraus hervorgehenden p^n Zahlen von der Form (2.) ein vollständiges Restensystem (mod. p, α). — Ist ω eine primitive $n$te Wurzel der Einheit, und setzt man $\alpha + \omega^\lambda\alpha^p + \omega^{2\lambda}\alpha^{p^2} + \ldots + \omega^{(n-1)\lambda}\alpha^{p^{n-1}} = \varphi(\lambda)$, so ist das Product $\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')\ldots \equiv$ einem von α ***unabhängigen*** Ausdrucke, jedesmal, wenn die Summe der Exponenten $\lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots$ durch n theilbar ist.

21.

Über Sparcassen.

(Vom Herausgeber.) *)

1.

Sparcassen, welche auch kleinere Einlagen annehmen und sie mit Zins und Zins vom Zinse zurückgeben, sind offenbar, besonders für den ärmeren und ärmsten Theil der Staatsgenossen eben so nützlich und wichtig, als nöthig. Der, dessen Ersparnisse gröfser sind, kann dieselben auch noch auf andere Weise auf Zinsen austhun und vielleicht höhere Zinsen daraus erzielen, als die Sparcasse zu gewähren im Stande ist. Kleine Ersparnisse dagegen lassen sich ohne Hülfe einer Sparcasse nicht verzinslich machen und bleiben also, ohne Sparcassen, gegen gröfsere in noch stärkerem Verhältnifs als dem ihres Betrages im Nachtheil.

Auch sind Sparcassen eines der wahren und *rechten* Mittel, den Armen zu helfen und die Armuth zu mindern. Die *richtigen* Mittel sind nemlich die, welche den Bedürftigen die Wege öffnen und erleichtern, auf welchen sie, Niemand sonst schadend, *sich selbst* helfen können. Insbesondere sind es die, welche ihnen, aufser *sachlich* (materiell), auch *sittlich* (moralisch) nützen; und das letztere geschieht eben, wenn sie auf den Gebrauch und die Anstrengung ihrer eignen Kräfte sie führen. Was über diese Mittel hinausgeht, z. B. Almosen, auf welche überhaupt immer nur Der Anspruch hat, der nicht im Besitz seiner vollen Kräfte ist, oder ein Arbeitslohn, der den Werth der Arbeit übersteigt und der also ebenfalls nichts anders ist, als ein Geschenk, mögen für den Augenblick dem Empfänger *sachlich* nützen: aber *sittlich* nützen sie ihm nicht, sondern schaden ihm und, durch Rückwirkung, für die Folge auch sachlich. Jede Hülfe, die dem arbeitsfähigen Armen ohne Anstrengung seiner eignen Kräfte gegeben wird, ist Etwas, was Der, welcher seine eigenen Kräfte zu benutzen vorzieht, ablehnen wird, während ihre Wirkung an Dem, welcher sie sich mag gefallen lassen, meistens zu seinem eigenen Nachtheil, verloren geht.

*) Diese Abhandlung ist zwar nicht für das Mathematische Journal insbesondere bestimmt, sondern vielmehr für das Publicum überhaupt: sie dürfte indessen auch hier wohl an ihrem Orte sein, weil zur Begründung auch mathematische Rechnungen nöthig waren und also die Leser dieses Journals insbesondere geeignet und berufen sein dürften, den Gegenstand und den Zweck der Abhandlung fördern zu helfen.

Da nun Sparcassen, möglichst vortheilhaft eingerichtet, recht wesentlich geeignet sind, den Ärmeren auf die möglichste ***Anstrengung seiner Kräfte*** hinzuleiten, während er durch das Sparen zugleich von vermeidbaren Ausgaben abgehalten und ihm also *so* doppelt, nemlich auch sittlich genutzt wird, so ist es gewifs sehr zu wünschen, dafs die Sparcassen wirklich möglichst vortheilhaft für die Sparenden angeordnet werden möchten; nemlich so, dafs ***aller*** Gewinn, der sich aus den Ersparnissen möglicherweise erzielen läfst, den Sparenden, ohne Abzug und auf die ihnen leichteste und zugänglichste Weise, zu Theil werde. Die möglichste Vervollkommnung der Sparcassen würde ein Vorschritt in der Lösung der grofsen, so unendlich wichtigen Aufgabe sein, die Armuth zu mindern: einer Aufgabe, deren Lösung bis jetzt leider! noch sehr im Rückstande ist, und die nur zu oft verfehlt wurde, wenn sie gleich, im Vorbeigehen bemerkt, sogar im weitesten Umfange, nicht unmöglich sein dürfte.

2.

Die ***vorhandenen*** Sparcassen, so nützlich und dankeswerth sie auch schon aus den obigen Gründen sind, erfüllen ihren Zweck keinesweges vollständig, und bei weitem nicht in dem Maafse, wie es wirklich möglich wäre: aus folgenden Gründen.

Erstlich. Sie sind gar nicht ***im Stande***, die ***vollen*** Zinsen, welche sich aus den Einlagen, nach Abzug der unvermeidlichsten Verwaltungskosten, erzielen lassen, den Sparenden zu berechnen und zukommen zu lassen; besonders deshalb nicht, weil sie nothwendig einen namhaften Theil der Einlagen zinslos zurück- und zu den beständigen Rückzahlungen bereithalten müssen; was schon Das, was nach Jahren am Ende der Sparende erzielt hat, nothwendig in dem Verhältnifs des zinslos Zurückbehaltenen zum Ganzen vermindert. Mufs z. B. Einviertel der Einlagen zu Rückzahlungen zinslos zurückbehalten werden, so verliert der Sparende den gleichen Theil an Dem, was ihm sonst gewährt werden könnte.

Zweitens erfordern viele einzelne Sparcassen zusammen offenbar mehr Verwaltungskosten, als für eine einzelne gröfsere, oder für eine einzige grofse Sparcasse nöthig sein würden. Die mehreren Verwaltungskosten vermindern aber wiederum Das, was der Sparende erzielt. Und mehr, als was nach Abzug der Verwaltungskosten und des Verlusts der Zinsen desjenigen Theils der Einlagen, der zu den Rückzahlungen innebehalten werden mufs, von dem Ertrage *sicherer* Zinsen übrig bleibt, vermag keine Sparcasse, wenn sie auch auf keinen Gewinn der Unternehmer rechnet, den Sparenden zu gewähren.

Sie ***kann*** ihnen, beim besten Willen, nicht den mit Sicherheit zu erzielenden vollen Zinsfufs der vollen Einlage berechnen, sondern immer nur einen geringeren Zinsfufs. Gewähren Sparcassen den vollen, oder gar einen höhern Zins, so können sie entweder nicht bestehen und die Einlagen selbst kommen in Gefahr, oder die Inhaber der Casse müssen aus andern Mitteln zuschiefsen; und das ist dann ein ***Almosen;*** aber am unrechten Orte: denn die unentgeltliche Gabe gehört nicht Denen, die noch sparen können, sondern Denen, die es ***nicht*** mehr im Stande sind. Was so den Armen gegeben wird, wird den Ärmern und Ärmsten entzogen.

Drittens können kleine Sparcassen ihre kleineren Summen auf weniger mannichfache Weise, also weniger vortheilhaft zinstragend anlegen, als es eine grofse Casse mit gröfseren Summen vermag. Am wenigsten können sie, weil sie einen möglichst hohen Zins zu erlangen suchen müssen, auch noch durch ***Ausleihen*** den Bedürftigen und Verschuldeten aufhelfen.

Viertens ist jede Vereinssparcasse um so weniger ***sicher,*** je kleiner sie ist; nur grofse Vereine können Wechselfälle ohne fühlbaren Schaden der Theilnehmer ertragen.

Fünftens sind die jetzigen Sparcassen für die Theilnehmer wenig ***bequem:*** dadurch, dafs die Einlage und die Rücknahme bei der Casse selbst, persönlich, oder doch durch Beauftragte geschehen mufs; was oft weite Gänge erfordert und manche Wartezeit wegnimmt. Für alle Die, welche nicht an dem Orte selbst wohnen, wo die Sparcasse sich befindet, ist die Unbequemlichkeit noch gröfser; und für entfernter Wohnende ist die Casse beinahe unbenutzbar. Gar Viele aber hält die Unbequemlichkeit, so wie noch mehr, wenn sie in dem Sparcassenbuch sich nennen müssen, oder nennen zu müssen glauben, ganz vom Sparen ab, statt dafs die Casse sie dazu zu ermuntern bestimmt ist.

3.

Einige dieser Unvollkommenheiten der jetzigen Sparcassen würden schon vermieden werden, wenn etwa eine Gesellschaft, die möglichst wenig oder gar nicht auf eigentlichen ***Gewinn*** rechnete (auch etwa wegen des eigenen Vortheils, den immer am Ende in weiterem Sinne der Besitz erzielt, wenn er die Armuth mindern hilft) eine einzige grofse Sparcasse errichtete, statt der Sparbücher auf den Inhaber lautende Sparscheine durch Beauftragte an recht vielen Orten ausgeben und durch dieselben wieder die verlangten Rückzahlungen leisten liefse, also so gleichsam ihre Scheine in freien ***Umlauf***

setzte. Diese Casse würde wahrscheinlich zu Rückzahlungen schon mit einem geringeren zinslos zurückzubehaltenden Theile der Einlagen auskommen; sie würde aus den gröfsern Summen einen höhern Zinsfufs zu erzielen vermögen; die Verwaltungskosten würden geringer, die Einlagen würden gesicherter sein und für die Sparenden wäre der blofse Ankauf der umlaufenden Scheine sehr bequem; auch würde die Theilnahme an der Sparcasse für Jeden, selbst für den entfernt Wohnenden, viel leichter sein.

Aber einestheils würde es der Unternehmung doch immer nur auf eine sehr beschränkte und durch die vielen Beauftragten kostspielige Weise möglich sein, die Scheine in wirklichen ***Umlauf*** zu setzen; die Verwaltungskosten würden immer noch bedeutend sein, und anderntheils könnte auch die Gesellschaft, selbst beim besten Willen, einen Gewinn für sich selbst nicht wohl *ganz* aufgeben. Denn sie müfste nothwendig eine den Einlagen, also der Summe der ausgegebenen Scheine gleiche Summe ***als Pfand*** niederlegen; und wenn dies gleich auch durch zinstragende sichere Papiere geschehen könnte, deren Zinsen den Eigenthümern verblieben, so ist es doch immer ein Opfer, wenn Jemand seinen Besitz auf diese Weise bindet und die Benutzung etwa zufällig sich ergebender Gelegenheiten, sein Geld höher auszubringen, sich abschneidet. Für ein solches Opfer kommt ihm billigerweise eine Entschädigung zu, und diese geht dann wieder von Dem, was den Sparenden zu gewähren ist, ab. Diese andere Einrichtung der Spar-Anstalten würde also noch immer nicht vollständig ihren Zweck erreichen.

Die Unternehmung einer allgemeinen Sparcasse durch Pfandzusammenlegende (durch Actionnairs), welche wesentlich auf ***Gewinn*** rechnen, würde gänzlich zu verwerfen sein; denn sie wäre offenbar dem wesentlichen Zweck der Sparcassen, nemlich demjenigen, für die Ärmeren das Sparen so vortheilhaft als möglich zu machen, gradezu ***entgegen.***

4.

Möglichst vollständig wird sich der so wichtige Zweck und Nutzen der Sparcassen nur auf folgende, übrigens sehr einfache Weise erreichen lassen.

Der ***Staat*** selbst nemlich, die ***Regierung,*** gebe ***Sparscheine,*** etwa auf 50 Thaler, 5 Thaler und (damit um so besser die Ärmeren daran Theil nehmen können) auch auf 1 Thaler lautend, aus. Auf den Scheinen selbst stehe gedruckt, wie durch den Zins und den Zins vom Zinse ihr Werth von ***halben zu halben*** Jahren steigt. (Alle Zinszahlungen kommen nemlich nicht jährlich, sondern halbjährlich zur Berechnung).

Die Ausgabe der Scheine geschehe dadurch, dafs die ***Staatscassen*** von allen Zahlungen, welche sie zu machen haben, einen verhältnifsmäfsigen ***Theil*** (der gar nicht grofs nöthig sein wird) in Sparscheinen leisten; desgleichen dadurch, dafs die Sparscheine aufserdem in allen dazu geeigneten, besonders den kleineren, im Lande zerstreuten Cassen für den darauf verzeichneten Werth für Jedermann zu haben sind.

Der Staat nehme darauf, eben so, in allen Cassen Sparscheine für einen bestimmten ***Theil*** aller Zahlungen, welche an die Cassen zu machen sind, jederzeit nach ihrem vollen Werth auch wieder an. Auf diese Weise werden sie, ganz wie jetzt die ***unverzinslichen Cassenscheine,*** in freien und allgemeinen ***Umlauf*** kommen, und Jeder, der Erspartes anlegen will, wird dafür Sparscheine, auch ohne sie von einer Casse zu holen, oder auf die Zahlung einer Casse warten zu dürfen, schon im gewöhnlichen Verkehr erlangen können; andrerseits aber, wenn er das Ersparte angreifen mufs, eben so wieder im gewöhnlichen Verkehr die Scheine auch ausgeben können; so dafs ***keine*** besondere ***Einlösungscasse*** und kein ***Zurückbehalten*** eines Theils der Einlagen zu Rückzahlungen nöthig ist.

Der ***Verkauf*** der Scheine in den Cassen müfste jedoch immer nur etwa je in den ersten 14 Tagen nach den halbjährigen Zeitpuncten, in welchen der Werth der Scheine steigt, Statt finden, damit nicht etwa Jemand, der ***kurz nach*** einem dieser Zeitpuncte eine Zahlung zu machen hat, ***kurz vorher*** Sparscheine dazu aus der Casse kaufen könne, um sie wenige Tage später für ihren höhern Werth wieder auszugeben. Wer so Etwas beabsichtigt, könnte dann freilich Scheine auch noch sonst wo aufzukaufen suchen; aber jeder Besitzer von Scheinen wird sich auch wohl vorsehen, wo möglich nicht ***vor,*** sondern erst ***nach*** dem Zeitpuncte des Steigens zu verkaufen.

Dafs Sparscheine in die Staatscassen zurückfliefsen, würde nicht ausbleiben, besonders im Anfange; aber da ihre mannichfachen Vortheile für die Sparenden offenbar sind, so kann und wird immer am Ende der Erfolg der sein, dafs die Sparenden Das, was sie jetzt in den vorhandenen Sparcassen angelegt haben, so wie Das, was sie sonst ferner anlegen möchten, und sogar, wegen der Bequemlichkeit und gröfsern Vortheile, noch mehr, in Sparscheine umsetzen und dieselben möglichst lange an sich behalten werden. Also ***mindestens eben so viel,*** als jetzt in die Sparcassen niedergelegt ist, wird bald ***nicht*** mehr in die Staatscassen zurückfliefsen, sondern in den Händen der Sparenden auf eine Reihe von Jahren verbleiben. Was etwa von Zeit

zu Zeit dennoch in die Staatscassen zurückfliefst, belästigt diese übrigens nie, da sie es immer wieder ausgeben, bis es in die Hände Derer kommt, die es aufbewahren wollen.

Der Sparende hat, wenn die Einrichtung vorhanden ist, weiter gar nichts zu thun, als die Scheine über sein Erspartes, statt des jetzigen Sparcassenbuchs, aufzubewahren; und wenn der Ärmere ***Einthalerscheine*** aufbewahrt, so kann er auch, falls er das Ersparte angreifen mufs, ohne alle Mühe, ohne alle Gänge und Warten beim Abschreiben in einem Sparcassenbuch, von seinem Ersparnifs wiederum Theile, bis zu Einem Thaler hinunter, in Geld verwandeln.

In der ***Berliner*** Sparcasse sind etwa 1 Million Thaler niedergelegt. Da nun Berlin, der Einwohnerzahl nach, noch nicht der 40te Theil des Preufsischen Staats ist, so dürfte es nicht zu viel, vielleicht selbst ***bei weitem*** noch nicht genug sein, wenn der Preufsische Staat für 10 Millionen Thaler Sparscheine in Umlauf setzte. Wir nehmen dies ***für den Anfang*** an; und zwar, dafs es ***allmälig*** geschehe, etwa innerhalb 5 Jahren, in jedem halben Jahre 1 Million; wovon jedesmal ***Zweizehntel*** in Funfzigthalerscheinen, ***Dreizehntel*** in Fünfthalerscheinen und die ***Hälfte*** in Einthalerscheinen bestehen mag.

5.

Die ***Verwaltung*** dieser Spar-Anstalt werde einer durchaus abgesonderten, ausschliefslich für sie bestimmten Behörde übertragen, welche den Namen ***Sparbank*** führen mag; die ausgegebenen Sparscheine mögen ***Sparbankscheine*** heifsen. Der Name ist nicht ganz gleichgültig. Das Wort ***Bank*** hat in der grofsen Masse ein gewisses Vertrauen. ***Wesentlich*** aber ist es, dafs die Sparbank durchaus von aller andern Geldverwaltung getrennt sei und zunächst den bestimmten Zweck habe, das Sparen so vortheilhaft zu machen, als es nur irgend möglich ist. Der Staat wird übrigens, wenn er auch auf diese Weise keinen ***unmittelbaren*** Gewinn aus der Bank zieht, dennoch ***mittelbaren*** Gewinn genug davon haben. Es werden für ihn schon die Ausgaben, die er nur zu oft an die Armuth auf diese oder jene Weise machen mufs, sich vermindern; und dann wird er noch den mittelbaren grofsen Gewinn haben, der aus der Erleichterung und sittlichen Besserung der Armen entsteht.

6.

Es wäre vielleicht zunächst hier nöthig, die verschiedenen Bedenken zu erwägen und zu heben, die sich gegen die Sparbank aufstellen lassen: z. B., dafs die wenig besitzenden Sparer doch mitunter Schwierigkeiten haben

möchten, für ihre Sparscheine ohne Verlust baar Geld zu erlangen: dafs die Sparscheine an die Börse kommen und einem schwankenden Preise verfallen dürften: dafs vielleicht die Bemittelteren und Reichen, oder auch die Geldhändler und Andere, welche für ihr Geschäft stets bedeutende Summen in Vorrath haben müssen, die Sparscheine aufkaufen und nichts davon den Armen übrig lassen möchten u. s. w. Diese Bedenken lassen sich aber erst weiter unten, nachdem die ***vollständige*** Beschreibung der ***Zwecke*** und der ***Wirksamkeit*** der Bank gegeben sein wird, prüfen, und erst da läfst sich angeben, wie und durch welche etwa zusätzliche Anordnungen die Bedenken gehoben werden dürften. Wir verweisen also deshalb auf (§. 19.) weiter unten.

7.

Zunächst werde hier nur noch bemerkt, dafs auch selbst den Allerärmsten, welche nicht Einen Thaler auf einmal sparen können, sondern vielmehr nur einige, oder ***einen*** Silbergroschen auf einmal, die Theilnahme an der Spar-Anstalt keinesweges abgeschnitten ist. Sie dürfen entweder nur selbst sammeln, bis sie Einen Thaler beisammen haben, oder ihre Silbergroschen einem sichern Manne, auf dem Lande etwa dem Prediger, dem Schulzen u. s. w., in den Städten den kleinen Sammlungscassen anvertrauen, die sie ihnen aufbewahren, bis der Thaler beisammen ist; wofür ihnen dann der Sammler einen Schein kauft und ihnen denselben ferner aufhebt, oder ihn dem Sparer zur eigenen Aufbewahrung überliefert.

8

Die Summe baaren Geldes, oder anderer umlaufender vollwerthiger Zahlmittel, welche die Staatscassen beim Ausgeben der Sparscheine statt des Werths derselben ***innebehalten,*** müssen nun alle diese Cassen der Bank ausliefern, damit dieselbe die Zinsen dafür auf folgende verschiedene Arten einziehe und aufhäufe.

Das nächste, einfachste und immer offenstehende Mittel für die Bank, die Zinsen zu gewinnen, ist, dafs sie für das von den Staatscassen ihr überlieferte Geld ***Staatsschuldscheine*** ankauft, die Zinsen dafür sich halbjährlich auszahlen läfst, für diese Zinsen wieder Staatsschuldscheine kauft u. s. w. So häuft sie auf die einfachste Weise, fast ohne alle Mühe und ohne Wagnifs, den steigenden Werth der Sparpapiere auf und kann, wenn es verlangt wird, die Scheine auch baar einlösen; was aber in einer langen Reihe von Jahren nicht einmal und nicht eher wesentlich vorkommen wird, ehe nicht durch die Anhäufung der Zinsen der Werth der ausgegebenen Sparscheine über die-

jenige Summe hinaus gestiegen ist, die den Sparenden genügt; denn da die Papiere in freiem Umlauf bleiben und *jede* Staatscasse zu ihrem vollen Werthe sie annimmt, so brauchen sich die Sparenden wegen der Einlösung gar nicht einmal an die Bank zu wenden. Dies ist erst dann nöthig, wenn zu viele Sparscheine in die Staatscassen zurückzufliefsen anfangen; was dann das Zeichen ist, dafs der gestiegene Werth der Sparscheine das Bedürfnifs der Sparenden übertrifft. Dann kommt die Einlösung an die Bank; aber auch nur die Einlösung des *Überschusses* über das Bedürfnifs; denn das Bedürfnifs bleibt ferner.

9.

Wenn die Bank so nach (§. 8.) verfährt, so geschieht durch das Ausgeben der Sparscheine nichts Anderes, als dafs allmälig eine dem steigenden Werthe der Sparscheine gleiche Preissumme von Staatsschuldscheinen *aufser Umlauf* und statt ihrer Sparscheine *in Umlauf* gesetzt werden. Die Sparscheine könnten, wenn es nöthig wäre, wie schon bemerkt, jeden Augenblick auch wieder eingelöset werden, dadurch, dafs man statt ihrer wieder die zurückgelegten Staatsschuldscheine in Umlauf brächte. Es geschieht nichts weiter, als dafs eine gewisse Summe von verzinslichen Staatsschuldscheinen in verzinsliche Sparbankscheine *verwandelt* wird; und zwar mit der Wirkung, dafs die Zinsen der Staatsschuldscheine, welche die Besitzer derselben empfingen, nachdem Diesen der Preis der Scheine bezahlt worden, nun für die Sparenden benutzt werden.

Hieraus folgt, dafs die Ausgabe der Sparbankscheine durchaus nicht etwa eine *neue Anleihe* oder eine *Vermehrung der Staatsschuld* sein würde. Es bedürfen also auch die Sparbankscheine keines neuen *Pfandes*. Die Staatsschuldscheine, welche in die Hände der Bank kommen, *sind das Pfand* für den Werth der Sparscheine; und diese Staatsschuldscheine sind ihrerseits auf Pfand gegründet.

10.

Aus dem der Bank *immer* offenbleibenden *sichern* Mittel, die Zinsen für die Sparbankscheine zu gewinnen (§. 8.), ergiebt sich weiter die *Höhe des Zinsfufses*, welcher *mit Sicherheit* den Sparbankscheinen gewährt werden kann, und folglich ihr steigender Werth selbst.

Die Staatsschuldscheine nemlich tragen $3\frac{1}{2}$ *vom Hundert* jährlichen Zins, mit $1\frac{3}{4}$ v. H. halbjährlich zahlbar. Dafs der Preis der Staatsschuldscheine jemals ihren Nennwerth dauernd *übersteigen* werde, ist nicht wahrscheinlich, und selbst *kaum möglich:* in unruhigen Zeiten nicht, weil dann der Preis

aller, ganz sicherer, selbst höhere Zinsen tragender Papiere ***unter*** dem Nennwerth bleibt: in Friedenszeiten nicht, weil es dann Gelegenheiten und Mittel genug giebt, von baarem Gelde mehr als $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen zu erlangen. Es sind also $3\frac{1}{2}$ ***vom Hundert jährlich*** als die ***mindesten sicheren*** Zinsen anzusehen, die sich unter allen Umständen von baarem Gelde erzielen lassen. Und da nun die Bank für die ausgegebenen Sparscheine ***baar Geld*** einnimmt, so vermag sie, jedenfalls ***mindestens*** $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen ***mit Sicherheit*** zu gewinnen und halbjährlich mit $1\frac{3}{4}$ v. H. aufzuhäufen. Also kann sie auch diesen ***selben*** Zinsfufs, jedoch nachdem die ***Kosten der Verwaltung*** von dem Ertrage abgezogen sind, den Sparscheinen ***mit voller Sicherheit*** gewähren. Für die Kosten der Verwaltung setzen wir $\frac{1}{4}$ v. H. halbjährlich; was für 10 Millionen Thaler Sparscheine 50 Tausend Thaler jährlich ausmacht; und mehr dürfte die Verwaltung wohl nicht kosten.

Nach diesen Grundsätzen berechnet, ist zufolge der Formeln (4. oder 6. in ***B.***) der Beilagen (in welche Beilagen alle nöthigen Berechnungen verwiesen sein mögen, um hier den Vortrag durch sie nicht zu unterbrechen) der von halbem zu halbem Jahre steigende Werth der Sparscheine derjenige, welchen die beiliegende ***Tafel I.*** angiebt. Die Tafel ist nur bis zu $22\frac{1}{2}$ Jahren berechnet. Es ist aber nicht gemeint, diese Zeit solle das Ziel der Sparpapiere sein; die Bank solle etwa dann abschliefsen und die Scheine einlösen. Es mögen blofs, da wohl in 22 Jahren die Scheine ziemlich abgenutzt sein werden, nach 22 Jahren neue gedruckte Scheine, den ältern gleich, ausgegeben werden, und wer weiter sparen will, darf nur neue Scheine statt der alten sich geben lassen.

11.

Es mögen jetzt zunächst einige von den ***Wirkungen*** der Sparpapiere bemerklich gemacht werden.

A. Wie die Tafel zeigt, ***verdoppelt*** sich nahe zu in 22 Jahren die Einlage. Wer ***weiter*** sparen will, hat zufolge der Tafel auf einen Einthalerschein 7 Silberpfennige, auf einen Fünfthalerschein $2\frac{3}{4}$ Silbergroschen und auf einen Funfzigthalerschein $27\frac{1}{3}$ Silbergroschen zuzulegen, um ***zwei*** neue ***gleiche*** Scheine statt seines ***einen*** zu bekommen. Spart er nun weiter, so hat er, wieder nach 22 Jahren, oder nach zusammen 44 Jahren, ***vier*** Scheine aus seinem einen erzielt, nach 66 Jahren 8 gleiche Scheine u. s. w. In 50 Jahren steigt der Werth eines Scheins zufolge (***B.*** II. der Beilage) auf das 5fache, in 60 Jahren etwa auf das 7fache. Jemand, bei dessen Geburt 100 Thaler

in Sparscheinen angelegt worden sind, besitzt also, wenn er 50 Jahre alt ist 500, wenn er 60 Jahre alt ist 700, wenn er 66 Jahre alt ist 800 Thaler.

B. Wenn für Jemand, anfänglich von seinen Angehörigen, späterhin von ihm selbst, jedes halbe Jahr ein Sparschein von ***Einem Thaler*** angekauft wird, so werden dadurch nach (Beilage ***C.*** III.) in $18\frac{1}{2}$ Jahren etwa 50 Thlr. angesammelt, also eine Summe, deren Zinsen, zu 4 v. H. halbjährlich, 1 Thaler, folglich ***eben so viel*** betragen, als bis dahin ***eingelegt*** wurde; so dafs sich von da an die Ausgabe in eine ihr gleiche ***Einnahme*** verwandelt. Wird die Einlage 30 Jahre lang fortgesetzt, so werden nach (Beilage ***C.*** III.) nahe an 100 Thlr., in 40 Jahren etwa 161 Thlr., in 50 Jahren etwa 247 Thlr., in 60 Jahren etwa 367 Thlr. aufgesammelt. Wird also z. B. für Jemand, Anfangs von seinen Angehörigen, später von ihm selbst, ***täglich nur Ein Silbergroschen*** (was halbjährlich etwa 6 Thaler ausmacht) zurück- und allmälig in Sparscheinen angelegt, so gelangt er dadurch in seinem 50ten Lebensjahre zum Besitz von mehr als 1500 Thlr., im 60ten Lebensjahre zu etwa 2200 Thlr., für sich und seine Erben. Wer ***jährlich*** 100 Thaler zurücklegen kann und in Sparscheinen anlegt, sammelt in 30 Jahren an 5000 Thlr., in 40 Jahren über 8000 Thlr. in 50 Jahren etwa 12 350 Thaler an. So dürfte man denn also auch wohl am besten, sichersten und bequemsten für seine Hinterbleibenden sorgen können.

C. ***Cassenbeamte,*** welche eine ***Bürgschaft*** zu stellen haben, werden wohlthun, dieselbe, statt in baarem Gelde, in Sparscheinen niederzulegen und die Zinsen, statt sie anzunehmen, sich aufhäufen zu lassen; denn hier ist auch einer der Fälle, wo die Einlage auf eine Reihe von Jahren ***unbeweglich*** ist. Schon nach 22 Jahren, wenn der Beamte, oder seine Erben die Bürgschaft zurückbekommen, erhalten sie das ***Doppelte;*** nach 44 Jahren das ***Vierfache.*** Auch für die Behörde, welcher die Bürgschaft gestellt werden mufs, ist Dies günstig, weil die Bürgschaft immerfort ***zunimmt.*** Wegen dieser Vortheile für ***beide*** Theile wäre es sogar gut, diese ***Art*** der Bürgschaftstellung zur ***Bedingung*** zu machen.

D. Auch von dem Eigenthum ***Unmündiger*** würde man wohlthun, denjenigen Theil, dessen Zinsen nicht zu ihrer Erziehung nöthig sind, in Sparscheinen anzulegen; was dann von der Behörde selbst, ohne alle Mitwirkung der Vormünder geschehen könnte, da gar nichts weiter dabei zu thun ist, als die Sparscheine ***aufzubewahren;*** welches Verfahren aber leicht für die Eigenthümer vortheilhaft, so wie auch für die Vormünder erwünscht

sein kann. Nach 22 Jahren, was die Zeit der Mündigwerdung sein kann, bekommt der Mündiggewordene das ***Doppelte*** seines Erbes.

Es erhellet schon aus diesen Beispielen, wie bedeutend, wie mannichfach und wie ausgebreitet schon der ***unmittelbare*** Nutzen der Sparbankpapiere sein würde.

12.

Das in (§. 8.) für die Sparbank, als das am nächsten liegende, einfachste, sichere und als immer offenstehend bezeichnete Mittel, durch den Ankauf von ***Staatsschuldscheinen*** zu den Zinsen für die Sparpapiere zu gelangen, ist aber für sie keinesweges das einzige. Es stehen ihr noch mehrere andere, eben so vortheilhafte, sichere und selbst ***bessere*** Mittel dazu offen.

Sie kann zunächst, eben sowohl wie Staatsschuldscheine, auch ***andere*** sichere verzinsliche Papiere kaufen, für die Zinsen derselben wieder gleiche, oder andere Papiere u. s. w. z. B. ***Vorantheilsscheine*** (Prioritäts-Actien) einträglicher Eisenbahnen u. dergl. Sie mufs natürlich nur sorgsam sich hüten, etwa um höhere Zinsen zu erzielen, ***unsichere*** Papiere zu erwerben, sondern strenge auf Papiere sich beschränken, welche ***mindestens*** $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen mit ***vollkommenster*** Sicherheit eintragen.

Einen Unterschied macht dieses zweite Verfahren offenbar nicht in Rücksicht auf Das, dessen in (§. 9.) gedacht ist: nemlich dafs die Sparpapiere durchaus nicht etwa eine Vermehrung der Staatsschuld sind und keines neuen Pfandes bedürfen. Das Pfand besteht bei dem zweiten Verfahren, statt in den nach (§. 8.) in die Casse niedergelegten Staatsschuldscheinen, in den andern von ihr aufgehäuften sicheren Papieren, die auch, wenn es etwa nöthig wäre den Fall ganz auf den in (§. 8.) zu bringen, in Staatsschuldscheine umgesetzt werden könnten.

13.

Die Sparbank kann ferner auch auf wertheste ***Pfänder:*** Äcker, Grundstücke u. s. w., bis zu demjenigen Theil deren Werths, der ihnen unzweifelhaft bleibt, also etwa nach den für Mündelgeldern angenommenen Regeln, so wie auch, besonders in kleineren Summen, auf sichere ***Bürgschaft,*** desgleichen auf ihre eigene Sparscheine Geld ausleihen; und zwar zunächst auf die gewöhnliche Weise, nemlich unter der Bedingung der ***Rückzahlung des vollen Anlehns nach halbjähriger Kündigung.*** Und zwar genügen ihr hier schon ***4 v. H. jährliche Zinsen,*** denn schon Dies übersteigt was für die Sparpapiere ***nöthig*** ist.

14.

Aber die Sparbank kann auch, um zu ihren Zinsen zu gelangen, noch auf eine Weise Geld ausleihen, die wohl noch eben so viel allgemeinen Nutzen gewähren dürfte, als der übrige Nutzen der Sparbank beträgt.

Nichts ist nemlich für Den welcher Schulden hat drückender, als ***ewige*** Zinsen, als die Bedingung, nachdem er vielleicht eine lange Reihe von Jahren die Zinsen richtig bezahlt hat, seine volle Schuld zurückzahlen zu müssen, verbunden mit der Gefahr, dafs ihm die Schuld unvorgesehen und vielleicht grade zu einer Zeit, wo er zur Rückzahlung am wenigsten im Stande ist, gekündigt werde. Schon von dieser Gefahr hat die Wirkung gar manchen Wohlstand vernichtet; und erfüllt sie sich auch nicht, so gelangt doch Niemand zur Ruhe, sondern lebt in beständiger Sorge, so lange er verschuldet ist, während sein verpfändeter Besitz immer nur einen ***Theil*** seines wirklichen Werths hat, der obendrein schwankend und zweifelhaft ist, weil es nicht von dem Besitzer allein abhangt, den günstigen Zeitpunct zum etwaigen Verkauf abzuwarten, sondern der Gläubiger ihn zu ungünstiger Zeit dazu zwingen kann, vielleicht um das Besitzthum für einen Preis, der ***unter*** seinem Werthe steht, an sich zu reifsen. Das ***allmälige*** Bezahlen von Schulden ist eben so wirksam und nothwendig, seine Umstände zu verbessern und zum wirklichen gründlichen Wohlstand zu gelangen, als das Sparen überhaupt.

Aber kein einzelner Geldbesitzer leiht auf die Bedingung ***allmäliger regelmäfsiger Abzahlung der Schuld in kleinen Theilen.*** Dem, welcher sich von seiner Schuld befreien will, bleibt also nichts übrig, als die Schuldsumme allmälig zusammenzusparen. Kann er zu dem Ende z. B. jährlich blofs 1 vom Hundert zurücklegen, so würde er die Schuld, ohne sonstige Hülfsmittel, erst in ***100 Jahren*** beisammen haben. Die Sparpapiere würden ihm zwar schon sehr sein Vorhaben erleichtern; denn legt er das 1 v. H. in Sparpapieren an, so hat er die Schuld nach (Beilage *C.* IV.) schon in ***45 Jahren*** beisammen. Aber die Sparbank vermag es, ihm sein Bemühen ***noch mehr*** zu erleichtern, während sie ihn zugleich fester an die Ausführung desselben hält und ihn der Gefahr der Angriffigkeit der Ersparnisse in eigener Verwahrung enthebt. Zahlt nemlich der Schuldner der Bank sein jährliches Ersparnifs von 1 v. H., und zwar mit $\frac{1}{2}$ v. H. halbjährlich, zu den gewöhnlichen Zinsen von 4 v. H. jährlich, mit welchen er jedenfalls mindestens belastet sein wird und zu welchen die Bank nach (§. 13.) ebenfalls Geld unter der Bedingung voller Rückzahlung ausleiht, ***hinzu,*** mithin zusammen 5 statt 4 v. H., welches immer

noch nicht viel mehr als ein wohl schon gewöhnlicher Zinsfufs ist: so erklärt ihn die Bank schon ***nach 41 Jahren*** für ***schuldenfrei*** und erläfst ihm noch an der letzten halbjährlichen Zahlung $1\frac{4}{5}$ v. H.; wie es die anliegende ***Tafel II.*** angiebt, die nach (Beilage ***D.*** VI. Formel 25.) berechnet ist. Kann Jemand ***mehr*** sparen und zahlt der Bank statt der gewöhnlichen jährlichen 4. v. H. nicht 5 sondern $5\frac{1}{2}$ v. H., so wird er zufolge der Tafel schon nach 33 Jahren schuldenfrei, durch 6 v. H. nach 28, durch $6\frac{1}{2}$ v. H. nach $24\frac{1}{2}$, durch 7 v. H. nach $21\frac{1}{2}$, durch $7\frac{1}{2}$ v. H. nach $19\frac{1}{2}$ und durch 8 v. H. schon in $17\frac{1}{2}$ Jahren; jedesmal noch mit einem kleinen Erlafs an der letzten halbjährlichen Zahlung.

Aber noch ein zweiter Umstand bei dieser Art des Ausleihens ist für den Schuldner, und zugleich für die Bank selbst, günstig. Der Schuldner ist nemlich durchaus nicht ***gezwungen,*** die regelmäfsige Zahlung der erhöheten Zinsen, die ihn nach einer bestimmten Reihe von Jahren schuldenfrei machen, ***bis zum Ende fortzusetzen.*** Er kann damit entweder unfreiwillig, oder auch freiwillig und ***wann er will,*** nach halbjährlich vorheriger Kündigung aufhören, zahlt aber alsdann keinesweges mehr die ***ganze*** Schuld zurück, sondern nur noch ***den Theil*** derselben, welcher durch die Erhöhung der Zinsen noch nicht abgetragen ist; wobei ihm natürlich die Zinsen, so wie der zurückzuzahlende Theil der Schuld bis zu dem Zeitpuncte berechnet werden müssen, wo die Rückzahlung ***wirklich*** erfolgt; was sich bei unfreiwilligem Aufhören der Zinszahlung durch die etwaige Beschlagnahme des Pfandes und den Verkauf desselben verschieben kann.

Aus der Tafel II. ist der Betrag der in solchen Fällen von der Schuld noch zurückzuzahlenden Theile für die verschiedenen Ablösungszeiten und für jedes halbe Jahr innerhalb derselben ersichtlich. Zahlt z. B. Jemand 5, also halbjährlich $2\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen, durch welche er in 41 Jahren schuldenfrei wird, hört aber mit der regelmäfsigen Zahlung nach 20 Jahren auf: so hat er von der Schuld selbst, statt des Ganzen, nur noch etwa 70 v. H. zurückzuzahlen; nach 30 Jahren nur noch etwa 25 v. H. Zahlt Jemand 7, also halbjährlich $3\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen, welche ihn in $21\frac{1}{2}$ Jahren schuldenfrei machen, hört aber mit der regelmäfsigen Zahlung nach 13 Jahren auf: so hat er nicht mehr ganz die Hälfte der Schuld zurückzugeben u. s. w. Da aber, wie es die Tafel ausweiset, die ***Schnelligkeit*** der Tilgung der Schuld vom Anfange an bis zum Ende der Tilgungszeit immerfort ***zunimmt,*** so ist dies ein Antrieb mehr für den Schuldner, die regelmäfsige Zinszahlung ***nicht*** zu unterbrechen, sondern sie, wenn er es irgend vermag, bis zum Ende fortzusetzen. Die Unterbrechung

ist nur ein Nothbehelf für Den, der durch seine Umstände dazu gezwungen ist; und Dieser ist dann noch möglichst dadurch erleichtert, dafs er nur noch einen ***Theil*** der Schuld zurückzugeben hat. Doch auch noch anders kann sich der Schuldner in solchem Falle helfen. Hat z. B. in dem zuletzt angenommenen Falle Jemand 13 Jahre lang 7 v. H. jährliche Zinsen bezahlt und dadurch *die **Hälfte*** seiner Schuld getilgt, so kündige er den Rest und bezahle denselben aus einer gleichzeitigen ***neuen*** Anleihe dieser ***Hälfte,*** und zwar auf das *halbe* Pfand; denn die eine Hälfte ist frei geworden und er kann darüber anders verfügen. Also, statt ferner 7 v. H. für die *ganze* Schuld noch $8\frac{1}{2}$ Jahre lang zu zahlen, wie er es Anfangs wollte, zahlt er jetzt, nachdem ihm Dies zu schwer wurde, ***halb so viel,*** nemlich 7 v. H. für die *halbe* Schuld, ferner $21\frac{1}{2}$ Jahre lang. U. s. w.

Für die Bank aber ist der Umstand, dafs ihr nie die *ganze* Schuld zurückzuerstatten ist, dadurch günstig, dafs die ***Sicherheit*** des Pfandes für sie jedes halbe Jahr *zunimmt.* Eine billige Bedingung ist es nemlich, dafs die Bank über das Pfand durchaus bis zur gänzlichen Tilgung der Schuld die Hand zu halten habe; und da nun die Schuld jedes halbe Jahr ***abnimmt,*** so wird das Pfand für den Gläubiger immerfort in demselben Verhältnifs um so *sicherer.*

Zu bemerken ist hier übrigens noch, dafs die Bank, um vorausgesetztermaafsen die gewöhnlichen Zinsen von 2 v. H. halbjährig aus den erhöheten ***Zinsen*** zu gewinnen und durch die Aufhäufung derselben die Anleihe *allmälig* sich zurückzahlen zu lassen, keinesweges etwa darauf beschränkt ist, die *erhöheten **Zinsen*** auf die *gewöhnliche* Weise, nemlich unter der Bedingung der vollen Rückzahlung, zu 2 v. H. halbjährlich, auszuleihen, oder auch die *erhöheten **Zinsen*** in Staatsschuldscheinen oder in andern Papieren anzulegen. Sie kann vielmehr auch ebensowohl wieder die *erhöheten **Zinsen*** auf *dieselbe* Bedingung *allmäliger* Zurückzahlung durch *erhöhete* Zinsen austhun, wie die erste Anleihe selbst. Die Wirkung davon ist, wie es (Beilage ***D.*** VII.) bemerklich macht, für die Bank *dieselbe.* Also kann sie, wenn sich die Gelegenheiten dazu ergeben, sogar ***Alles*** was sie einnimmt auf allmälige Zurückzahlung gegen erhöhete Zinsen ausleihen.

15.

Es ist leicht zu erachten, welchen wichtigen und grofsen Erfolg *diese* Art des Geld-Ausleihens von Seiten der Sparbank auf den ***verschuldeten Besitz,*** so wie auch auf die ***Ablösung von Renten,*** also auf die Hebung des

allgemeinen Wohlstandes haben könnte und ohne Zweifel haben würde. Einige Beispiele werden es zeigen.

A. Ist z. B. Jemandes Besitz bis zur ***Hälfte*** verschuldet, so kann er diese Hälfte von der Bank leihen, kann damit die Schuld abtragen, oder vielmehr durch die Bank sie abtragen lassen, zahlt dieser die erhöheten Zinsen, die öfters nur wenig höher sein werden, als die, mit welchen er unter der Bedingung der Rückgabe der ganzen Schuld und unter der beständigen Gefahr der Kündigung belastet war: so macht er sich nach einer gewissen Reihe von Jahren ***schuldenfrei.***

B. Sind auf Jemandes Besitz mehrere Schulden, zur ersten, zweiten, dritten u. s. w. Stelle, zusammen wohl fast bis zum ***ganzen*** Werth der Besitzung eingetragen, so kann der Verschuldete den bis zur ***Hälfte*** reichenden Theil derjenigen Schulden, die durch die Eintragung den ***Vorrang*** haben, von der Bank übernehmen lassen und von diesem Theile der Schuld auf die obige Weise in einer bestimmten Reihe von Jahren sich befreien. Aber schon ***vor*** dieser Zeit, ja schon gleich vom Anfang an, und allmälig immer mehr, wächst die Sicherheit auch für die ***hinterstehenden*** Gläubiger; denn die Schuld an die Bank nimmt immerfort ab und folglich der Werth des Pfandes auch für die ***übrigen*** Gläubiger zu, und es wird also dem Schuldner vielleicht schon nach einigen Jahren gelingen, für den ***übrigen*** Theil seiner Schuld bessere Bedingungen zu erlangen; vielleicht sogar Das, was er der Bank an höheren Zinsen für die erste Hälfte des Werths seiner Besitzung zu zahlen hat, an den Zinsen für den übrigen Theil seiner Schuld mehr oder weniger zu ersparen.

C. Auch kann Jemand, dessen Besitz ***nicht über die Hälfte*** verschuldet ist, seine Umstände dadurch ***verbessern,*** dafs er seinen Besitz durch eine von der Bank geliehene Summe ***erweitert,*** oder ***verbessert.*** Die Bank leiht ihm nemlich ***so viel, als an dem Besitz sein eigen ist.*** Damit bezahlt er seine bisherigen Schulden, und für das von der Anleihe Übrigbleibende kann er einen neuen Besitz kaufen, oder auch seinen bisherigen Besitz auf eine Weise verbessern, von welcher erweislich ist, dafs die Verbesserung den Werth des Besitzes um eine wenigstens gleiche Summe erhöhen werde. Die Bank behält dabei die ***volle*** Sicherheit. Gesetzt z. B. der Werth von Jemandes Besitzung sei 10 Tausend Thaler und er sei darauf 3 Tausend Thaler schuldig, so kann er 7 Tausend Thaler von der Bank entleihen. Aus diesen 7 Tausend Thalern bezahlt er seine Schuld von 3 Tausend Thalern und kauft

eine neue Besitzung für 4 Tausend Thaler, oder verbessert die seinige um eben so viel. Der Werth seiner Besitzungen steigt dadurch auf 14 Tausend Thaler, und die Bank ist für ihre 7 Tausend Thaler durch den *doppelten* Werth gedeckt.

D. Die Erweiterung oder Verbesserung des Besitzes ist sogar auch dann noch möglich, wenn der Besitz *über* die Hälfte verschuldet ist; aber dann freilich nur mit Einwilligung der übrigen Gläubiger. Gesetzt z. B. in in dem obigen Falle seien auf den 10 Tausend Thaler werthen Besitz, aufser den 3 Tausend Thalern zur ersten Stelle, zur zweiten und dritten Stelle noch 5 Tausend Thaler eingetragen, so kann der Besitzer zwar ebenfalls noch 7 Tausend Thaler von der Bank leihen, aber nur, wenn die andern Gläubiger einwilligen, dafs die Bank mit ihren ganzen 7 Tausend Thalern die *erste* Stelle einnehme. Dadurch stehen sie dann allerdings schlechter; denn bis dahin war der 10 Tausend Thaler werthe Besitz um 8 Tausend Thaler, also bis auf 80 v. H. verschuldet, jetzt würde es der 14 Tausend Thaler werthe Besitz um 12 Tausend Thaler, also bis auf 86 v. H. sein. Da indessen die Gläubiger in der zweiten und dritten Stelle zu erwägen haben, dafs die Schuld an die Bank fortwährend *abnimmt* und dafs auch sie dadurch bald zu mehrerer Sicherheit gelangen, als vorher, und allmälig zu immer gröfserer Sicherheit: so haben sie alle Ursach, ihre Einwilligung *nicht* zu verweigern. Sobald nemlich die *gesammte* Schuld des Besitzers bis auf 80 v. H., also von 12 000 bis auf 11 200 Thaler abgenommen hat, mithin seine Schuld an die Bank von 7000 bis auf 6200 Thaler, ist die ursprüngliche Sicherheit der hinterstehenden Gläubiger schon *hergestellt*. Dieses geschieht, nach Tafel II., falls der Schuldner der Bank 5 v. H. Zinsen zahlt, nach etwa $9\frac{1}{2}$ Jahren, wenn er $5\frac{1}{2}$ v. H. zahlt, nach etwa $6\frac{1}{2}$, wenn er 6 v. H. zahlt, nach etwa $5\frac{1}{2}$ Jahren u. s. w. Späterhin nimmt die Sicherheit der hinterstehenden Gläubiger, eben wie die der Bank, immer weiter zu. Wenn also der Besitzer nicht etwa nach der oben bezeichneten Art blofs die zur ersten Stelle schuldigen 3 Tausend Thaler von der Bank leihen *will* (wozu er der Einwilligung der übrigen Gläubiger nicht bedarf), etwa weil er zweifelt, aus dem Ertrage seines bisherigen Besitzes die höheren Zinsen der Anleihe aufbringen zu können, gleichwohl aber sicher weifs, es durch den vortheilhaften Ankauf einer zweiten Besitzung, oder durch die beabsichtigte Verbesserung seines bisherigen Eigenthums im Stande zu sein: so ist es in dem eignen Vortheil der hinterstehenden Gläubiger, ihn nicht daran zu hindern.

E. Hat Jemand an einen Andern eine *immerwährende* ***Rente*** zu bezahlen, die nach dem Gesetz mit dem 20fachen Betrage *ablöslich* ist, so kann er durch die Anleihe dieses Betrages bei der Bank diese *immerwährende* Rente ohne Weiteres in eine Rente auf *blofs* ***41 Jahre*** verwandeln. Hat z. B. ein Bauer dem Gutsherrn eine Rente von 10 Thalern jährlich zu bezahlen, so zahlt die Bank für ihn die Ablösungssumme von 200 Thalern an den Gutsherrn und tritt dafür in dessen Recht. Der Verpflichtete zahlt hierauf die Rente von 10 Thalern, statt an den Gutsherrn, an die Bank, und ist nach 41 Jahren davon befreit. Die Pfandsicherheit der Bank nimmt hiebei gegen die vorherige des Gutsherrn bis zu Ende immerfort zu, weil durch die allmälige Tilgung der Anleihe der Werth des Pfandes zunimmt.

So kann das Ausleihen von Geldern durch die Sparbank auf regelmäfsige allmälige Rückzahlung durch nur wenig höhere Zinsen für die Erleichterung und Verbesserung des verschuldeten oder mit Renten belasteten Besitzes auf die mannichfachste Weise von ungemein grofser Wirkung sein.

Damit diese Wirkung insbesondere dem mittleren und kleineren Besitze zu Gute komme, dürfte als Regel anzunehmen sein, dafs die Bank auf die eben beschriebene Weise an einen und denselben Besitzer immer nur *mäfsige* Summen ausleihe; z. B. nie mehr als 10 Tausend Thaler und von da bis zu 1 Tausend Thaler hinab, und noch weniger.

16.

Man sieht übrigens, dafs die verschiedenen, hier beschriebenen Verfahren, die Zinsen zu gewinnen, nur einer Bank möglich sind, die, wie es bei der Sparbank der Fall sein würde, ***grofse Summen*** unter Händen hat. Für geringere Kräfte würde dies Alles ohne Stockungen, nachtheilige Zersplitterungen und wesentliche Verluste nicht möglich sein. Hier, wo es nur eine einzige grofse Casse ist, die einnimmt und ausgiebt, kommt Alles nur auf eine genaue Buchführung an, während der Verwaltung die ***Wahl*** und Benutzung der vortheilhaftesten und erspriefslichsten Mittel zu Gebote steht.

17.

Es ist nun auch noch von einem andern Umstande die Wirkung auseinanderzusetzen, die mit der gröfsten Wahrscheinlichkeit und fast mit Gewifsheit einen neuen Vortheil und Nutzen der Sparbank zur Folge haben kann, dessen Maafs sich zwar nicht im Voraus berechnen läfst, der aber möglicherweise ***sehr*** bedeutend sein kann.

Es ist nemlich oben angenommen worden, dafs den Sparscheinen $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen als Ertrag berechnet werden sollen; wovon die Kosten der Verwaltung abgezogen werden.

Welches von den oben bezeichneten Verfahren nun aber die Sparbank auch anwenden mag, um von dem ihr überlieferten Gelde die Zinsen zu ziehen: immer erlangt sie ***mehr*** als $3\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen jährlich.

Kauft sie nemlich, nach der am nächsten liegenden Art, Staatsschuldscheine, so erzielt sie schon $3\frac{3}{4}$ v. H. wenn die Staatsschuldscheine 93,3 v. H. kosten, 4 v. H. wenn sie 87,5 v. H. kosten, $4\frac{1}{4}$ v. H. wenn sie 82,3 v. H., $4\frac{1}{2}$ v. H. wenn sie 77,7 v. H., $4\frac{3}{4}$ v. H. wenn sie 73,6 v. H. und 5 v. H. wenn sie 70 v. H. kosten. Und da nun der Preis der Staatsschuldscheine fast nie den *vollen* Nennwerth erreicht, so kann die Bank schon auf ***diesem*** Wege ***mehr*** erlangen, als sie für die Sparscheine und zu den Verwaltungskosten bedarf; denn diese nehmen ***zusammen*** nur Das weg, was mit $\boldsymbol{3\frac{1}{2}}$ ***v. H.*** durch Zins vom Zinse aufgehäuft wird.

Kauft die Bank, statt Staatsschuldscheine, andere sichere Papiere, wie z. B. Vorantheilsscheine (Prioritäts-Actien) einträglicher Eisenbahnen, deren meiste mit 4 v. H. des Nennwerths verzinset werden, so erlangt sie schon $4\frac{1}{4}$ v. H., wenn dergleichen Scheine für 94,1 v. H. zu haben sind, $4\frac{1}{2}$ v. H. wenn sie 88,8 gelten, $4\frac{3}{4}$ v. H. wenn sie 84,2 v. H. und 5 v. H. wenn sie 80 v. H. kosten. Durch Papiere, welche $4\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen tragen, erlangt sie $4\frac{3}{4}$ v. H. wenn die Papiere für 94,7 v. H. und 5. v. H. wenn sie für 90 v. H. zu haben sind; durch Papiere endlich, welche mit 5 v. H. verzinset werden, diesen Zins, wenn ihr Preis ihrem Nennwerth gleich ist.

Leiht die Bank baares Geld auf werthfeste und sichere Pfänder aus, auf Äcker, Grundstücke u. s. w., und zwar zunächst auf die gewöhnliche Weise, unter der Bedingung der Rückzahlung der vollen Anleihe, so geschieht es zu 4 v. H. jährlicher Zinsen. Eben dieser Zinsfufs ist auch oben für das Ausleihen auf Tilgung oder *allmälige* Zurückzahlung der Anleihe mittels erhöheter Zinsen angenommen.

Immer also wird die Bank ***mehr*** als $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen zu erzielen im Stande sein. Nun ist aber der Unterschied ***sehr*** bedeutend, wenn längere Zeit Zins auf Zins nach einem auch nur um ***Etwas*** höheren Zinsfufs aufgehäuft wird. Es ergeben sich nemlich aus ***1 Million Thaler*** durch Anhäufung von halbjährlich zahlbarem Zinse von Zinsen nach (Beilage ***A.*** III.) in 22 Jahren durch $3\frac{3}{4}$ v. H. 119085, durch 4 v. H. 244622, durch $4\frac{1}{4}$ v. H.

376 953, durch $4\frac{1}{2}$ v. H. 516 435, durch $4\frac{3}{4}$ v. H. 663 444, durch 5. v. H. 818 367 Thaler ***mehr*** als durch $3\frac{1}{2}$ v. H. Von den vorausgesetztermaafsen in Umlauf zu bringenden 10 Millionen Thaler Sparscheinen kann also die Bank ***möglicherweise*** in 22 Jahren einen ***reinen Gewinn*** von ***1 bis zu 8 Millionen Thalern*** erzielt haben. Da ihr nun, wenn auch der Preis der Staatsschuldscheine über $87\frac{1}{2}$ v. H. und der Preis der Vorantheilsscheine auf Eisenbahnen über ihren Nennwerth gestiegen sein sollte, durch Ausleihen auf Pfänder immer noch 4 v. H. jährliche Zinsen zu erlangen möglich sind, indem Jeder gern diesen Zinsfufs für eine Anleihe auf Grundstücke zahlen wird: so ist es fast *gewifs*, dafs die Bank durch die 10 Mill. Sparscheine, nachdem sie 22 Jahre in Umlauf gewesen sind, ***wenigstens*** 2 446 220 Thaler ***rein gewonnen*** haben wird. Es kommt nur darauf an, dafs der Gewinn der Bank ***nicht zu früh*** angegriffen wird, weil er sich, je länger, je ***schneller*** vergröfsert. Z. B. in 10 Jahren werden durch 4 v. H. jährliche Zinsen aus 1 Mill. Thlr. nach Beilage (***A.*** II.) gegen $3\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen erst 71 159 Thlr. gewonnen, statt der obigen 244 622 Thlr. in 22 Jahren. Will man etwa den Gewinn der Bank, den sie durch 4 v. H. Zinsen erzielt, etwa schon 22 Jahre nach der Ausgabe der ***ersten*** Sparscheine benutzen, so sind auch die obigen 2 446 220 Thlr. noch nicht ganz beisammen, weil dann von der zuletzt ausgegebenen Million erst ***17 Jahr*** lang die Zinsen aufgehäuft worden sind; indessen beträgt der Gewinn dennoch schon, wie es die Berechnung (in Beilage ***A.*** V.) ergiebt, 2 030 617 Thaler.

Es ist also fast mit ***Gewifsheit*** anzunehmen, dafs die Bank, 22 Jahre nach der ersten Ausgabe von Sparscheinen, einen reinen Gewinn von ***wenigstens 2 Mill. Thalern*** erzielt haben werde. Gelingt es ihr, für das baare Geld höhere Zinsen als 4 v. H. jährlich zu erlangen, was, wenn der niedrige Preis der Geldpapiere fortwährt, sehr möglich ist, so kann der Gewinn nach 22 Jahren auf 3, 4, 5, 6 und bis über 7 Mill. Thaler steigen; oder auch, umgekehrt, können 2 Mill. Thaler Gewinn ***viel eher*** als in 22 Jahren beisammen sein. Die 2 Mill. Thaler Gewinn nach 22 Jahren sind aber beinahe ***sicher;*** selbst mit Rücksicht auf etwaige Verluste durch Kauf und Wiederverkauf von Zinspapieren, durch ausbleibende Zinsen u. s. w.; die indessen unter einer einsichtigen und vorsichtigen Verwaltung immer nur gering sein können.

18.

Es fragt sich nun, wie dieser ***Gewinn*** der Bank am erspriefslichsten und fruchtbringendsten für das Gemeinwohl und besonders für die Aufhülfe

des kleineren Besitzes und für die Verminderung der Armuth, was der Hauptzweck der Sparbank ist, zu ***verwenden*** sei. Es würde dazu verschiedene Mittel geben.

Erstlich könnte der Gewinn zur Hülfe bei der ***Tilgung der Staatsschuld*** verwendet werden. Diese Anwendung würde allerdings auch der Armuth zu Gute kommen, weil durch die Tilgung der Staatsschuld die ***Steuern*** vermindert werden. Aber einestheils ist es eben nichts sehr Wirksames, wenn in ***22 Jahren*** 2 Mill. Thaler von der Staatsschuld mehr getilgt werden: andrerseits kommt die Wirkung der Tilgung nicht den Armen und wenig Besitzenden *insbesondere* zu gut. Diese Anwendung dürfte also noch nicht die beste und wenigstens dem ***besondern*** Zweck der Sparbank nicht gemäfs sein.

Zweitens könnte der Gewinn zu ***gemeinnützigen Werken und Landesverbesserungen*** angewendet werden. Diese Anwendung würde schon unmittelbarer auf die Förderung des Gemeinwohls wirken; allein auch hier sind 2 Mill. Thaler in 22 Jahren nicht eben etwas Bedeutendes; auch kommt wieder der Nutzen nicht *insbesondere* den Armen zu gut, während doch der Gewinn, der ***vorzüglich*** aus den Ersparnissen der Ärmern erzielt wird, billigerweise auch vorzüglich diesen zu Theil werden mufs. Also auch diese Anwendung würde nicht die beste sein.

Drittens könnte man von dem Gewinne der Bank die fortdauernden Zinsen zur ***Unterstützung hülfsloser Arbeits-Unfähiger*** bestimmen. Mit den 80000 Thlr. jährlichen Zinsen von 2 Mill. Thalern zu 4 v. H. würde für immer über 1000 hülflosen Personen, und sogar Familien, geholfen werden; und so würde allerdings *dieser* Nutzen der Bank recht ausschliefslich den Armen und Ärmsten zu gute kommen. Allein gegen diese Art der Verwendung sind die Bedenken dieselben, wie gegen alle Almosen von Seiten des Staats; und dann: so schön es ist, 1000 Hülfslose zu erleichtern und zu erhalten, so ist doch die Wirkung, erst jede 22 Jahre erzielt, nicht eben grofs.

Viertens könnte man den Gewinn der Bank auf ***die Sparscheine selbst, nach Verhältnifs ihres Nennwerths*** vertheilen. Gegen die Richtigkeit dieser Anwendung, die in der That auch die natürlichste zu sein scheint, dürfte an sich wenig zu sagen sein; aber 2 Mill. sind von den 20 Mill. Thalern, welche die ausgegebenen 10 Mill. Thlr. Sparscheine nach 22 Jahren werth sind, nur der 10te Theil: und ob der Thaler, den der Arme 22 Jahre zurückgelegt hat, zuletzt 2 Thaler, oder 6 Silbergroschen mehr werth ist, wird selbst ihm ziemlich gleichgültig sein.

Fünftens. Das Beste von Allem dürfte es sein, den Gewinn der Bank

unter die Sparenden nach der Entscheidung des Glücks oder Zufalls, also ***durch ein Lotto*** auszutheilen; und zwar jedesmal, sobald 2 Mill. Thaler Gewinn erzielt sind; mag dies früher oder später als in 22 Jahren der Fall sein. Dieses Lotto könnte auf folgende Weise angeordnet werden.

Man mache aus den 10 Mill. Thaler Sparscheinen 200 000 Loose, jedes zu 50 Thaler. Jeder Funfzigthalerschein bekommt dann eine der fortlaufenden Zahlen 1 bis 200 000; jeder Fünfthalerschein ebenfalls eine dieser Zahlen, mit grofsgedruckten Ziffern oben in der Ecke links, in der andern Ecke rechts, kleiner gedruckt, eine der Zahlen 1 bis 10; jeder Einthalerschein gleichfalls eine der Zahlen 1 bis 200 000, grofsgedruckt links und eine der Zahlen 1 bis 50 kleingedruckt rechts.

Aus den Zahlen 1 bis 200 000 ziehe man nun 50 000 Zahlen heraus und für diese folgende Gewinne:

1	Gewinn	zu	.	.	.	.	.	.	100 000	Thaler.
2	Gewinne	zu	50 000	Thaler,		thut			100 000	– –
5	–	–	20 000	–	–	–			100 000	– –
12	–	–	10 000	–	–	–			120 000	– –
30	–	–	5000	–	–	–			150 000	– –
50	–	–	2000	–	–	–			100 000	– –
150	–	–	1000	–	–	–			150 000	– –
250	–	–	500	–	–	–			125 000	– –
500	–	–	200	–	–	–			100 000	– –
1000	–	–	100	–	–	–			100 000	– –
9375	–	–	50	–	–	–			468 750	– –
38 625	–	–	10	–	–	–			386 250	– –
Thut 50 000	Gewinne	zusammen	von	.	.				2 000 000	Thaler.

Fällt ein Gewinn auf die Zahl eines Funfzigthalerscheins, so bekommt der Besitzer desselben den Gewinn ganz; fällt er auf die ***Hauptzahl*** eines Fünfthalerscheins, so wird der Gewinn auf die Inhaber der 10 Fünfthalerscheine, welche die *gleiche* Hauptzahl haben, zu gleichen Theilen vertheilt. Fällt der Gewinn auf die Hauptzahl eines Einthalerscheins, so würde er ähnlicherweise auf die 50 Einthalerscheine mit *gleicher* Hauptzahl vertheilt werden müssen. Um aber hier die kleinsten Gewinne nicht zu sehr zu zersplittern, ziehe man ***für die Einthalerscheine*** ein für allemal 10 Zahlen aus den Zahlen 1 bis 50 heraus und vertheile die 38 625 kleinsten Gewinne nur auf die-

jenigen Thalerscheine, welche rechts in der Ecke diese 10 herausgezogenen Zahlen haben. Dadurch werden die gewinnenden Thalerscheine den Fünfthalerscheinen für die kleinsten Gewinne gleich. Alle übrigen gröfsern Gewinne vertheile man ***auch an die Einthalerscheine*** zu 50 gleichen Theilen. Der geringste Gewinn für einen gewinnenden Einthalerschein ist dann 1 Thaler, der gröfste 2000 Thlr. Für einen gewinnenden Fünfthalerschein ist der geringste Gewinn ebenfalls 1 Thaler, der gröfste 10 000 Thlr. Für einen gewinnenden Funfzigthalerschein ist der geringste Gewinn 10 Thlr. der gröfste 100 000 Thaler.

Es könnte scheinen, dafs dieses Lotto nur verhältnifsmäfsig wenigen Besitzern von Sparscheinen eine Aussicht auf Gewinn geben würde, da nur der vierte Theil der Loose Gewinne erzielt. Aber die 50 000 gewinnenden Loose werden sich bei weitem nicht in den Händen von blofs 50 000 verschiedenen Personen befinden, sondern in den Händen einer viel gröfseren Zahl. Nach der Annahme weiter oben sind nemlich von den ausgegebenen 10 Mill. Thaler Sparscheinen 2 Mill. in 40 000 Funfzigthalerscheine, 3 Mill. Thaler in 600 000 Fünfthalerscheine und die übrigen 5 Mill. in 5 Mill. Einthalerscheine vertheilt. Es können also die Funfzigthalerscheine unter 40 000 Personen, die übrigen Scheine über 8 Mill. Thaler aber leicht auf 400 000 und mehr Personen sich vertheilt haben; denn jeder derselben würde dann schon im Durchschnitt 20 Thaler besitzen. Fallen nun von den Gewinnen verhältnifsmäfsig 10 000 auf die Funfzigthalerscheine und die übrigen 40 000, die in 400 000 Theile zerfallen, auf die Fünf- und Einthalerscheine, so gehen nur 30 000 Besitzer von Funfzigthalerscheinen (insofern sie ***nur*** solche und keine andere Scheine mehr besitzen) leer aus, und es ist, wenn auch nicht nothwendig, so doch ***möglich***, dafs sogar ***alle*** Besitzer von Sparscheinen ***irgend einen*** Gewinn erzielen.

Die Bedenken gegen Lotto's überhaupt, finden hier nicht Statt. Das gewöhnliche Lotto nemlich ist ***sachlich*** dadurch nachtheilig, dafs der Spieler eine, vielleicht für seine Umstände sehr bedeutende Ausgabe auf die Gefahr hin macht, Nichts zurückzubekommen: ***sittlich*** dadurch, dafs es den Spieler verlockt, Erworbenes hinzugeben, um aufs Ungewisse vom Zufall vielleicht Das zu erlangen, was er durch fernern Erwerb ohne jenes Wagnifs zu erzielen suchen sollte, also ihn verlockt, in der Erwerbsthätigkeit nachzulassen. Wer dagegen Sparscheine kauft, macht ***nicht*** eine Ausgabe aufs ***Ungewisse*** und auf die Gefahr hin, seine Einlage zu ***verlieren***, sondern ist schon durch

den steigenden Werth der Scheine eines annehmlichen Gewinnes *sicher*. Was ihm dann das Glück noch zuführt, ist eine reine Zugabe, ohne alle neue Einlage.

Dagegen wird die Möglichkeit und Aussicht, mit einem einzigen Thaler, *aufser* den 2 Thalern, zu welchen der Thaler nach 22 Jahren *mit Sicherheit* wird, noch bis zu 2000 Thalern obendrein zu gewinnen, ein *gar mächtiger* Antrieb sein, Sparscheine zu kaufen und sie an sich zu behalten, also ein gar mächtiger Antrieb zum Sparen selbst; und dieser Antrieb kann gar nicht stark genug sein; denn er ist der Antrieb zu etwas, jedenfalls sachlich und sittlich ***Nützlichem.*** Der Antrieb beim gewöhnlichen Lotto, zu gewinnen, kann durch die Einsätze den Spieler arm machen und ins Verderben bringen: durch eifriges Sparen dagegen schadet sich Niemand, sondern verbessert nur seine Umstände. Die ***Hoffnung*** auf Gewinn, welche immerhin auch beim gewöhnlichen Lotto ihren Werth hat, findet auch hier Statt und hat hier den gleichen Werth.

Diesemnach dürfte die Vertheilung des Gewinnes der Bank an die Sparenden ***durch ein Lotto*** die ***beste*** Art der Anwendung dieses Gewinns sein.

19.

Jetzt haben wir nun noch die in (§. 6.) angedeuteten ***verschiedenen Bedenken*** gegen die Wirksamkeit der Sparbank zu erwägen, und es ist anzugeben, wie und durch welche, etwa noch ***zusätzlich*** nöthigen Bestimmungen den Befürchtungen, dafs die Bank wenigstens nicht alle ihre Zwecke erreichen werde, zu begegnen sein dürfte.

Die Bedenken sind folgende.

Erstlich die wenig besitzenden Sparer, welche sehr leicht in die Nothwendigkeit kommen können, ihre Sparscheine ganz oder theilweise wieder verkaufen zu müssen, was besonders bei denen der Fall sein wird, die irgend ein kleines Gewerbe treiben, in welchem öfters mehr als gewöhnliche Auslagen nöthig sind, dürften, läfst sich fürchten, bei dem Verkauf ihrer Papiere dem Wucher in die Hände fallen.

Die Befürchtung an sich ist schwerlich begründet. Denn eben so wenig wie jetzt Jemand jemals in den Fall kommt, für unverzinsliche Cassenscheine oder Banknoten weniger annehmen zu müssen, als ihren Nennwerth, wird es auch bei den Sparscheinen der Fall sein; denn auch sie sind, ganz wie jene, in vollem, freien Umlauf, der sich von dem Umlauf anderer ***verzinslicher,*** auf den Inhaber lautender Papiere dadurch ***wesentlich*** unterscheidet, dafs die Spar-

papiere bei Zahlungen an Staatscassen zum vollen Nennwerth angenommen werden; was bei allen andern, noch so sichern verzinslichen Papieren nicht der Fall ist.

Sollte indessen die Befürchtung durch die Erfahrung dennoch als begründet sich erweisen, z. B. aufserhalb der gröfseren Städte, wo der Geld-Umlauf weniger lebhaft ist, so wird ihr leicht durch die zusätzliche Anordnung begegnet werden können, dafs alle Staatscassen Sparscheine ***von einem und demselben Besitzer*** bis zu einem gewissen Betrage innerhalb einer bestimmten Zeitfrist, z. B. ***bis zu 100 Thaler im Laufe eines Jahres***, auch dann anzunehmen und voll baar zu bezahlen haben, wenn der Besitzer ***keine*** Zahlung an die Casse zu leisten hat. Der Wenigbesitzende, oder ein kleines Gewerbe Treibende kann dann für sein Ersparnifs bis zu der genannten Summe mit Sicherheit und ohne allen Verlust baar Geld bekommen; und zwar entweder die Summe auf einmal, oder auch theilweise. Es ist nichts weiter nöthig, als dafs der Besitzer sich der Casse ***nenne:*** demselben ***Namen*** löset dann die Casse innerhalb Jahresfrist nichts weiter ein. Zurückkaufen kann der Besitzer Sparscheine jederzeit; die Casse aber giebt die eingelöseten Scheine ohne Weiteres aus, sobald sich die Gelegenheit dazu findet, oder sobald sie Zahlungen zu machen hat. Die Einlösungspflicht der Cassen ***weiter*** auszudehnen wird nicht nöthig sein; aber auch nicht rathsam, damit sie nicht für gröfsere Summen und von Geldhändlern benutzt werde.

Zweitens könnte man fürchten, die Sparscheine dürften an die Börse kommen und dadurch einem schwankenden Preise verfallen.

Aber ***unter*** ihren Nennwerth können sie nicht fallen, weil auch Der, welcher etwa gröfsere Summen verkaufen will, oder mufs, statt daran zu verlieren, den Ausweg behält, von der Bank nach (§. 13.) auf seine Scheine als ***Pfand***, Geld zu 4 vom Hundert Zinsen zu ***leihen;*** wobei der Verlust jedenfalls nur gering ist, da dem Eigner der Scheine die aufgehäuften Zinsen derselben ***verbleiben*** und er also bei Abzahlung der Anleihe ***mehr*** zurückbekommt als er zum Pfande einlegte. Damit hier die Bank gesichert sei und dieser Ausweg wieder nicht etwa von den Geldhändlern benutzt werde, sondern nur den Sparenden zu Gute komme, müfste die Bank auf Scheine nur bis zu ***Zweidrittel*** ihres Nennwerths Geld leihen. Das übrige Eindrittheil deckt die Zinsen nebst dem Zinse von Zinsen auf mehr als 7 Jahre; und folglich, selbst wenn die Zinsen der Anleihe ansbleiben sollten, ist die Bank gesichert. Sobald das innebehaltene Drittel die etwa ausgebliebenen Zinsen erschöpft hat,

würden die Papiere der Bank verfallen. Die Bank müfste zur Bequemlichkeit der Theilnehmer ***Zweigbanken*** haben, etwa an den Hauptorten der Regierungsbezirke. Es können also die Sparpapiere zunächst zum ***Verkauf*** nicht an die Börse kommen.

Über den Nennwerth können die Sparpapiere ebenfalls nicht steigen; denn Niemand wird dafür ***mehr*** bezahlen, wenn er sie in den Staatscassen für den blofsen Nennwerth haben kann. Also auch zum ***Ankauf*** können die Sparscheine nicht an die Börse gelangen; und folglich sind sie überhaupt kein Gegenstand für dieselbe. Dem Geldhandel können in der That immer nur diejenigen verzinslichen Papiere anheimfallen, welche in den Staatscassen ***nicht*** zu ihrem vollen Nennwerth angenommen und von denselben eben so wieder ausgegeben werden; was bei den Sparpapieren der Fall ist.

Drittens könnte man fürchten, Diejenigen, welche stets eine bedeutende Summe bereit haben müssen, z. B. Geldhändler, Notare, Fabrikbesitzer u. s. w. würden die Sparpapiere an sich ziehen, um auch für die kurze Zeit, welche das Geld liegen bleiben mufs, die Zinsen nicht zu verlieren.

Aber für Diese grade am wenigsten würden sich die Sparpapiere eignen; denn beim Ausgeben würden sie nicht immer willige Nehmer finden, und durch beständiges Anleihen bei der Bank würden sie mehr Mühe und selbst Zinsen verlieren, als sie zu gewinnen hoffen; auch erlangen sie von den Sparpapieren nur dann erst einen ***Ertrag,*** wenn sie dieselben wenigstens ***ein halbes Jahr*** an sich behalten. Wäre es indessen wirklich auch anders, und die Genannten fänden bei den Sparscheinen dennoch ihren Vortheil, so würde dies, wie sich sogleich bei dem nächstfolgenden Einwande zeigen wird, für die Anordnung der Sparbank keinesweges ***nachtheilig,*** sondern vielmehr ***vortheilhaft*** und es würde nur zu ***wünschen*** sein, dafs die Summe, welche die Genannten etwa an sich ziehen, gröfser wäre, als sie es doch wahrscheinlich zusammen nur sein würde.

Viertens. Eine weitere Befürchtung ist, die Reichen möchten die Sparpapiere in Beschlag nehmen und den Ärmeren nichts davon übrig lassen.

Aber zunächst ist diese Befürchtung, rücksichtlich aller Derer, welche von ihren Renten leben, unrichtig: aus dem einfachen Grunde, dafs die Rentner nicht ihren ***Vortheil*** dabei finden, sondern sich selbst schaden würden. Wenn nemlich Jemand aus seinem Geldbesitze durch Sparpapiere seine Renten ziehen wollte, so könnte er es, da die Zinsen der Sparpapiere nicht ausgezahlt, sondern zu der Stammsumme geschlagen werden, nur auf die Weise

thun, dafs er von den erkauften Papieren halbjährlich den den verlangten Zinsen gleichen ***Theil*** wieder verkaufte; wobei er dann natürlich so zu rechnen hätte, dafs nach einer bestimmten Reihe von Jahren der unterdefs ***gestiegene*** Werth desjenigen ***Theils*** der Sparscheine, die er noch übrig behalten hat, noch ***eben so viel*** beträgt, als die Anfangs für ***sämmtliche*** Papiere bezahlte Summe; denn sonst würde er an seinem Vermögen ***verloren*** haben. Nun zeigen die Berechnungen in (*E.* II. der Beilagen), dafs auf diese Weise Der, welcher die Rente 5 Jahre lang ziehen will, halbjährlich nur etwa 1,515 vom Hundert, wer sie 10 Jahre lang ziehen will 1,531, 15 Jahre lang 1,555 und 22 Jahre lang 1,559 v. H. halbjährliche Zinsen aus den Sparpapieren erlangen ***kann***, und zwar wenn er ***ursprünglich*** ausgegebene Sparpapiere kauft, um den nöthigen Theil davon allmälig für ihren steigenden Werth zu verkaufen. Kauft man ***ältere*** Sparscheine, so ist das Ergebnifs etwas vortheilhafter. Zum Beispiel, wer von 17 Jahr alten Sparpapieren 5 Jahre lang den verhältnifsmäfsigen Theil verkauft, kann dadurch 1,578 v. H. halbjährliche Zinsen erzielen; aber doch immer nicht viel mehr als 3 v. H. jährlich; überhaupt offenbar ***nie*** volle $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen, weil es an sich selbst nicht möglich ist, dafs die Sparscheine ein Mehreres abwerfen, als die $3\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen, welche ihnen berechnet werden, von welchen aber noch die Kosten der Verwaltung abgehen. Aber Niemand wird warlich mit noch nicht $3\frac{1}{2}$ v. H. jährlichen Zinsen vorlieb nehmen, wenn er durch eben so sichere Geldpapiere, z. B. jedenfalls durch Eisenbahn-Vorantheilsscheine, und selbst durch Staatsschuldscheine, so lange sie nicht ihren vollen Nennwerth kosten, ***4 v. H. und mehr*** erlangen kann. Mithin werden im Allgemeinen ***zuverläfsig*** Rentner und Reiche keinesweges ***vorzugsweise*** Sparscheine kaufen, sondern ihr Geld anders und einträglicher benutzen. Es könnte allerdings hie und da einen Reichen, der die Zinsen zur Stammsumme schlagen ***will,*** z. B. um seinen Erben eine durch Zinsen aufgehäufte Summe zu hinterlassen, angenehm sein, dafs die Sparcasse es statt seiner thue, und es könnte also sein, dafs so auch gröfsere Summen in Sparscheinen angelegt würden. Aber mag dies, auch in bedeutendem Maafse, wirklich so sein, so spricht die Befürchtung, dafs überhaupt Reiche bedeutende Summen von Sparscheinen in Beschlag nehmen möchten, gar nicht ***gegen*** die Anordnung der Sparbank, sondern vielmehr grade ***für*** dieselbe, und es wäre sogar sehr zu ***wünschen,*** dafs Reiche ***recht viele*** Sparpapiere kaufen möchten; man dürfte dann nur, wenn sie z. B. die ganzen obigen 10 Millionen Thaler an sich nähmen, für die Ärmern noch einige neue Millionen

ausgeben. Denn je mehr Geld die Bank in die Hände bekommt, je mehr kann sie auf Äcker, Grundstücke u. s. w. in der in (§. 13.) beschriebenen Weise, nemlich auf ***allmälige*** Zurückzahlung durch erhöhte Zinsen, ausleihen; und diese ihre nützliche Wirkung ist, wie schon oben bemerkt, noch eben so grofs, als ihre übrige Wirkung; selbst, mittelbar, auch für die Armen. Denn wenn insbesondere dem Mittelstande aufgeholfen wird, so wird auch den Armen geholfen. Wird der Mittelstand zuletzt arm, so wird der Arme noch ärmer. So ist es denn auch oben (in Drittens), statt davon Nachtheil zu *fürchten*, vielmehr zu ***wünschen***, dafs auch grofse ***Geschäftsleute*** recht viele Sparpapiere kaufen möchten.

Fünftens könnte man vielleicht sagen: durch die Millionen Sparscheine würde die Masse der umlaufenden Papiere um eben so viele Millionen vermehrt, und die Überschwemmung des Landes mit Geldpapieren sei ein grofses Übel; welches Letztere auch ganz richtig ist.

Aber dieser Einwand ist ***übereilt*** und grade zu ***unrichtig.*** Die Masse der umlaufenden Geldpapiere wird durch die Sparscheine nicht um Einen Thaler vergröfsert. Kauft nemlich die Bank für das für die Sparscheine eingenommene Geld Staatsschuldscheine, so zieht sie dadurch grade eben so viel Papier aus dem Umlauf heraus, als sie durch ihre Scheine hineinbringt. Eben so verhält es sich, wenn sie Eisenbahnscheine oder andere zinstragende Papiere kauft. Leiht ***sie,*** statt dafs es einzelne Geldbesitzer thun, Geld auf werthfeste Pfänder, so tilgt sie dadurch eben so viele Schuldscheine der Schuldner; wobei aber der Schuldner den Vortheil hat, dafs er nicht mehr den Launen der einzelnen Gläubiger ausgesetzt, sondern dafs die Bank sein Gläubiger ist, die ihn niemals drängt, so lange er ihr richtig die Zinsen zahlt; so wie den zweiten Vortheil, dafs er durch um etwas erhöhete Zinsen seine Schuld ***allmälig*** tilgen kann. Die Sparbank ***vergröfsert keinesweges*** die Masse der umlaufenden Geldpapiere: sie thut, wie schon weiter oben bemerkt, nichts weiter, als einen Theil derselben gleichsam in ihre Scheine zu ***verwandeln;*** und zwar mit dem Vortheil für die ***Armen,*** dafs dadurch auch diesen der Genufs von ***Zinsen,*** die sonst nur den Geldbesitzern allein zu Gute kommen, zugänglich gemacht wird.

Der fünfte Einwand, wenn er etwa gemacht werden sollte, ist also völlig unrichtig.

Sechstens endlich, könnte man fürchten, die Sparbank würde ***im Kriege*** weniger sicher sein, als die gewöhnlichen Sparcassen, und sie würde dann

mit Anleihen auf Sparscheine, bis zu Zweidrittel ihres Nennwerths, für Summen in Anspruch genommen werden, welche sie nicht herbeizuschaffen vermag.

Hierauf ist zunächst zu bemerken, dafs auch die gewöhnlichen Sparcassen in der Regel den Einlegern nicht unbedingt baar Geld zurückgeben, sondern, sobald die Einlage eine gewisse Summe übersteigt, z. B. 25 Thlr., auf diese Summe lautende verzinsliche Papiere, an welchen die Besitzer sogar schon *im Frieden* Verluste haben können, deren Preis im Kriege aber gar tief fallen kann. Auch können die gewöhnlichen Sparcassen im Kriege leicht unfähig werden, alle Ansprüche an sie augenblicklich zu befriedigen, weil sie niemals und bei weitem nicht die *ganze* Einlage vorräthig halten können, sondern, um die Zinsen zu gewinnen, nothwendig den gröfsten Theil davon austhun müssen. In den gewöhnlichen Sparcassen können also die Einleger sogar schon im Frieden verlieren; anders wie in der Sparbank. Im Kriege aber sind sie wohl warlich nicht sicherer als eine grofse Bank, die unter unmittelbarer Aufsicht des Staats und der Volksvertretung steht. Das Übel trifft aber bei den gewöhnlichen Sparcassen insbesondere grade die Wenigerbesitzenden; denn mit gröfseren Summen gehen sie nicht um. Die Sparbank dagegen, wenn sie sich beim Ausleihen gehörig darauf vorbereitet, wird Jenen mit ihren grofsen Mitteln immer auch im Kriege noch gerecht werden und gegen sie die Verbindlichkeit erfüllen können, ihnen bis zu 100 Thalern ihre Papiere einzulösen. Denn man erinnere sich, dafs die Sparbank, aufser den Kosten ihrer Verwaltung, *gar keine verbindlichen* stehenden *Ausgaben* hat, sondern dafs ihr Geschäft blofs darin besteht, die Zinsen des für die Sparscheine eingenommenen Geldes einzuziehen und dieselben wieder auf Zinsen auszuleihen. Wenn sie also mit dem *Ausleihen* während des Krieges und schon vor demselben innehält, so kommt sie durch die eingenommenen *Zinsen* bald in den Besitz *bedeutender* baarer Mittel, um den Wenigerbesitzenden ihre Sparscheine bis zu 100 Thaler, wenn sie es verlangen, einzulösen; und auch wohl, um den Mehrbesitzenden Anleihen bis zu Zweidrittel des Nennwerths der Scheine zu gewähren. Wären z. B. die oben angenommenen 10 Millionen Thaler Sparscheine in Umlauf, so hat die Bank schon im Anfange des Umlaufs halbjährlich 200 000 Thaler, also jährlich 400 000 Thaler an *Zinsen* baar einzunehmen und, wenn sie schon eine Reihe von Jahren bestand, noch mehr; nach 22 Jahren sogar das Doppelte. Mit diesen Mitteln kann sie schon im Falle der Noth den Besitzern der Sparscheine bedeutend helfen. Freilich nur so lange, als die *Zinsen* der Sparbank nicht ausbleiben.

Aber dies geschieht denn doch bei den Staatsschuldscheinen und den Eisenbahn-Vorantheilsscheinen erst im *äufsersten* Fall; und in diesem Fall ist es auch um die Sicherheit und die Zahlungsfähigkeit der gewöhnlichen Sparcassen geschehen. Für Das, was die Bank auf Grundstücke ausgeliehen hat, kann sie, sobald die Zinsen ausbleiben, diese in Anspruch nehmen.

Aber es giebt noch ein anderes Mittel, die Sparbankscheine *im Kriege* in ihrem Werth zu erhalten und sie vor den Preisschwankungen und der Börse zu bewahren. Man darf nemlich nur Allen, welche an die Staatscassen Zahlungen zu machen haben, Das was in Friedenszeiten ihrem freien Willen überlassen ist, nemlich einen *Theil* der Zahlungen, statt baar, in Sparscheinen zu leisten, für Kriegeszeiten zur *Pflicht* machen (worüber sich auch warlich Niemand zu beschweren Ursach haben würde), dagegen die Ausgabe der Sparscheine, in so weit es für den Zweck nöthig sich zeigt, beschränken. Dann sind die Zahlungspflichtigen genöthigt, die Sparscheine aufzukaufen, und die Besitzer derselben, welche aus Besorgnifs sie zu verkaufen wünschen, finden dazu Gelegenheit, ohne zur Verschleuderung gezwungen zu sein. Die in die Staatscassen zurückfliefsenden Sparscheine geben dieselben, wenn sie zu sehr durch sie belästigt werden, wie immer, vollwerthig wieder aus; und da dies nicht grade an die Zahlungspflichtigen geschieht, so haben die Empfänger immer wieder Gelegenheit, die Scheine, wenn sie wollen, an Jene zum vollen Werth abzusetzen. Es kommt nur darauf an, die Sparscheine auch im Kriege so *im Umlauf* zu erhalten, dafs die jeweiligen Besitzer nichts daran verlieren; und dies würde durch die beschriebene Maafsregel erreicht werden. Dieses Mittel aber steht den gewöhnlichen Sparcassen durchaus nicht zu Gebot; und also hat die Sparbank *auch im Kriege* vor den gewöhnlichen Sparcassen einen entschiedenen und bedeutenden Vorzug, und bei weitem mehr Sicherheit als diese.

Da auf solche Weise alle obigen Einwände, welche etwa gegen die Sparbank gemacht werden möchten, entweder unbegründet sind, oder auf die angezeigte Weise gehoben werden können, andere Einwände aber, aus dem Gesichtspuncte des Gemeinwohls, wie es scheint, nicht weiter vorhanden sind: so wäre es, wegen des oben nachgewiesenen grofsen und mannichfachen Nutzens der beschriebenen Sparbank für das Gemeinwohl, und besonders für die Ärmeren und für die mittleren Classen, in der That sehr zu wünschen, dafs man darauf Rücksicht nähme und sie ins Leben brächte.

Beilagen zu der Abhandlung über Sparcassen.

Enthaltend die Formeln und Rechnungen, welche die Zahlen-Angaben in der Abhandlung begründen.

A.

I. Wenn z den halbjährigen Zins von 1 bezeichnet und der Zins immer wieder zu dem wachsenden Bestande c geschlagen wird, so wird dieser Bestand jedes halbe Jahr $1+z$ ***mal so grofs*** und beträgt also nach n halben Jahren:

$$1. \qquad c_n = (1+z)^n.$$

II. Dieses giebt für $z = 0{,}0175$, das heifst für $3\frac{1}{2}$ v. H. jährliche Zinsen, halbjährlich mit $1\frac{3}{4}$ v. H. zahlbar, und für $n = 20$,

$$2. \qquad c_{20} = 1{,}414778;$$

dagegen für $z = 0{,}02$ oder 4 v. H. jährliche Zinsen, mit 2 v. H. halbjährlich zahlbar, und für $n = 20$:

$$3. \qquad c_{20} = 1{,}485937;$$

so dafs also aus 1 Million Thaler in 10 Jahren durch 4 v. H. Zinsen $1\,485\,937 - 1\,414\,778 = 71\,159$ Thlr. mehr aufgehäuft werden, als durch $3\frac{1}{2}$ v. H. Zinsen; wie es in (§. 17.) angegeben ist.

III. Für eine 22 Jahre lang fortgesetzte Anhäufung von Zinsen von 1 Mill. Thaler finden sich für den jährlichen Zinsfufs von $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4, $4\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ und 5 v. H., mit der Hälfte davon halbjährlich zahlbar, also für $n = 44$ und der Reihe nach für $z = 0{,}0175$, 0,01875, 0,02, 0,02125, 0,0225, 0,02375 und 0,025 die ebenfalls in (§. 17.), dort etwas weiter oben angegebenen Zahlen.

Wenn man nach (1.) berechnet, was durch Anhäufung von 2 v. H. halbjährlichen Zins auf Zins die erste der ausgegebenen 10 Mill. Thaler in 22 Jahren, die zweite in $21\frac{1}{2}$ Jahren, die dritte in 21 Jahren u. s. w. einträgt, und davon (eben so berechnet) Das abzieht, was die Sparscheine wegnehmen, die zusammen mit den Verwaltungskosten, $1\frac{3}{4}$ v. H. halbjährliche Zinsen erfordern: so findet sich, dafs 22 Jahre nach Ausgabe der ***ersten*** Million Thaler ein Überschufs von 2 030 617 Thlr. bleibt; wie es (§. 17.) angiebt.

B.

I. Der steigende Werth der Sparscheine läfst sich auf zweierlei Art finden.

Erste Art. Von Dem, was der halbjährliche Zins z von 1 durch die Aufhäufung der Zinsen giebt, mufs jedes halbe Jahr ein ***gleich grofser*** Betrag zu den Kosten der Verwaltung abgezogen werden; von welchem anzunehmen ist, dafs er sich wie die Nennsumme der ausgegebenen Scheine verhalte. Dieser Betrag möge für die Nennsumme 1 durch k bezeichnet werden, der allmälig steigende Bestand der Casse aber durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$. Alsdann verhält es sich wie folgt.

Am Ende des Halbjahrs	Ist die Einnahme	Also der weiter zinstragende Bestand der Casse:
1 . . .	$z-k$	$\varepsilon_1 = 1+z-k$
2 . . .	$z(1+z-k)-k$ $= (1+z)(z-k)$	$\varepsilon_2 = 1+z-k+(1+z)(z-k)$ $= 1+\frac{(1+z)^2-1}{z}\cdot(z-k)$
3 . . .	$z\left[1+\frac{(1+z)^2-1}{z}(z-k)\right]-k$ $= (1+z)^3(z-k)$	$\varepsilon_3 = 1+\frac{(1+z)^2-1}{z}(z-k)+(1+z)^2(z-k)$ $= 1+\frac{(1+z)^3-1}{z}(z-k)$
4 . . .	$z\left[1+\frac{(1+z)^3-1}{z}(z-k)\right]-k$ $= (1+z)^3(z-k)$	$\varepsilon_4 = 1+\frac{(1+z)^3-1}{z}(z-k)+(1+z)^3(z-k)$ $= 1+\frac{(1+z)^4-1}{z}(z-k).$

Und so weiter.

Hieraus folgt, dafs für n halbe Jahre

$$4. \qquad \varepsilon_n = 1+\frac{(1+z)^n-1}{z}\cdot(z-k)$$

ist. Und dies ist der steigende Werth der Sparpapiere.

Zweite Art. Man stelle sich vor, die Casse ***lege*** die Kosten der Verwaltung halbjährlich mit k ***aus:*** so mufs sie aus Dem, was aus dem Zinse z in n halben Jahren aufgehäuft wird, folglich nach (1.) aus $c_n = (1+z)^n$, die gesammten ausgelegten Kosten, und zwar ebenfalls mit Zins vom Zinse, zurückerhalten. Für die Auslage k am Ende des ersten halben Jahres mufs sie also nach n halben Jahren nach (1.) $k(1+z)^{n-1}$, für die Auslage k am Ende des zweiten halben Jahres $k(1+z)^{n-2}$, für die Auslage k am Ende des dritten

halben Jahres $k(1+z)^{n-3}$ u. s. w. zurückerhalten, zusammen also am Ende von n halben Jahren:

$$5. \quad k[(1+z)^{n-1}+(1+z)^{n-2}+(1+z^{n-3}\ldots.+(1+z)^1+1] = k\cdot\frac{(1+z)^n-1}{(1+z)-1} = k\cdot\frac{(1+z)^n-1}{z}.$$

Diese Summe ist von der $c_n=(1+z)^n$, welche ***ohne*** Kosten der Verwaltung aufgehäuft werden würde, abzuziehen: was übrig bleibt, ist der steigende Werth ε_n der Sparscheine. Also ist

$$6. \quad \varepsilon_n = (1+z)^n-\frac{k}{z}((1+z)^n-1) = (1+z)^n-1-\frac{k}{z}((1+z)^n-1)+1 = 1+\frac{(1+z)^n-1}{z}\cdot(z-k);$$

ganz wie in (4.).

Nach der Formel (6. oder 4.) ist die zu (§. 10.) beigegebene Taf. I. für $n=1, 2, 3, \ldots.$ bis 45 berechnet.

II. Für $n=100$, 120 und 132, also für 50, 60 und 66 Jahre alte Sparscheine, giebt die Formel (4. oder 6.) nahe zu $\varepsilon_{100}=5$, $\varepsilon_{120}=7$ und $\varepsilon_{132}=8$; wie es (§. 11.) aussagt.

C.

I. Wer jedes halbe Jahr 1 in Sparscheinen zurücklegt, hat nach n halben Jahren einen Geldwerth E in Sparscheinen von

$$7. \quad E = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\ldots.+\varepsilon_n$$

beisammen. Dieses giebt, da zufolge (4. und 6.)

$$8. \quad \varepsilon_n = 1+((1+z)^n-1)\left(1-\frac{k}{z}\right) = 1+(1+z)^n\left(1-\frac{k}{z}\right)-1+\frac{k}{z} = \frac{k}{z}+\left(1-\frac{k}{z}\right)(1+z)^n \text{ ist:}$$

$$E = \frac{nk}{z}+\left(1-\frac{k}{z}\right)[(1+z)^n+(1+z)^{n-1}+(1+z)^{n-2}\ldots.+(1+z)^1]$$

oder

$$9. \quad E = \frac{nk}{z}+\left(1-\frac{k}{z}\right)(1+z)\frac{(1+z)^n-1}{z} = \frac{nk}{z}+\left(1-\frac{k}{z}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)((1+z)^n-1).$$

II. Da in (§. 10.) $k=\frac{1}{4}$ v. H. und $z=1\frac{3}{4}$ v. H. gesetzt worden ist, so ist

$$10. \quad \frac{k}{z}=\frac{1}{7} \text{ und } \frac{1}{z}=\frac{100}{1\frac{3}{4}}=\frac{400}{7}, \quad 1-\frac{k}{z}=\frac{6}{7};$$

also ist nach (9.)

$$E = \tfrac{1}{7}n + \frac{6}{7}\cdot\frac{407}{7}(1{,}0175^n - 1) \text{ oder}$$

$$11. \quad E = \tfrac{1}{7}n + 49{,}8367\,(1{,}0175^n - 1).$$

III. Dies giebt für $n = 37$, 60, 80, 100 und 120: $E = 50{,}143$; 99,866; 161,257; 246,931 und 366,957; so dafs durch halbjährliches Zurücklegen von 1 Thaler Sparscheinen, $18\frac{1}{2}$, 30, 40, 50 und 60 Jahre lang; nahebei 50, 100, 161, 247 und 367 Thaler aufgehäuft werden; wie es in (§. 11. *B.*) angegeben ist.

IV. Für $n = 90$ giebt (11.) $E = 200{,}511$; so dafs also Jemand, der jährlich 1 v. H., halbjährlich durch $\frac{1}{2}$ v. H. in Sparscheinen anlegt, nach 45 Jahren die Summe 1 beisammen hat; wie es (§. 14.) aussagt.

D.

I. Wenn die Bank zu erhöheten halbjährlichen Zinsen Z von 1 Geld auf die Bedingung ausleiht, dafs nach n halben Jahren *gar nichts* mehr von der Anleihe zurückzuzahlen sei, und früher, nach m halben Jahren, nur Das, was noch nicht durch die erhöhten Zinsen abgetragen worden ist: so mufs sie aus den erhöheten Zinsen Z, welche sie jedes halbe Jahr einnimmt und welche sie, etwa auf die gewöhnliche Weise, unter dem Beding der vollen Rückzahlung, zu z halbjährlichen Zins ausleiht und davon den Zins vom Zinse aufhäuft, zuletzt im Ganzen *eben so viel* eingenommen haben, als wenn sie das Geld auf die gewöhnliche Art, unter dem Beding der vollen Rückzahlung, zum halbjährlichen Zinsfufs z ausgethan hätte.

II. Die erhöheten Zinsen Z, welche am Ende des ersten halben Jahres gezahlt wurden, sind nun am Ende des $n$ten halben Jahres durch den aufgehäuften halbjährlichen Zins z bis zu $Z.(1+z)^{n-1}$ angewachsen; die Zinsen Z, welche am Ende des zweiten halben Jahres gezahlt wurden, sind am Ende des $n$ten halben Jahres zu $Z.(1+z)^{n-2}$ geworden; und so weiter. Überhaupt also sind durch die halbjährliche Zahlung Z:

$$12. \quad Z[(1+z)^{n-1} + (1+z)^{n-2} + (1+z)^{n-3} \cdots + (1+z)^1 + 1]$$
$$= Z\cdot\frac{(1+z)^n - 1}{(1+z) - 1} = Z\cdot\frac{(1+z)^n - 1}{z}$$

angesammelt worden.

Andrerseits würde die Bank, wenn sie die 1 zum halbjährlichen Zinse z auf n halbe Jahre unter der Bedingung der vollen *Zurückzahlung* der Anleihe 1

ausgeliehen hätte, am Ende der n halben Jahre

$$13. \quad (1+z)^n$$

eingenommen haben: also mufs, da beide Arten der Ausleihung das gleiche Ergebnifs haben müssen,

$$14. \quad \mathbf{Z}\cdot\frac{(1+z)^n-1}{z} = (1+z)^n$$

sein; woraus

$$15. \quad \mathbf{Z} = z\cdot\frac{(1+z)^n}{(1+z)^n-1}$$

folgt. Dieser Ausdruck von $\mathbf{Z}$ giebt

$$16. \quad \mathbf{Z}-z = z\cdot\left[\frac{(1+z)^n}{(1+z)^n-1}-1\right] = \frac{z}{(1+z)^n-1}.$$

III. Hieraus folgt, dafs die Zulage $\mathbf{Z}-z$ zu dem gewöhnlichen Zinsfufse z es ist, durch welche die, sonst am Ende der n halben Jahre zurückzuzahlende Anleihe 1 aufgesammelt wird: denn $\mathbf{Z}-z$, n halbe Jahre lang bezahlt, tragen zufolge (12.)

$$17. \quad (\mathbf{Z}-z)\cdot\frac{(1+z)^n-1}{z} = \frac{z}{(1+z)^n-1}\cdot\frac{(1+z)^n-1}{z} = 1$$

ein. Also die gewöhnlichen Zinsen z müssen grade um so viel erhöht werden, es mufs zu denselben grade so viel zugelegt werden, dafs aus der ***Zulage*** durch Zins vom Zinse in n halben Jahren die sonst zurückzuzahlenden 1 aufgehäuft werden; so dafs der Gläubiger am Ende der n halben Jahre die 1, statt sie auf einmal zu empfangen, durch die aufgesammelten Zinsen erhält; wie es auch an sich klar ist.

IV. Wenn die Zahlung der erhöheten Zinsen nicht n, sondern nur m halbe Jahre lang fortgesetzt wird, so werden dadurch nach (12.) nur

$$18. \quad \mathbf{Z}\cdot\frac{(1+z)^m-1}{z}$$

angesammelt. Wird dagegen die Anleihe 1, unter dem Beding der vollen Rückgabe nach m halben Jahren, zu dem Zinsfufs z ausgethan, so würden dadurch, mit Einschlufs der vollen zurückzuzahlenden Anleihe 1, nach m halben Jahren

$$19. \quad (1+z)^m$$

aufgehäuft werden. Letzteres ist Das, was die Bank wirklich zu den Sparscheinen eingenommen haben mufs: also mufs ihr, wenn sie zu den erhöheten Zinsen $\mathbf{Z}$ ausleiht, nach m halben Jahren noch der ***Theil***

$$20. \quad \boldsymbol{T} = (1+z)^m - \mathbf{Z}\cdot\frac{(1+z)^m-1}{z}$$

von der Anleihe *zurückgezahlt* werden. Dies thut, wenn man aus (15.) den Ausdruck von $\boldsymbol{Z}$ setzt:

$$(1+z)^m - \frac{(1+z)^m-1}{(1+z)^n-1}\cdot(1+z)^n = ((1+z)^m-1)\left(1-\frac{(1+z)^n}{(1+z)^n-1}\right)+1 \text{ oder}$$

$$21. \qquad \boldsymbol{T} = 1-\frac{(1+z)^m-1}{(1+z)^n-1}.$$

V. Das Nemliche ergiebt sich (wie gehörig), wenn man, nach (III.), auf die andere Art erwägt, dafs die *Zulage* $\boldsymbol{Z}-z$ zu den Zinsen z es ist, durch welche die Anleihe 1 in n halben Jahren getilgt oder allmälig zurückgezahlt wird. Denn durch $\boldsymbol{Z}-z$ wird in m halben Jahren nach (12.)

$$22. \qquad (\boldsymbol{Z}-z)\cdot\frac{(1+z)^m-1}{z}$$

oder, den Ausdruck von $\boldsymbol{Z}-z$ aus (16.) gesetzt,

$$23. \qquad \frac{z}{(1+z)^n-1}\cdot\frac{(1+z)^m-1}{z} = \frac{(1+z)^m-1}{(1+z)^n-1}$$

aufgesammelt. Die Bank mufs aber auch schon nach m halben Jahren die *volle Anleihe* 1 zurückbekommen: also mufs ihr von derselben noch der *Theil*

$$24. \qquad \boldsymbol{T} = 1-\frac{(1+z)^m-1}{(1+z)^n-1}$$

zurückgezahlt werden; was derselbe Ausdruck von $\boldsymbol{T}$ ist, wie (21.).

Für $m=n$ ist $\boldsymbol{T}=0$, so dafs nach n halben Jahren, wie gehörig, *nichts* weiter von der Anleihe zurückzuzahlen ist.

VI. Nach (22.) wird $\boldsymbol{T}$ auch durch

$$25. \qquad \boldsymbol{T} = 1-(\boldsymbol{Z}-z)\frac{(1+z)^m-1}{z}$$

ausgedrückt. Nach dieser Formel (25.) ist die dem (§. 14.) beigegebene Tafel II. berechnet, und zwar für eine Zulage $\boldsymbol{Z}-z$ von $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ und 2 v. H. zu den gewöhnlichen $z=2$ v. H. halbjährlichen Zinsen, also für $z=0{,}02$ und $\boldsymbol{Z}-z=0{,}005$, 0,0075, 0,01, 0,0125, 0,015, 0,0175, und 0,02.

VII. Da die Bank auch dann, wenn die Zahlung der erhöheten Zinsen $\boldsymbol{Z}$ schon nach m halben Jahren aufhört, durch Das, was sie dann aus den erhöhten Zinsen aufgesammelt hat, nemlich durch $\boldsymbol{Z}\cdot\frac{(1+z)^m-1}{z}$ (18.), zusammen mit dem ihr von der Anleihe noch zurückzuzahlenden Theil $\boldsymbol{T}=(1+z)^m-\boldsymbol{Z}\cdot\frac{(1+z)^m-1}{z}$, ganz *eben so viel* einnimmt, als wenn sie die Anleihe 1 auf die gewöhnliche

Weise, unter dem Beding der *vollen* Rückgabe, zu den *nicht* erhöhten Zinsen z auf m halbe Jahre ausgeliehen hätte, nemlich $(1+z)^m$ (19.): so ist sie keineswegs etwa darauf beschränkt, *die erhöheten Zinsen Z selbst* nur auf die gewöhnliche Weise, zu den Zinsen z, unter dem Beding der vollen Rückzahlung auszuthun, sondern sie kann auch eben sowohl wieder *die erhöheten Zinsen*, eben wie *die Anleihe 1 selbst*, zu erhöheten Zinsen auf *allmälige* Rückzahlung ausleihen. Der Erfolg von beiden Arten der Ausleihung ist für sie der nemliche; wie es (§. 14.) am Schlusse aussagt.

E.

I. Wenn Jemand aus Sparpapieren fortlaufende Zinsen, jedes halbe Jahr von *gleich hohem* Betrage, ziehen wollte, so könnte er dies auf folgende Weise bewerkstelligen.

Er kaufe nemlich für die Summe, von welcher er die Zinsen ziehen will und welche durch 1 bezeichnet werden mag, Sparpapiere. Sind dieselben m halbe Jahre alt, so wird er für die baaren 1 deren $\frac{1}{\varepsilon_m}$ bekommen. Will er nun von den baaren 1 halbjährlich die *gleichen* Zinsen x ziehen, so mufs er nach dem ersten halben Jahre $\frac{x}{\varepsilon_{m+1}}$ Sparpapiere ***verkaufen;*** denn diese sind ***baare*** x werth: nach dem zweiten halben Jahre $\frac{x}{\varepsilon_{m+2}}$, nach dem dritten halben Jahre $\frac{x}{\varepsilon_{m+3}}$ u. s. w., nach dem $n-m$ten halben Jahre $\frac{x}{\varepsilon_{m+n-m}} = \frac{x}{\varepsilon_n}$, zusammen also

$$26. \quad \frac{x}{\varepsilon_{m+1}} + \frac{x}{\varepsilon_{m+2}} + \frac{x}{\varepsilon_{m+3}} \cdots + \frac{x}{\varepsilon_n} = x\left[\frac{1}{\varepsilon_m} + \frac{1}{\varepsilon_{m+1}} + \frac{1}{\varepsilon_{m+2}} \cdots + \frac{1}{\varepsilon_n}\right];$$

welches der Kürze wegen durch

$$27. \quad x \cdot \Sigma \frac{1}{\varepsilon_{m+1,n}}$$

bezeichnet werden mag. Aber die ursprünglich angelegten 1 ***dürfen nicht vermindert worden sein.*** Es müssen also nach $n-m$ halben Jahren noch $\frac{1}{\varepsilon_n}$ Sparpapiere übrig bleiben; denn diese sind 1 baar werth, und folglich dürfen zusammen nur verkauft worden sein:

$$28. \quad \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_n} = x \cdot \Sigma \frac{1}{\varepsilon_{m+1,n}}.$$

Hieraus folgt

$$29. \qquad x = \frac{\frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_n}}{\Sigma \frac{1}{\varepsilon_{m+1,n}}};$$

und dies sind die halbjährlichen, ***gleich*** hohen Zinsen, welche sich möglicherweise erzielen lassen.

Für $m = 0$, oder wenn man ***ursprünglich*** ausgegebene Sparscheine kauft, deren Nennwerth $\varepsilon_0 = 1$ ist, giebt (29.)

$$30. \qquad x = \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon_n}}{\Sigma \frac{1}{\varepsilon_{1,n}}}.$$

II. Die Werthe von ε_1, ε_2, ε_3, ... bis ε_{45} zeigt die zweite Spalte in Taf. II. Danach berechnet ist

31.

Für $n =$	10	20	30	40	44 halbe oder
	5	10	15	20	22 ganze Jahre:
$\frac{1}{\varepsilon_n} =$	0,860303	0,737725	0,630812	0,538065	0,504597
und $\Sigma \frac{1}{\varepsilon_{1,n}} =$	9,216986	17,132220	23,909389	29,696343	31,764309.

Desgleichen ist

$$32. \qquad \frac{1}{\varepsilon_{34}} = 0{,}592099 \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{1}{\varepsilon_{35,44}} = 5{,}429148.$$

Mit den Zahlen (31.) nach Formel (30.) und mit denen (32.) nach Formel (29.) gerechnet, findet sich die in (§. 19. Viertens) angegebene Höhe des unter den verschiedenen Umständen zu erlangenden halbjährigen Zinsfufses x.

F.

Es ist noch folgendes Einwandes gegen die Zahlen-Angaben in der Abhandlung zu gedenken.

I. In (§. 4.) ist nemlich angenommen, dafs ***allmälig***, in 5 Jahren, für 10 Mill. Thaler Sparscheine in Umlauf gesetzt werden sollen; jedes halbe Jahr 1 Million. In (§. 10.) ist angenommen, dafs die Kosten der Verwaltung $\frac{1}{4}$ v. H. der ***in Umlauf gesetzten*** Scheine betragen werden, und danach ist auch hier in der Beilage (***B***. I.) der Werth der Sparscheine berechnet: nemlich nach der Bedingung, dafs von dem Ertrage des für die ausgegebenen Sparscheine eingekommenen, der Sparbank überlieferten baaren Geldes $\frac{1}{4}$ v. H. zu den Verwaltungskosten bestimmt sei.

Da nun aber im ersten halben Jahre nur erst für 1 Million Thaler Sparscheine im Umlauf sind, so sind am Ende dieses halben Jahres nur 2500 Thlr. zu den Verwaltungskosten vorhanden; am Ende des zweiten halben Jahres, in welchem 2 Mill. Thlr. Sparscheine im Umlauf sind, erst 5000 Thlr. am Ende des dritten halben Jahres erst 7500 Thlr. u. s. w., und erst nach dem 10ten halben Jahre, nachdem alle 10 Mill. Thlr. Sparscheine ausgegeben sind, 25 000 Thaler.

Sollten nun für die Verwaltung gleich vom Anfange an 25 000 Thlr. halbjährig berechnet werden müssen, so würden am Ende des ersten halben Jahres 22 500 Thlr., am Ende des zweiten halben Jahres 20 000 Thlr., am Ende des dritten halben Jahres 17 500 Thlr. u. s. w. zu den Verwaltungskosten ***fehlen;*** und erst am Ende des zehnten halben Jahres nichts mehr.

Diese Summen müfste dann die Casse ***bei sich selbst leihen*** und etwa am Ende von 22 Jahren und mit Zins vom Zinse sich zurückbezahlen; und zwar mit 2 v. H. halbjährlichen Zinsen, indem das Leihen bei sich selbst dadurch geschehen würde, dafs die Casse so viel von ihrem Bestande, als jedesmal die Anleihe beträgt, an ***Andere,*** von welchen sie 2 v. H. halbjährliche Zinsen nehmen würde, ***weniger*** ausleiht.

Das, was auf diese Weise die Casse nach 22 Jahren sich selbst schulden und zurückzuzahlen haben würde, nemlich 22 500 Thlr. mit Zins vom Zins auf $21\frac{1}{2}$ Jahr, 20 000 Thlr. eben so auf 21 Jahre, 17 500 Thlr. eben so auf $20\frac{1}{2}$ Jahre u. s. w. beträgt, nach der Formel (1.) für $\varkappa = 0{,}02$ berechnet, zusammen

33. 250 289 Thaler.

II. Da indessen die Bank, wie in (§. 17.) nachgewiesen, die fast ***gewisse*** Aussicht hat, in 22 Jahren über 2 Mill. Thaler ***rein zu gewinnen,*** so würde sie sogar diese ganze Summe von 250 289 Thaler recht gut übernehmen können, ohne dafs es nöthig wäre, den Sparscheinen deshalb noch Etwas abzuziehen; die steigenden Werthe derselben könnten ohne Bedenken so bleiben, wie sie in Taf. I. angegeben sind.

Aber der Ausfall an dem ***Gewinn*** der Bank wird auch gewifs nicht ***so viel*** betragen, weil die Verwaltung, ***erstlich,*** selbst für die ganzen 10 Mill. Thaler Sparscheine wahrscheinlich weniger als die vorausgesetzten 50 000 Thlr. kosten wird und weil, ***zweitens,*** die ***vollen*** Kosten der Verwaltung wirklich ***nicht*** gleich vom Anfange an nöthig sind, sondern die Kosten erst allmälig steigen, so wie die Summe der ausgegebenen Scheine zunimmt; wenn auch nicht im Verhältnifs der Zunahme selbst, so doch um Etwas. Der Ausfall an

dem Gewinn wird vielleicht noch nicht die Hälfte der obigen Summe betragen; und diese ist gegen den fast gewissen Gewinn der Bank unbedeutend. Aufserdem kommt der Ausfall ***nur*** im Anfange der Spar-Einrichtung vor, weiterhin niemals mehr.

Der oben berührte Einwand ändert also an den Aufstellungen in der Abhandlung wesentlich nichts.

Anm. Die in diesen Beilagen aufgestellten ***Formeln*** sind unzweifelhaft ***richtig und sicher***. Die danach ausgeführten ***Zahlenrechnungen*** sind wiederholt geprüft und ein irgend ***bedeutender*** Fehler findet sich in denselben gewifs nicht. Sollte aber etwa die Bank zur ***Ausführung*** kommen, so würde es gut sein, die ***Zahlenrechnungen*** noch einmal zu wiederholen, weil es möglich wäre, dafs noch eine oder die andere wenig bedeutende Ziffer in den Tafeln geändert werden müfste.

Berlin, im Juni 1849.

Tafel I.

des Werths der *Sparscheine* in Bruchtheilen der Einheit und in Thalern, Silbergroschen und Silberpfennigen, von Scheinen über 1 Thaler, 5 Thaler und 50 Thaler, so wie derselbe halbjährlich durch $3\frac{1}{2}$ vom Hundert jährliche, mit $1\frac{3}{4}$ vom Hundert halbjährlich in Rechnung kommende Zinsen und gleichen Zins von Zinsen, nach Abzug von $\frac{1}{4}$ vom Hundert halbjährlicher Kosten der Verwaltung, steigt.

Nach Ablauf von	Ist der Werth der Einheit gestiegen auf	Und der Werth der Sparscheine: Über 1 Thaler auf Thlr.	Sgr.	Spf.	Über 5 Thaler auf Thlr.	Sgr.	Spf.	Über 50 Thaler auf Thlr.	Sgr.	Spf.
½ Jahr	1,015 000	1	—	5	5	2	3	50	22	6
1 Jahr	1,030 303	1	—	10	5	4	6	51	15	7
1½ Jahren	1,045 792	1	1	4	5	6	10	52	8	10
2 – –	1,061 594	1	1	10	5	9	2	53	2	4
2½ – –	1,077 672	1	2	4	5	11	7	53	26	3
3 – –	1,094 030	1	2	10	5	14	1	54	21	—
3½ – –	1,110 674	1	3	4	5	16	7	55	16	—
4 – –	1,127 563	1	3	10	5	19	1	56	11	5
4½ – –	1,144 845	1	4	4	5	21	8	57	7	3
5 – –	1,162 381	1	4	10	5	24	4	58	3	6
5½ – –	1,180 222	1	5	4	5	27	—	59	—	3
6 – –	1,198 376	1	5	11	5	29	9	59	27	6
6½ – –	1,216 849	1	6	7	6	2	6	60	25	3
7 – –	1,235 643	1	7	1	6	5	4	61	23	6
7½ – –	1,254 766	1	7	8	6	8	2	62	22	2
8 – –	1,274 224	1	8	3	6	11	1	63	21	4
8½ – –	1,294 024	1	8	10	6	14	1	64	21	—
9 – –	1,314 169	1	9	5	6	17	1	65	21	3
9½ – –	1,334 667	1	10	—	6	20	2	66	22	—
10 – –	1,355 519	1	10	7	6	23	3	67	23	3
10½ – –	1,376 745	1	11	3	6	26	5	68	25	—
11 – –	1,398 339	1	11	11	6	29	8	69	27	4
11½ – –	1,420 309	1	12	7	7	3	—	71	—	4
12 – –	1,442 665	1	13	3	7	6	4	72	4	—
12½ – –	1,465 411	1	13	11	7	9	9	73	8	2
13 – –	1,488 556	1	14	7	7	13	3	74	12	9
13½ – –	1,512 105	1	15	4	7	16	10	75	18	—
14 – –	1,536 076	1	16	1	7	20	5	76	24	—
14½ – –	1,560 449	1	16	10	7	24	—	78	—	8
15 – –	1,585 257	1	17	7	7	27	8	79	7	10
15½ – –	1,610 500	1	18	4	8	1	5	80	15	9
16 – –	1,636 183	1	19	1	8	5	3	81	24	4
16½ – –	1,662 316	1	19	10	8	9	3	83	3	6
17 – –	1,688 906	1	20	8	8	13	4	84	13	4
17½ – –	1,715 963	1	21	6	8	7	4	85	23	11
18 – –	1,743 491	1	22	4	8	21	5	87	5	2
18½ – –	1,771 506	1	23	2	8	25	8	88	17	2
19 – –	1,800 003	1	24	—	9	—	—	90	—	—
19½ – –	1,829 003	1	24	10	9	4	4	91	13	6
20 – –	1,858 512	1	25	8	9	8	9	92	27	9
20½ – –	1,888 536	1	26	7	9	13	3	94	12	9
21 – –	1,919 084	1	27	6	9	17	10	95	28	7
21½ – –	1,950 168	1	28	5	9	22	6	97	15	3
22 – –	1,981 797	1	29	5	9	27	3	99	2	8
22½ – –	2,013 979	2	—	5	10	2	—	100	20	11

Tafel II.

Derjenigen *Theile* eines Anlehns 100, welche statt der *ganzen* 100, (die zurückgegeben werden müssen, wenn der Schuldner nur 4 vom Hundert jährliche Zinsen zahlt) *dann* nach Ablauf der einzelnen Jahre nur noch zurückzuzahlen sind, wenn der Schuldner 5, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7, $7\frac{1}{2}$ oder 8 jährliche Zinsen, statt 4 vom Hundert, und zwar halbjährlich mit $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$ oder 4 vom Hundert entrichtet.

Es sind auf Einhundert noch zurückzuzahlen:

Nach	Bei $2\frac{1}{2}$ v. H. halbjährlichem Zins	Nach	Bei $2\frac{3}{4}$ v. H. halbjährlichem Zins	Nach	Bei 3 v. H. halbjährlichem Zins	Nach	Bei $3\frac{1}{4}$ v. H. halbjährlichem Zins	Nach	Bei $3\frac{1}{2}$ v. H. halbjährlichem Zins	Nach	Bei $3\frac{3}{4}$ v. H. halbjährlichem Zins	Nach	Bei 4 v. H. halbjährlichem Zins
1 Jahr	98,9900	1 J.	98,4850	1 J.	97,9800	1 J.	97,4750	1 J.	96,9700	1 J.	96,4650	1 J.	95,9600
2 Jahren	97,9392	2 J.	96,9088	2 J.	95,8784	2 J.	94,8480	2 J.	93,8176	2 J.	92,7872	2 J.	91,7568
3 - -	96,8460	3 -	95,2690	3 -	93,6920	3 -	92,1150	3 -	90,5379	3 -	88,9609	3 -	87,3839
4 - -	95,7085	4 -	93,5628	4 -	91,4171	4 -	89,2714	4 -	87,1256	4 -	84,9798	4 -	82,8341
5 - -	94,5253	5 -	91,7879	5 -	89,0505	5 -	86,3131	5 -	83,5758	5 -	80,8385	5 -	78,1011
6 - -	93,2940	6 -	89,9410	6 -	86,5880	6 -	83,2350	6 -	79,8820	6 -	76,5290	6 -	73,1760
7 - -	92,0131	7 -	88,0196	7 -	84,0261	7 -	80,0326	7 -	76,0392	7 -	72,0458	7 -	68,0522
8 - -	90,6805	8 -	86,0207	8 -	81,3609	8 -	76,7011	8 -	72,0414	8 -	67,3817	8 -	62,7218
9 - -	89,2939	9 -	83,9408	9 -	78,5877	9 -	73,2346	9 -	67,8866	9 -	62,5335	9 -	57,1804
10 - -	87,8513	10 -	81,7770	10 -	75,7027	10 -	69,6284	10 -	63,5540	10 -	57,4796	10 -	51,4053
11 - -	86,3505	11 -	79,5258	11 -	72,7010	11 -	65,8763	11 -	59,0515	11 -	52,2268	11 -	45,4020
12 - -	84,7891	12 -	77,1837	12 -	69,5783	12 -	61,9729	12 -	54,3674	12 -	46,7619	12 -	39,1564
13 - -	83,1646	13 -	74,7469	13 -	66,3292	13 -	57,9115	13 -	49,4937	13 -	41,0760	13 -	32,6582
14 - -	81,4744	14 -	72,2116	14 -	62,9488	14 -	53,6860	14 -	44,4232	14 -	35,1604	14 -	25,8976
15 - -	79,7160	15 -	69,5740	15 -	59,4320	15 -	49,2900	15 -	39,1480	15 -	29,0060	15 -	18,8639
16 - -	77,8865	16 -	66,8298	16 -	55,7731	16 -	44,7164	16 -	33,6596	16 -	22,6028	16 -	11,5460
17 - -	75,9831	17 -	63,9747	17 -	51,9662	17 -	39,9578	17 -	27,9493	17 -	15,9409	17 -	3,9324
18 - -	74,0028	18 -	61,0042	18 -	48,0056	18 -	35,0070	18 -	22,0083	18 -	9,0098	$17\frac{1}{2}$ -	—0,0110
19 - -	71,9425	19 -	57,9138	19 -	43,8850	19 -	29,8563	19 -	15,8275	19 -	1,7988	Übersch.	
20 - -	69,7990	20 -	54,6985	20 -	39,5980	20 -	24,4975	20 -	9,3970	$19\frac{1}{2}$ -	—1,9152	Überschufs.	
21 - -	67,5689	21 -	51,3534	21 -	35,1379	21 -	18,9224	21 -	2,7068				
22 - -	65,2462	22 -	47,8693	22 -	30,4924	22 -	13,1155	$21\frac{1}{2}$ -	—0,7407	Überschufs.			
23 - -	62,8348	23 -	44,2522	23 -	25,6695	23 -	7,0869						
24 - -	60,3233	24 -	40,4850	24 -	20,6467	24 -	0,8084						
25 - -	57,7103	25 -	36,5655	25 -	15,4207	$24\frac{1}{2}$ -	—2,4256	Überschufs.					
26 - -	54,9918	26 -	32,4877	26 -	9,9836								
27 - -	52,1635	27 -	28,2453	27 -	4,3271								
28 - -	49,2209	28 -	23,8314	28 -	—1,5581	Überschufs.							
29 - -	46,1594	29 -	19,2391										
30 - -	42,9743	30 -	14,4615										
31 - -	39,6604	31 -	9,4906										
32 - -	36,2127	32 -	4,3191										
33 - -	32,6257	33 -	—1,0615	Überschufs.									
34 - -	28,8938												
35 - -	25,0110												
36 - -	20,9715												
37 - -	16,7685												
38 - -	12,3963												
39 - -	7,8470												
40 - -	3,1141												
41 - -	—1,8101	Überschufs.											

22.

Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhangt, nebst Anwendungen derselben auf die Zahlentheorie.

(Als Fortsetzung der Abhandlung No. 19. im vorhergehenden Hefte.)

(Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.)

---

§. 4.

Aus dem im vorigen Paragraphen über die Form $y = \frac{x^{N(m)} + mP}{1 + mQ}$ der rationalen Function y von x bewiesenen Satze fliefsen durch Verallgemeinerung und wiederholte Anwendung desselben fruchtbare Principien, mittelst welcher sich die Lösung mannigfaltiger wichtiger Probleme über Lemniscatentheilung und deren Anwendung auf die Zahlentheorie bewerkstelligen läfst, während sich diesen Problemen auf anderen Wegen, so viel ich sehe, unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

Zunächst kann man den Satz selbst auf den Fall ausdehnen, wenn an die Stelle der complexen und primären Primzahl m eine beliebige Potenz von m gesetzt wird; denn da sich $\varphi(m^2 t)$ in $\varphi(mt)$, $\varphi(m^3 t)$ in $\varphi(m^2 t)$ u. s. w. allgemein $\varphi(m^\mu t)$ in $\varphi(m^{\mu-1} t)$ eben so ausdrücken lassen, wie $\varphi(mt)$ in $\varphi(t)$, d. h. y in x, so ersieht man durch successive Substitution, dafs $\varphi(m^\mu t)$ von der Form $\frac{\varphi(t)^{p^\mu} + mP}{1 + mQ}$ sein wird, wo P und Q ganze ganzzahlige Functionen von $\varphi(t) = x$ sind; denn man sieht leicht, dafs wenn allgemein $f_1(x)$ und $f_2(x)$ irgend zwei ganze ganzzahlige Functionen von x sind, der Quotient $\frac{f_1(y)}{f_2(y)}$ die Form $\frac{f_1(x^p) + mP}{f_2(x^p) + mQ}$ annehmen wird.

Durch Multiplication mit dem Nenner ergiebt sich y in der Form $x^p + m(P - Qy)$, d. h. $\varphi(mt) = \varphi(t)^p + mT$, und allgemeiner $\varphi(m^\mu t) = \varphi(t)^{p^\mu} + mT$, wo T eine ganze ganzzahlige Function von den Gröfsen $\varphi(t)$, $\varphi(mt)$, $\varphi(m^2 t)$ u. s. w. bis $\varphi(m^\mu t)$ ist.

Man wird leicht darauf geführt, bei Gelegenheit der Theilung der Lemniscate für den Divisor m den in Rede stehenden Satz auf einen von m *verschiedenen* Multiplicator n zu übertragen; denn wenn t von der Form $\frac{rC}{m}$ ist, so ist $\varphi(nt)$ zugleich mit $\varphi(t)$ Wurzel der Gleichung $W=0$ für jeden nicht durch m theilbaren Werth von n, und wenn n primäre Primzahl ist, so läfst sich dann $\varphi(nt)$ durch $\varphi(t)$ in der Form $\varphi(t)^q+nT$ ausdrücken, wo T eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln der Gleichung $W=0$ (hier von *zwei* Wurzeln) ist; es läfst sich diese Form auch benutzen, um umgekehrt $\varphi(t)^q$ durch $\varphi(nt)$ in der Form $\varphi(nt)+nT$ auszudrücken; q ist hier die Norm von n. Es ist dabei nicht zu vergessen, dafs man zwar T auch durch eine einzige Wurzel der Gleichung $W=0$ ausdrücken kann, dafs aber dann die Coëfficienten im Allgemeinen aufhören ganze Zahlen zu sein; für viele Untersuchungen ist es jedoch vortheilhafter, eine Function mehrerer Wurzeln mit ganzen Coëfficienten als eine solche von einer einzigen mit gebrochenen Coëfficienten zu betrachten.

Man bezeichne durch Ω_k den Inbegriff der $p-1$ Wurzeln der Gleichung $W=0$ in der schon oben angezogenen Form $\varphi\left(\frac{rkC}{m}\right)$, und es sei jetzt $F(k)$ eine beliebige ganze ganzzahlige Function aller oder einiger der $p-1$ Wurzeln Ω_k, welche recht gut als Function von k allein aufgefafst werden kann, also eine Summe von Termen von der Form

$$h.\varphi\left(\frac{r_1kC}{m}\right)^{\alpha_1}\varphi\left(\frac{r_2kC}{m}\right)^{\alpha_2}\ldots.\ \varphi\left(\frac{r_{p-1}kC}{m}\right)^{\alpha_{p-1}}=Z,$$

wo h eine ganze complexe Zahl ist und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{p-1}$ nicht negative ganze Exponenten vorstellen. Erhebt man ein solches Polynom $F(k)$ zur $q$ten Potenz, so kommen in der polynomischen Entwicklung desselben erstlich alle Glieder wie

$$h^q.\varphi\left(\frac{r_1kC}{m}\right)^{q\alpha_1}.\varphi\left(\frac{r_2kC}{m}\right)^{q\alpha_2}\ldots.\ \varphi\left(\frac{r_{p-1}kC}{m}\right)^{q\alpha_{p-1}}=Z^q$$

vor. Was die übrigen Glieder betrifft, so sind ihre Coëfficienten sämmtlich durch q, respective $\sqrt{q}$ theilbar, je nachdem q selbst Primzahl oder das Quadrat einer Primzahl, d. h. je nachdem n, deren Norm q ist, eine zweigliedrige oder eine eingliedrige complexe Primzahl vorstellt; in beiden Fällen sind die Coëfficienten der übrigen Glieder also durch n theilbar. Vernachlässigt man die durch n theilbaren Glieder, so bleiben nur diejenigen von der Form Z^q stehen. Man giebt der letzteren Potenz eine einfachere Form, wenn man be-

merkt, dafs mit Hinweglassung von Gliedern, welche den Factor n enthalten, h statt h^q und nach obigem Princip $\varphi\left(\frac{r_1 nkC}{m}\right)$ statt $\varphi\left(\frac{r_1 kC}{m}\right)^q$, $\varphi\left(\frac{r_2 nkC}{m}\right)$ statt $\varphi\left(\frac{r_2 kC}{m}\right)^q$ u. s. w. gesetzt werden darf; so erhält man

$$h.\varphi\left(\frac{r_1 nkC}{m}\right)^{\alpha_1}.\varphi\left(\frac{r_2 nkC}{m}\right)^{\alpha_2} \ldots\ldots \varphi\left(\frac{r_{p-1} nkC}{m}\right)^{\alpha_{p-1}} = \boldsymbol{Z}_n.$$

Die Summe aller Glieder von dieser Form giebt aber genau Dasjenige, was aus $F(k)$ folgt, wenn überall nk an die Stelle von k gesetzt wird, also $F(nk)$.

„Wenn also $F(k)$ irgend eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln „Ω_k vorstellt, so ist immer $F(k)^q = F(nk) + nT$; wo T eine ähnliche „ganze Function, n eine beliebige von m verschiedene primäre complexe „Primzahl und q deren Norm bedeutet."

Dieser Satz ist von besonderer Wichtigkeit für Anwendungen auf die Zahlentheorie. Man bemerke noch, dafs die Coëfficienten in T von k unabhängig sind. Übrigens kann auch $n = m$, also $q = p$ sein; dann reducirt sich $F(nk) = F(mk) = F(0)$ auf eine ganze complexe Zahl und wird gleich dem Coëfficienten h desjenigen Gliedes, in welchem sämmtliche Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{p-1}$ der Null gleich sind: also selbst $= 0$, wenn ein solches Glied nicht vorkommt. Dies folgt daraus, dafs $\varphi(0) = 0$ ist.

Wenn man die gefundene Gleichung $F(k)^q = F(nk) + nT$ wiederholt auf beiden Seiten zur $q$ten Potenz erhebt und $F(n^2k)$ statt $F(nk)^q$, $F(n^3k)$ statt $F(n^2k)^q$ u. s. w. setzt, was nach derselben Gleichung erlaubt ist, so erhält man das allgemeinere Resultat

$$F(k)^{q^\mu} = F(n^\mu k) + nT;$$

wo T nicht dieselbe, aber eine ähnliche Function ist wie oben. Statt n^μ in $F(n^\mu k)$ kann man natürlich seinen Rest (mod. m) setzen; ist z. B. $n^\mu \equiv 1 \pmod{m}$, so hat man $F(k)^{q^\mu} = F(k) + nT$.

Der allgemeine Coëfficient h des Polynoms F, welcher bisher als ganze Zahl angenommen wurde, könnte selbst eine oder mehrere andere Gröfsen $x_1, x_2, \ldots.$ in ganzen Verbindungen enthalten. Schreibt man, um diese letzteren sichtbar zu machen, $F(k; x_1, x_2, \ldots.)$ statt $F(k)$, so hat man in diesem Falle:

$$F(k; x_1, x_2, \ldots.)^q = F(nk; x_1^q, x_2^q, \ldots.) + nT(x_1, x_2, \ldots.),$$

$$F(k; x_1, x_2, \ldots.)^{q^2} = F(n^2k; x_1^{q^2}, x_2^{q^2} \ldots.) + nT(x_1, x_2, \ldots.),$$

u. s. w. Fernere Reductionen bieten sich hier dar, wenn für die Gröfsen

z Wurzeln der Einheit genommen werden, oder auch lemniscatische Functionen aliquoter Theile des Umfanges C, welche sich auf andere Divisoren m', m'', u. s. w. beziehen. Namentlich findet sich, wenn z irgend eine $p-1$te Wurzel der Einheit, g eine primitive Congruenzwurzel mod. m, $n \equiv g^\nu \pmod{m}$, und $F(k; z)$ von der Form

$$F(k; z) = F(k) + zF(gk) + z^2F(g^2k) + \text{etc.} + z^{p-2}F(g^{p-2}k)$$

angenommen wird:

$$F(k; z)^q = F(nk; z^q) + nT(z) = \omega^{-q\nu}F(k; z^q) + nT(z).$$

Dies mag genügen, um die Verallgemeinerung desjenigen Princips zu zeigen, welches in seiner einfachsten Form durch die Gleichung $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)^{N(n)} = \varphi\left(\frac{nkC}{m}\right) + nT$ dargestellt wird. Unter den zahlreichen Anwendungen desselben will ich nur hervorheben, dafs sich mit Hülfe desselben die Divisoren (nämlich die complexen im gewöhnlichen *Gaufsischen* Sinne) derjenigen Gleichungen vollständig bestimmen lassen, welchen die Perioden aus den Wurzeln der Gleichung $W = 0$ oder aus ganzen Functionen dieser Wurzeln Genüge leisten. Man erhält auf diese Weise zahlentheoretische Sätze von grofser Allgemeinheit, welche denen von *Kummer* für die Kreistheilung aufgestellten vollkommen analog sind. Was z. B. die Function W selbst betrifft, so hat dieselbe aufser den Divisoren $1+i$ und m nur solche Primtheiler, welche $\equiv 1 \pmod{m}$ sind, und wenn umgekehrt n eine complexe Primzahl $\equiv 1 \pmod{m}$ ist, so hat die Congruenz $W \equiv 0 \pmod{n}$ $p-1$ Wurzeln, nämlich so viele als ihr Grad beträgt. Ist ferner μ für *irgend eine* primäre complexe Primzahl n der kleinste Exponent, der $n^\mu \equiv 1 \pmod{m}$ macht, so ist $W \equiv$ dem Producte aus $\frac{p-1}{\mu}$ ganzen ganzzahligen und *irreductibeln* Ausdrücken (mod. n) (im Sinne von *Schoenemann*) vom Grade μ. Der letztere Satz ist das Analogon zu einem von *Schoenemann* über den Ausdruck $\frac{x^p-1}{x-1}$ in seiner Abhandlung im 31ten Bande gegenwärtigen Journals bewiesenen Satzes *).

*) *Schoenemann* hat das Verdienst, zu einer allgemeineren und mehr erschöpfenden Auffassungsweise der Probleme über Congruenzen angeregt zu haben, indem er darauf aufmerksam machte, dafs neben der gewöhnlichen Frage nach den Wurzeln einer Congruenz, resp. Lösbarkeit oder Nichtlösbarkeit derselben, welche sich nur auf die Linearfactoren bezieht, auch die Factoren höherer Grade eines in Hinsicht auf einen vorgelegten Modul zu untersuchenden Ausdrucks berücksichtigt werden müssen. Nachdem der genannte Verfasser gezeigt, dafs sich jeder gegebene Ausdruck auf eine und nur eine Weise dem Producte irreductibler Factoren congruent setzen läfst, hat er ferner die

§. 5.

Die eben gemachten Auseinandersetzungen bezogen sich auf mod. n, eine von m verschiedene complexe Primzahl, und waren Folgerungen aus dem Satze, dafs, mit Vernachlässigung des $n$fachen einer ganzen Function von $\varphi(t)$ und $\varphi(nt)$, $\varphi(nt)$ sich auf $\varphi(t)^q$ und umgekehrt $\varphi(t)^q$ sich auf $\varphi(nt)$ zurückführen läfst. Ich kehre jetzt zum Modul m und zu denjenigen Schlüssen zurück, welche sich unmittelbar daran anknüpfen, dafs in der Gleichung $W = x^{p-1} + A_1 x^{p-5} + A_2 x^{p-9} + \text{etc.} = 0$ die Coëfficienten A_1, A_2, etc. durch m theilbare ganze Zahlen sind. Da jede symmetrische ganze ganzzahlige Function der Wurzeln sich als ganze ganzzahlige Function dieser Coëfficienten ausdrücken läfst, so ist jede solche symmetrische Function einer ganzen Zahl gleich, welche $\equiv 0 \pmod{m}$. Eine Ausnahme macht der Fall, wenn in der symmetrischen Function ein Glied vorkommt, welches die Wurzeln gar nicht enthält: dann ist die Function dem unabhängigen Gliede congruent (mod. m). Z. B., wenn w, w', w'', etc. die sämmtlichen $p-1$ Wurzeln der Gleichung $W = 0$ bezeichnen, so ist ein Product aus $p-1$ Factoren, wie

$$(a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots.)(a_0 + a_1 w' + a_1 w'^2 + \text{etc.}) \ldots.,$$

wo a_0, a_1, etc. ganze Zahlen sind, $\equiv$ dem unabhängigen Gliede $a_0^{p-1} \pmod{m}$; ein solches Product ist also immer $\equiv 1 \pmod{m}$ und nie durch m theilbar, aufser wenn a_0 durch m theilbar ist. Unter den symmetrischen Functionen verdienen die Potenzsummen der Wurzeln eine besondere Beachtung. Bezeichnet man durch $\Sigma f(x)$ die Summe der $p-1$ Gröfsen $f(w) + f(w') + f(w'') + \text{etc.}$, so ist $\Sigma x^\mu \equiv 0 \pmod{m}$, aufser für $\mu = 0$; dann ist $\Sigma x^0 = p-1 \equiv -1 \pmod{m}$. Wenn demnach $f(x)$ irgend eine ganze ganzzahlige Function von x vorstellt, deren constantes Glied $= a$, so ist $\Sigma f(x) \equiv (p-1)a \equiv -a \pmod{m}$.

Existenz, die Anzahl und die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der irreductibeln Congruenzen aller Grade nachgewiesen. — Die von *Kummer* Seite 107 ff. im 30ten Bande des gegenwärtigen Journals gegebenen Sätze müssen der Betrachtungsweise von *Schoenemann* gemäfs ergänzt werden; was keine grofsen Schwierigkeiten darbietet. Setzt man $p-1 = ef$, und bedeutet μ den kleinsten Exponenten, welcher $q^\mu \equiv 1 \pmod{p}$ macht; ferner ϑ den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler zwischen $\frac{p-1}{\mu}$ und $\frac{p-1}{f} = e$, so ist die Gleichung vom $e$ten Grade für die Perioden aus f Gliedern, wenn sie als Congruenz (mod. q) aufgefafst wird, genau in ϑ irreductible Ausdrücke vom Grade $\frac{e}{\vartheta}$ zerfällbar; einige specielle Werthe der Primzahl q geben Ausnahmefälle. Ganz Analoges gilt in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $W = 0$, wenn statt der reellen Primzahl q eine complexe n gesetzt wird und wenn μ den kleinsten Exponenten bedeutet, der $n^\mu \equiv 1 \pmod{m}$ macht; wie ich in einer besondern Abhandlung beweisen werde. n wird immer *primär* angenommen.

Die höheren Potenzsummen, von der $p-1$ten incl. aufwärts, kann man auch nach mod. m^2 bestimmen, von der $2(p-1)$ten an nach mod. m^3, u. s. w.; denn es ist $\Sigma W = 0$, also $\Sigma x^{p-1} = -A_1 \Sigma x^{p-5} - \ldots - m\Sigma x^0$, und da hier rechts jedes Glied aufser dem letzten durch m^2 theilbar ist, so erhält man $\Sigma x^{p-1} \equiv -m(p-1) \equiv m \pmod{m^2}$. Ferner ist auch $\Sigma x^\mu W = 0$, also $\Sigma x^{p-1+\mu} = -A_1 \Sigma x^{p-5+\mu} - \text{etc.} \equiv 0 \pmod{m^2}$, wenn $\mu > 0$. Nachdem erst einmal bewiesen, dafs alle Potenzsummen, deren Exponent zwischen $p-1$ und $2(p-1)$ liegt, durch m^2 theilbar sind, folgt wieder aus der Gleichung $\Sigma x^{p-1+\mu} = -A_1 \Sigma x^{p-5+\mu} -$ etc., dafs $\Sigma x^{2(p-1)} \equiv -m^2 \pmod{m^3}$ und $\Sigma x^{2(p-1)+\mu} \equiv 0 \pmod{m^3}$. So fortfahrend erhält man durch Induction zum Resultat, dafs allgemein

$$\Sigma x^{\nu(p-1)} \equiv (-1)^{\nu+1} m^\nu \pmod{m^{\nu+1}}, \quad \Sigma x^{\nu(p-1)+\mu} \equiv 0 \pmod{m^{\nu+1}}$$

für $\mu > 0$ ist. Aus der eben angewendeten Form

$$x^{p-1+\mu} = -A_1 x^{p-5+\mu} - A_5 x^{p-9+\mu} - \text{etc.}$$

der Gleichung $W = 0$, folgt auch, dafs jede Potenz einer Wurzel derselben, deren Exponent $\geqq p-1$ ist, sich als das $m$fache einer ganzen ganzzahligen Function dieser Wurzel darstellen läfst. Hieraus geht folgendes Princip hervor: „Wenn x Wurzel der Gleichung $W = 0$ ist und man darf in einer ganzen Function von x Vielfache von m weglassen, so ist es auch erlaubt, Potenzen von x wegzulassen, oder hinzuzufügen, deren Exponent $\geqq p-1$ ist, also z. B. nur diejenigen beizubehalten, deren Exponent $< p-1$ ist."

Es ist schon bemerkt worden, dafs, wenn w eine Wurzel der Gleichung $W = 0$ bezeichnet, jede andere Wurzel derselben, welche zunächst als gebrochene Function von w auftritt, auch als ganze Function von w dargestellt werden kann; wobei jedoch ein numerischer Nenner nicht zu vermeiden ist. ***Ein solcher numerischer Nenner kann nie durch m theilbar sein****). Es sei $\varphi(nt) = \frac{x f_1(x)}{f(x)}$, wenn $\varphi(t) = x$, so ist $\frac{w f_1(w)}{f(w)}$ irgend eine zweite Wurzel der Gleichung $W = 0$, wenn n eine ganze complexe Zahl, die weder $\equiv 0$ noch $\equiv 1 \pmod{m}$ ist. Man verwandelt die gebrochene Function auf die bekannte Weise in eine ganze, wenn man sie in der Form $\frac{w f_1(w) f(w') f(w'') \ldots}{f(w) f(w') f(w'') \ldots}$ schreibt; der Nenner ist dann eine symmetrische Function aller Wurzeln, also eine

*) Für eine spätere Gelegenheit behalte ich mir vor, zu beweisen, dafs bei der Reduction der ganzen Functionen mehrere Wurzeln der Gleichung $W = 0$ auf ganze Functionen einer Wurzel kein anderer Nenner auftreten kann, als eine Potenz von $1+i$.

ganze Zahl, die mit ϑ bezeichnet werden mag; das Product $f(w')f(w'')\ldots.$ wird einer ganzen ganzzahligen Function von w gleich und der Zähler erhält die Form $a_1 w + a_5 w^5 + \ldots.$, also der ganze Ausdruck die Form $\frac{1}{\vartheta}(a_1 w + a_5 w^5 + \ldots.)$; wo a_1, a_5 etc. ganze Zahlen sind; man kann immer annehmen, dafs die ganze Function von w in der Parenthese mit Hülfe der Gleichung $W = 0$ auf einen Grad $< p-1$ gebracht ist. Das constante Glied in $f(x)$ ist $= 1$, also ist $\vartheta = f(w)f(w')f(w'')\ldots.$ nach einer obigen Bemerkung $\equiv 1 \pmod{m}$ und daher gewifs nicht durch m theilbar. Man kann also $\frac{w f_1(w)}{f(w)} = w' = w F(w)$ setzen, wo $F(w)$ eine ganze Function von w vom Grade $p-5$ ist, deren Coëfficienten zwar gebrochene Zahlen sein können, welche aber sicher ***nicht*** m als Divisor in ihren Nennern enthalten. — Obgleich die Coëfficienten von $F(w)$ sich nicht *a priori* angeben lassen dürften, so können doch ihre Reste in Hinsicht auf mod. m auf eine elementare Weise bestimmt werden. Aus der Gleichung $\frac{f_1(w)}{f(w)} = F(w)$ oder $f_1(w) = f(w)F(w)$ folgt, dafs für einen unbestimmten Werth von x, $f_1(x) = f(x)F(x) + W.H$ ist; wo H eine ganze Function von x mit rationalen Coëfficienten bedeutet, deren Nenner ebenfalls nicht den Divisor m enthalten. Man entwickle den Quotienten $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen von x und bringe diese Reihe auf die Form $R(x) + x^{p-1}S(x)$; $R(x)$ bedeutet den Anfang der Reihe bis zu der Potenz x^{p-5} incl., also eine ganze (geschlossene) Function von x vom Grade $p-5$, und $S(x)$ eine unendliche Reihe; man erhält dann

$$f_1(x) = f(x)R(x) + x^{p-1}S(x)f(x).$$

Das Product $S(x)f(x)$ mufs sich auf einen geschlossenen Ausdruck reduciren, da $f_1(x) - f(x)R(x)$ ein solcher ist. Es läfst sich auch das ganze Problem über die Entwicklung des Anfangs $R(x)$ der unendlichen Reihe so auffassen, als handelte es sich darum, eine ganze Function $R(x)$ zu bestimmen, von der Art, dafs die Differenz $f_1(x) - f(x)R(x)$ durch x^{p-1} algebraisch theilbar wird. Es sei also $f_1(x) = f(x)R(x) + x^{p-1}T(x)$. Setzt man diesen Werth von $f_1(x)$ in die obige Gleichung, so kommt

$$f(x)R(x) + x^{p-1}T(x) = f(x)F(x) + W.H.$$

Setzt man hier für x eine Wurzel w der Gleichung $W = 0$, so ergiebt sich $f(w)(F(w) - R(w)) = w^{p-1}T(w)$. $R(x)$ ist nichts anderes als der Anfang

der Entwicklung von $\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}$ nach Potenzen von $\varphi(t)=x$, und da diese Entwicklung nur bis zu x^{p-5} fortgesetzt werden soll, so kann nach (§. 3.) in den Nennern der Coëfficienten von $R(x)$ kein Primtheiler vorkommen, dessen Norm $>p-4$, also namentlich nicht der Divisor m, dessen Norm p ist; dieser Divisor kann, der Bildung von $T(x)$ gemäfs, eben so wenig in den Nennern der Coëfficienten von $T(x)$ enthalten sein. Multiplicirt man nun die zuletzt gefundene Gleichung auf beiden Seiten mit $f(w')f(w'')\ldots.$, setzt wieder das Product $f(w)f(w')f(w'')\ldots.$ der ganzen, nicht durch m theilbaren Zahl ϑ gleich, verwandelt $f(w')f(w'')\ldots.$ in eine ganze Function von w und dividirt endlich durch ϑ, so erhält man $F(w)-R(w)$, als das Product aus w^{p-1} in eine ganze Function von w dargestellt, deren Coëfficienten rational sind und den Divisor m ***nicht*** in ihren Nennern enthalten. Da nun w^{p-1} dem $m$fachen einer ganzen Function von w gleich ist, nemlich $=-A_1w^{p-5}-\text{etc.}-m$, so wird $F(w)-R(w)$ ebenfalls dem $m$fachen einer solchen Function gleich. In Rücksicht auf die Irreductibilität der Gleichung $W=0$, und daraus, dafs $F(w)-R(w)$ von niedrigerem Grade als W ist, ergiebt sich, dafs in Hinsicht auf die Coëfficienten $F(x)\equiv R(x)\pmod m$ sein mufs. Bisher ist angenommen worden, dafs $F(x)$ zuvor mit Hülfe der Gleichung $W=0$ auf den niedrigsten Grad reducirt worden sei: aber selbst ohne diese Reduction würde noch immer derjenige Theil von $F(x)$, welcher niedrigere Potenzen als x^{p-1} enthält, $\equiv R(x)\pmod m$ sein, da ja bei jener Reduction w^{p-1} und höhere Potenzen von w, wie schon oben bemerkt, nur auf Glieder führen, die den Factor m enthalten. „Wenn man also auf irgend eine Art $\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}$, für „den Fall, dafs $\varphi(t)=x$ eine Wurzel der Gleichung $W=0$ ist, als ganze „Function von $\varphi(t)$ ausdrückt, so sind die Coëfficienten derjenigen Potenzen „von x in dieser ganzen Function, welche vor x^{p-1} vorhergehen, $\equiv$ den „Coëfficienten der entsprechenden Potenzen in der unendlichen Reihen-Entwicklung von $\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}$ nach Potenzen von x; oder auch, es ist $\varphi(nt)=$ dem „Anfange der Entwicklung von $\varphi(nt)$, wenn man die Reihe vor x^p abschneidet, „$+$ dem $m$fachen einer ganzen Function von x, welche den Factor x enthält." Die gebrochenen Zahlen hindern nicht die Anwendung der gewöhnlichen Sätze von Congruenzen, sobald man sich nur überzeugt, dafs keiner der vorkommenden Nenner den Modul als Divisor enthält. Statt des Anfangs der Entwicklung von $\varphi(nt)$ kann man auch irgend eine andere ganze Function

von x setzen, welche mit demselben in den vor x^p vorhergehenden Potenzen übereinstimmt: denn x^p und höhere Potenzen von x lassen sich sofort in das $m$fache einer ganzen durch x theilbaren Function verwandeln; nur müssen dabei stets Glieder vermieden werden, welche m im Nenner haben. Man kann also z. B. $\varphi(nt)$ nach Potenzen von t entwickeln, vor t^p abschneiden und für t überall den Anfang seiner Entwicklung bis x^p excl. setzen, statt dafs man eigentlich in jeder einzelnen Potenz von t bei der Entwicklung nach x vor x^p abschneiden müfste. Setzt man also, wie in (§. 3.),

$$t = x + \beta_5 x^5 + \beta_9 x^9 + \text{in inf.}, \quad x = t + \gamma_5 t^5 + \gamma_9 t^9 + \text{in inf.}$$

und ferner die ganze Function $x + \beta_5 x^5 + \ldots + \beta_{p-4} x^{p-4} = \xi$, so ist $\varphi(nt)$ $= n\xi + \gamma_5 n^5 \xi^5 + \gamma_9 n^9 \xi^9 + \ldots + \gamma_{p-4} n^{p-4} \xi^{p-4} +$ dem $m$fachen einer durch x theilbaren ganzen Function von x, wenn für x eine Wurzel der Gleichung $W = 0$ gesetzt wird. Bezeichnet man durch E irgend eine ganze Function von x, deren Coëfficienten rational sind und m nicht im Nenner enthalten, und setzt

$$t + \gamma_5 t^5 + \ldots + \gamma_{p-4} t^{p-4} = \chi(t),$$

so wird

$$\varphi(nt) = \chi(n\xi) + m.x.E.$$

Es seien jetzt r_1, r_2, r_3, ... beliebige, nicht durch m theilbare ganze complexe Zahlen, α_1, α_2, α_3, ... beliebige nicht negative ganze Exponenten, deren Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = \sigma$, und es sei der Ausdruck

$$\varphi(r_1 t)^{\alpha_1} \varphi(r_2 t)^{\alpha_2} \varphi(r_3 t)^{\alpha_3} \ldots = Z;$$

so folgt leicht aus dem eben bewiesenen Resultate, dafs

$$Z = \chi(r_1 \xi)^{\alpha_1} \chi(r_2 \xi)^{\alpha_2} \chi(r_3 \xi)^{\alpha_3} \ldots + m.x^{\sigma}.E \text{ ist,}$$

wenn für x irgend eine Wurzel der Gleichung $W = 0$ gesetzt wird, oder auch dafs $Z =$ dem Anfange der Entwicklung von Z nach Potenzen von x ist, wenn man vor der Potenz $x^{p-1+\sigma}$ abschneidet, $+ mx^{\sigma}.E$. Man hat auch $Z = Z' + mx^{\sigma}.E$, wenn man Z' so bestimmt, dafs Z nach Potenzen von t bis $t^{p-1+\sigma}$ excl. entwickelt wird, welcher Theil der Entwicklung die Potenzen t^{σ}, $t^{\sigma+4}$, etc. bis $t^{p-5+\sigma}$ enthält, und dann statt der Potenzen von t die ihnen gleichen Reihen nach x setzt, die man entweder sämmtlich, oder in denen man auch blofs die eine Reihe für t selbst vor $x^{p-1+\sigma}$ abbrechen kann.

Setzt man resp. kr_1, kr_2, etc. statt r_1, r_2, etc. und bezeichnet $\varphi(kr_1 t)^{\alpha_1} \varphi(kr_2 t)^{\alpha_2} \ldots$ durch Z_k, so erhält man allgemein $Z_k = Z'_k + mx^{\sigma}.E_k$; wo die Coëfficienten von E_k, gleichviel auf welche Weise, von k abhangen,

und wo Z'_k gefunden wird, wenn man in der Entwicklung von Z nach t überall kt statt t schreibt und dann wie oben verfährt. Wir wollen jetzt k seine $p-1$ incongruenten Werthe (mod. m) durchlaufen lassen, und indem wir durch ΣZ_k die sich auf diese $p-1$ Werthe von k erstreckende Summe bezeichnen, die aus einer solchen Summation hervorgehende Zahl in Bezug auf eine möglichst hohe Potenz von m als Modul zu bestimmen suchen. Zunächst hat man $\Sigma Z_k = \Sigma Z'_k + m x^\sigma \Sigma E_k$; ΣE_k ist wieder von der Form E, da k nur in den Coëfficienten vorkommt, also kann man auch blofs schreiben:

$$\Sigma Z_k = \Sigma Z'_k + m x^\sigma . E.$$

Der Anfang der Entwicklung von Z_k ist von der Form

$$\delta_\sigma t^\sigma . k^\sigma + \delta_{\sigma+4} t^{\sigma+4} . k^{\sigma+4} + \ldots . + \delta_{\sigma+p-5} t^{\sigma+p-5} . k^{\sigma+p-5},$$

wo die Coëfficienten nicht von k abhangen. Es ist daher

$$\Sigma Z'_k = \delta_\sigma t^\sigma . \Sigma k^\sigma + \delta_{\sigma+4} t^{\sigma+4} \Sigma k^{\sigma+4} + \ldots . + \delta_{\sigma+p-5} . t^{\sigma+p-5} . \Sigma k^{\sigma+p-5},$$

wenn man die Potenzen von t durch den Anfang ihrer Entwicklungen nach x ersetzt, also durch ganze Functionen von x, die übrigens sämmtlich durch x^σ theilbar sind. Nun ist bekanntlich immer $\Sigma k^\mu \equiv 0 \pmod m$, aufser wenn der Exponent μ durch $p-1$ theilbar ist; in diesem letzteren Falle ist $\Sigma k^\mu \equiv 1+1+\ldots .+1 \equiv p-1 \pmod m$. Wendet man Dies auf die in obiger Reihe vorkommenden Summen dieser Art an, so erhält man ein Resultat von der Form

$$\Sigma Z'_k = -\delta_{\nu(p-1)} t^{\nu(p-1)} + m x^\sigma . E,$$

wenn $\nu(p-1)$ das einzige Vielfache von $p-1$ bezeichnet, welches sich unter den Exponenten σ, $\sigma+4$, $\sigma+8$, ... bis $\sigma+p-5$ befinden kann; ist $\sigma \equiv 0 \pmod 4$, so befindet sich immer ein Vielfaches von $p-1$ unter diesen Zahlen; im entgegengesetzten Falle verschwindet ΣZ_k, denn diese Summe mufs ungeändert bleiben, wenn man ik statt k setzt, indem ik, ebensowohl wie k, ein reducirtes Restensystem (mod. m) durchläuft. Nun ist, wie aus $\varphi(it) = i\varphi(t)$ folgt, $Z_{ik} = i^\sigma Z_k$, also $i^\sigma \Sigma Z_k = \Sigma Z_k$ und daher $\Sigma Z_k = 0$, aufser wenn $i^\sigma = 1$, nämlich $\sigma \equiv 0 \pmod 4$. Nehmen wir also σ als ein Vielfaches von 4 an und substituiren $\Sigma Z'_k = -\delta_{\nu(p-1)} t^{\nu(p-1)} + m x^\sigma E$ in $\Sigma Z_k = \Sigma Z'_k + m x^\sigma E$, so kommt $\Sigma Z_k = -\delta_{\nu(p-1)} t^{\nu(p-1)} + m x^\sigma E$, indem die beiden ganzen Functionen E in eine einzige zusammengezogen werden. Hier ist noch die Potenz $t^{\nu(p-1)}$ in Potenzen von x umzusetzen, deren niedrigste $x^{\nu(p-1)}$ und deren höchste $x^{\sigma+p-5}$ ist. Um nun ΣZ_k in Bezug auf eine möglichst hohe Potenz von m als Modul zu bestimmen, müssen die Gröfsen

zur rechten Seite $-\delta_{\nu(p-1)}t^{\nu(p-1)}$ und $mx^{\sigma}E$ untersucht werden, von denen die erste nur eine symbolische Bedeutung hat. Aus der Gleichung $x^{p-1+\mu} = -A_1 x^{p-5+\mu} - \text{etc.} - mx^{\mu}$ folgt, wie schon oben bemerkt, dafs $x^{p-1+\mu}$ dem $m$fachen einer ganzen Function von x gleich ist. Man kann hinzufügen, dafs diese ganze Function mit x^{μ} aufgeht; es ist also $x^{p-1+\mu} = mx^{\mu}E$; für $\mu = 0$ ist $x^{p-1} = mxE - m$. Hieraus und aus der obigen Gleichung, wenn man in derselben $\mu \geqq p-1$ setzt, folgt wieder, dafs $x^{2(p-1)} = m^2 xE + m^2$ und $x^{2(p-1)+\mu} = m^2 x^{\mu} E$. Benutzt man dies und setzt in obiger Gleichung $x^{p-1+\mu} = -A_1 x^{p-5+\mu}$ etc., $\mu \geqq 2(p-1)$, so kommt $x^{3(p-1)} = m^3 xE - m^3$, $x^{3(p-1)+\mu} = m^3 x^{\mu} E$. So fortfahrend erhält man allgemein $x^{\lambda(p-1)} = m^{\lambda} xE + (-1)^{\lambda} m^{\lambda}$ und $x^{\lambda(p-1)+\mu} = m^{\lambda} x^{\mu} E$. Jede Potenz von x also, deren Exponent $> \lambda(p-1)$ ist, ist $=$ dem Product aus m^{λ} in eine ganze Function von x, welche durch eine gewisse Potenz von x, mindestens durch x selbst theilbar ist; wenn der Exponent $= \lambda(p-1)$ ist, so mufs zu einem solchen Producte noch $(-m)^{\lambda}$ hinzugefügt werden. Da nun die ganze Zahl ν oben so bestimmt worden ist, dafs gewifs $\sigma > (\nu-1)(p-1)$ ist, so sind x^{σ} und alle höheren Potenzen von x als x^{σ} von der Form $m^{(\nu-1)} xE$; von derselben Form ist also auch $x^{\sigma}E$, und daher $mx^{\sigma}E$ von der Form $m^{\nu} xE$. Was die Bestandtheile von $t^{\nu(p-1)}$ betrifft, so ist das erste Glied $x^{\nu(p-1)} = m^{\nu} xE + (-m)^{\nu}$; die folgenden, welche höhere Potenzen von x enthalten, sind von den Formen resp. $m^{\nu} xE$, $m^{\nu} x^2 E$, $m^{\nu} x^3 E$, u. s. w., also, um zusammenzufassen, sämmtlich von der Form $m^{\nu} xE$. Im Ganzen hat man also für $t^{\nu(p-1)}$ einen Ausdruck von der Form $m^{\nu} xE + (-m)^{\nu}$ zu setzen, und da auch $mx^{\sigma}E = m^{\nu} xE$ gefunden worden ist, so erhält man

$$\Sigma Z_k = -\delta_{\nu(p-1)} t^{\nu(p-1)} + mx^{\sigma}E = m^{\nu} xE + (-1)^{\nu+1} \delta_{\nu(p-1)} . m^{\nu}.$$

Es läfst sich annehmen, dafs die ganze Function E in dem letzten Ausdrucke mit Hülfe der Gleichung $W = 0$ auf den $p-2$ten Grad erniedrigt ist; dann ist xE vom $p-1$ten Grade; das höchste Glied in xE, welches die Potenz x^{p-1} enthält, läfst sich wieder auf die Form mE' bringen, und die Gleichung wird so endlich zu

$$\Sigma Z_k = m^{\nu} xE + m^{\nu+1} E' + (-1)^{\nu+1} \delta_{\nu(p-1)} m^{\nu};$$

wo E vom $p-3$ten, also xE vom $p-2$ten und E' ebenfalls vom $p-2$ten Grade ist. ΣZ_k ist, wie leicht zu beweisen, eine ganze, mindestens eine rationale Zahl. Zur rechten Seite der Gleichung befindet sich eine ganze Function von niedrigerem Grade als W, und da die Gleichung für alle Wurzeln x der Gleichung $W = 0$ Statt findet, so mufs sie identisch erfüllt werden; es

mufs daher ΣZ_k dem constanten, von x freien Gliede rechts gleich sein. In dem Theile $m^\nu x E$ findet sich kein solches constantes Glied, also mufs $\Sigma Z_k \equiv$ dem constanten Gliede in $m^{\nu+1}E' + (-1)^{\nu+1}\delta_{\nu(p-1)}m^\nu$ sein, mithin ist

$$\Sigma Z_k \equiv (-1)^{\nu+1}\delta_{\nu(p-1)}m^\nu \pmod{m^{\nu+1}}.$$

Die eben gefundenen merkwürdigen Resultate lassen sich auf eine etwas allgemeinere Weise folgendermafsen aussprechen:

„Wenn $F(k)$ eine *homogene* ganze ganzzahlige Function der Wurzeln „$\varphi\left(\frac{r_1 kC}{m}\right)$, $\varphi\left(\frac{r_2 kC}{m}\right)$, ... vom Grade σ bedeutet und man bezeichnet durch „$\nu(p-1)$ das kleinste Vielfache von $p-1$, welches der Bedingung $\sigma \leqq \nu(p-1)$ „genügt, so ist die Summe $\Sigma F(k)$, in der das Zeichen Σ sich auf die $p-1$ „incongruenten, nicht durch m theilbaren Werthe von k bezieht, einer durch m^ν „theilbaren ganzen Zahl gleich. Setzt man ferner t an die Stelle von $\frac{kC}{m}$ in $F(k)$ „und betrachtet t als eine unbestimmte Variable, nach deren Potenzen man „$F(k)$ in eine unendliche Reihe entwickelt, so ist der Quotient $\frac{(-1)^{\nu+1}}{m^\nu}\Sigma F(k)$ „$\equiv$ dem Coëfficienten von $t^{\nu(p-1)}$ in dieser Reihe, welche durch elementare „Methoden bestimmt werden kann. Endlich ist $F(k)$ selbst einer ganzen Func„tion von $x = \varphi(t) = \varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$ gleich, welche, bis auf Vielfache von m, mit „demjenigen Theile jener Reihe übereinstimmt, welcher die Potenzen von x, „von x^σ an bis $x^{\sigma+p-5}$ incl. enthält."

Aus diesem Satze ergiebt sich leicht folgender.

„Wenn unter denselben Voraussetzungen $F(k)$ selbst einen rationalen „(ganzen) Werth hat, so ist dieser Werth durch m^ν theilbar und der Quo„tient $\frac{1}{m^\nu}F(k) \equiv (-1)^\nu \delta \pmod{m}$; wo δ den Coëfficienten von $t^{\nu(p-1)}$ in „der obigen Reihe bezeichnet."

Denn wenn $F(k)$ einen rationalen Werth hat, so mufs dieser (nach §. 2. am Schlusse) für alle $p-1$ Werthe von k derselbe bleiben; es ist also dann $\Sigma F(k) = (p-1)F(k)$ und $\frac{1}{m^\nu}\Sigma F(k) = (p-1).\ \frac{F(k)}{m^\nu}$, also da $p \equiv 0 \pmod{m}$, $\frac{1}{m^\nu}F(k) \equiv -\frac{1}{m^\nu}\Sigma F(k) \equiv (-1)^\nu \delta$.

§. 6.

Der grofse Nutzen dieser Sätze kann erst durch mannigfaltige Anwendungen auf specielle Probleme klar werden, welche ich in der Folge zu geben beabsichtige. Bei diesen Anwendungen wird man die bisherigen Principien gewöhnlich mit dem folgenden Hülfssatze in Verbindung zu bringen haben, dessen Nothwendigkeit sich schon im Vorhergehenden fühlbar gemacht hat: dafs nämlich: „wenn eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln der Gleichung $W = 0$ „einer *rationalen* Zahl gleich ist, diese letztere nothwendig *ganz* sein mufs." Dieser leicht zu beweisende Hülfssatz, welcher für jede Gleichung richtig ist, deren höchster Term die Einheit zum Coëfficienten und sonst ganze Coëfficienten hat, scheint von *Abel* merkwürdiger Weise übersehen worden zu sein, da er mehrere solche Verbindungen der Wurzeln aufstellt, welche rationale Werthe haben, ohne zu bemerken, dafs sie deshalb allein schon nothwendig auch *ganze* Werthe haben müssen; Niemand wird aber bezweifeln, dafs man der vollständigen Erkenntnifs einer Gröfse bei weitem näher gerückt ist, wenn man weifs, sie sei eine *ganze* Zahl, als wenn man blofs weifs, sie sei eine *rationale* Zahl; wäre es auch, anderer Vortheile nicht zu gedenken, die sich später zeigen werden, blofs aus dem einfachen Grunde, weil eine ganze Zahl durch Einschliefsung zwischen Grenzen ermittelt werden kann, was bei einer blofs rationalen, deren es unendlich viele zwischen gegebenen Grenzen giebt, nicht der Fall ist. — Um den Hülfssatz zu beweisen, sei $x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-2} + \ldots + a_\mu = X = 0$ irgend eine Gleichung, in welcher $a_1, a_2, \ldots$ ganze (reelle oder complexe) Zahlen sind; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ seien ihre μ Wurzeln und $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega) = z$ sei eine beliebig gegebene ganze Function dieser Wurzeln mit ganzen Coëfficienten, also eine Summe von Termen von der Form $h\alpha^n\beta^{n'}\gamma^{n''}\ldots$, wo h eine ganze Zahl ist und die Exponenten positive ganze Zahlen sind. Man permutire in der Function $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega)$ die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ auf alle mögliche Arten und bezeichne die durch solche Permutation hervorgehenden Ausdrücke durch z', z'', z''', etc.; es wird hierbei keine Rücksicht darauf genommen, ob einige dieser Ausdrücke, incl. z selbst, einander gleich sind, sei es wegen ihrer Form, oder wegen ihres numerischen Werthes; man bilde rein typisch alle Permutationen, und es wird dann die Anzahl der Gröfsen z, z', z'', z''', etc. $1.2.3\ldots\mu$ betragen; welche letztere Zahl für einen Augenblick durch Π bezeichnet sei. Bildet man nun das Product $(x-z)(x-z')(x-z'')\ldots = x^\Pi + b_1 x^{\Pi-1} + b_2 x^{\Pi-2} + \text{etc.} = Y$, so ist z eine Wurzel der Gleichung $Y = 0$ vom Grade Π. Ich behaupte,

dafs die Coëfficienten b_1, b_2, etc. ganze Zahlen sein werden; denn sie sind offenbar zunächst ganze ganzzahlige und symmetrische Functionen von z, z', z'', etc., also auch eben solche Functionen der Wurzeln α, β, γ, ... ω: folglich sind sie endlich ganze ganzzahlige Functionen der Coëfficienten a_1, a_2, ..., also ganze Zahlen. Man kann b_1, b_2, ... übrigens *) in die Potenzsummen der Gröfsen z, z', z'', ... ausdrücken, und diese Potenzsummen setzen sich aus Summen von der Form $hS\alpha^\nu\beta^{\nu'}\gamma^{\nu''}$ .... zusammen, wo das Zeichen S sich auf alle Permutationen der Wurzeln α, β, γ, ... bezieht. Nun ist bekanntlich jede rationale Wurzel einer Gleichung von der Form $Y=0$ einer ganzen Zahl gleich: denn wäre $z=\frac{c}{d}$, wo c und d ganze Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so erhielte man aus $z^{II}+b_1z^{II-1}+b_2z^{II-2}+\ldots.=0$ die unmögliche Gleichung

$$\frac{c^{II}}{d} = -b_1c^{II-1} - b_2c^{II-2}.d - b_3c^{II-3}.d^2 - \text{etc.},$$

in welcher links ein Bruch und rechts lauter ganze Zahlen stehen. Es kann also wirklich z keinen rationalen Werth haben, ohne einer ganzen Zahl gleich zu sein. Es ist möglich, dafs der eben bewiesene Satz schon von Anderen aufgestellt worden ist, ich lege auch keinen weiteren Werth auf denselben, als insofern er mir von mannigfaltigem Nutzen bei meinen Untersuchungen gewesen ist. Um die Art der Anwendung desselben zu zeigen, will ich mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung noch einmal auf die Betrachtung der Summen von der Form $\Sigma F(k)$ zurückgehen. Aus der ursprünglichen Form von $\Sigma F(k)$ ersieht man *nicht,* dafs es eine symmetrische Function aller Wurzeln der Gleichung $W=0$ ist, man ersieht nur, dafs es eine solche Function ist, welche man eine *cyclische* nennen könnte, nemlich welche bei einer cyclischen Permutation der Wurzeln ungeändert bleibt. Hieraus folgt noch nicht, dafs sie die Eigenschaften symmetrischer Functionen der Wurzeln theilt, und es würde dieser Schlufs bei einer Gleichung im Allgemeinen gänzlich ungerechtfertigt sein; dafs dessenungeachtet $\Sigma F(k)$ in eine symmetrische Function der Wurzeln und somit in eine rationale Zahl verwandelt werden kann, liegt daran, dafs jede Wurzel als rationale Function *einer* Wurzel dargestellt werden kann, also an einer speciellen Eigenthümlichkeit der Gleichung $W=0$, und es ist dies gerade ein Punct bei diesen Untersuchungen, welcher von *Abel* mit grofser Klarheit hervorgehoben worden ist. Da man nämlich $\varphi\left(\frac{r_1kC}{m}\right)$,

*) Zur numerischen Berechnung und nicht zum Beweise des Satzes.

$\varphi\left(\frac{r_2 kC}{m}\right)$, u. s. w. durch rationale und sogar ganze Functionen von $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$ mit rationalen Coëfficienten ausdrücken kann, so wird auch $F(k) =$ einer solchen Function von $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$ allein, nämlich

$$F(k) = \Psi\left(\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)\right) = a_0 + a_1\varphi\left(\frac{kC}{m}\right) + a_2\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)^2 + \text{etc.},$$

wo a_0, a_1, etc., rationale, ***nicht*** nothwendig ganze Zahlen sind, und es ist dann $\Sigma F(k) = a_0(p-1) + a_1\Sigma\varphi\left(\frac{kC}{m}\right) + a_2\Sigma\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)^2 + \text{etc.} =$ einer symmetrischen Function aller Wurzeln mit rationalen Coëfficienten = einer ***rationalen*** Zahl. Wenn diese Transformation von $\Sigma F(k)$ nothwendig war, um zu zeigen, dafs es einen rationalen Werth hat, so mufs man doch bei der Anwendung des obigen Hülfssatzes gerade auf die ***ursprüngliche*** Form von $\Sigma F(k)$ zurückgehen. Da es in dieser Form eine ganze Function mit ***ganzen*** Coëfficienten der Wurzeln (nicht ***einer*** Wurzel) ist, so mufs es einer ganzen Zahl gleich sein, wenn es überhaupt einen rationalen Werth hat, und dies ist eben gezeigt worden. Die auf dem vorhin eingeschlagenen Wege der Transformation von $\Sigma F(k)$ in eine symmetrische Function gefundene rationale Zahl mufs sich also, gleichviel auf welche Weise, auf eine ganze reduciren. Im Allgemeinen: „Wenn eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln der Gleichung $W = 0$ „sich auf irgend eine Weise in eine symmetrische Function der Wurzeln, „wenn auch nur mit rationalen Coëfficienten, transformiren läfst, so ist sie einer „***ganzen*** Zahl gleich", denn sie ist dann als symmetrische Function einer rationalen, also deshalb nach dem Hülfsatze einer ganzen Zahl gleich. Diese Bemerkung gilt für jede Gleichung von der Form $x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-2} + \ldots$, in der a_1, a_2, ... ganze Zahlen sind. Nicht so ist es mit der folgenden Bemerkung, welche erfordert, dafs jede Wurzel sich als rationale ganzzahlige Function einer Wurzel ausdrücken läfst, nämlich: „Wenn $F(k)$, eine ganze ganzzahlige „Function der Wurzeln $\varphi\left(\frac{r_1 kC}{m}\right)$, $\varphi\left(\frac{r_2 kC}{m}\right)$, etc., für alle $p-1$ Werthe von k „denselben Werth behält, so ist $F(k)$, nämlich dieser gemeinschaftliche Werth, „selbst eine ganze Zahl"; denn es ist in diesem Falle $(p-1)F(k) = \Sigma F(k)$, welche letztere Summe sich wiederum, wie oben, in eine symmetrische Function der $p-1$ Wurzeln $\varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$, also in eine rationale Zahl transformirt; es ist also $(p-1)F(k)$ und mithin auch $F(k)$ in diesem Falle einer rationalen Zahl gleich, und letztere mufs nach dem Hülfssatze ganz sein, da $F(k)$ mit ganzen

Coëfficienten vorausgesetzt wurde. Kürzer kann das eben Bewiesene so ausgesprochen werden:

„Jede *cyclische* ganze ganzzahlige Function der Wurzeln der Gleichung $W = 0$ ist einer *ganzen* Zahl gleich." Der letztere Satz ist in dieser Form um so wichtiger, da die algebraische Auflösung der Gleichung $W = 0$, wie schon *Abel* gezeigt hat, wesentlich von den Eigenschaften und der Auffindung der *cyclischen* Functionen der Wurzeln abhangt; d. h. derjenigen, welche bei einer *cyclischen* Permutation der Wurzeln ungeändert bleiben. Wenn die Coëfficienten der cyclischen Function, statt ganze Zahlen zu sein, ganze ganzzahlige Functionen einer neuen Gröfse $\mathfrak{z}$ sind, so kann man behaupten, dafs die cyclische Function, welche in diesem Falle, um $\mathfrak{z}$ sichtbar zu machen, durch $F(k; \mathfrak{z})$ bezeichnet werden mag, sich auf eine ganze ganzzahlige Function von $\mathfrak{z}$ reducirt; nur mufs vorausgesetzt werden können, dafs $F(k; \mathfrak{z})$ für *mehr* Werthe von $\mathfrak{z}$ die Eigenschaft einer cyclischen Verbindung hat, als ihr Grad in Bezug auf $\mathfrak{z}$ beträgt. Denn setzt man, was erlaubt ist,

$$F(k; \mathfrak{z}) = F_0(k) + F_1(k)\mathfrak{z} + F_2(k)\mathfrak{z}^2 + \ldots + F_\mu(k)\mathfrak{z}^\mu,$$

wo die Coëfficienten ganze ganzzahlige Functionen der Wurzeln der Gleichung $W = 0$ sind, so hat man für jeden zweiten Werth k' von k:

$$F_0(k') + F_1(k')\mathfrak{z} + \ldots + F_\mu(k')\mathfrak{z}^\mu = F_0(k) + F_1(k)\mathfrak{z} + \ldots + F_\mu(k)\mathfrak{z}^\mu,$$

und wenn diese Gleichung für *mehr* als μ Werthe von $\mathfrak{z}$ besteht, so mufs einzeln $F_0(k') = F_0(k)$, $F_1(k') = F_1(k)$ u. s. w. sein; es sind also dann die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von $\mathfrak{z}$ selbst cyclische Functionen, folglich nach dem Obigen ganze Zahlen, und $F(k; \mathfrak{z})$ nimmt die Form

$$a_0 + a_1\mathfrak{z} + a_2\mathfrak{z}^2 + \ldots + a_\mu\mathfrak{z}^\mu$$

an, wo a_0, a_1, etc. ganze (complexe) Zahlen sind. Die Voraussetzung, dafs $F(k; \mathfrak{z})$ für *mehr* Werthe von $\mathfrak{z}$ *cyclisch* sein soll, als der Grad in Bezug auf $\mathfrak{z}$ beträgt, wird z. B. erfüllt, wenn $\mathfrak{z}$ Wurzel einer Gleichung mit ganzen Coëfficienten ist und die Eigenschaft der cyclischen Unveränderlichkeit von $F(k; \mathfrak{z})$ für alle Wurzeln dieser Gleichung Statt findet, mag übrigens $F(k; \mathfrak{z})$ dann von so hohem Grade gegeben sein, als man will; denn man kann diesen Grad mit Hülfe der Gleichung, welcher $\mathfrak{z}$ genügt, unter den Grad der Gleichung selbst reduciren, und zwar ohne einen Nenner einzuführen *), so dafs $F(k; \mathfrak{z})$ nach dieser Reduction immer noch ganzzahlig bleibt, aber zu einem Grade

*) Der Coëfficient des höchsten Gliedes der Gleichung, welcher $\mathfrak{z}$ genügt, wird $= 1$ angenommen, und es soll das Nämliche auch in der Folge bei allen Gleichungen mit ganzen Coëfficienten stillschweigend vorausgesetzt werden.

herabsinkt, der durch die Anzahl der Wurzeln der Gleichung, welcher z genügt, mindestens um eine Einheit übertroffen wird. So ist z. B. wenn man durch λ irgend einen Theiler von $p-1$, durch z irgend eine Wurzel der Gleichung $z^\lambda = 1$ und durch g eine primitive Congruenzwurzel (mod. m) bezeichnet, die λte Potenz jedes Ausdrucks wie

$$F(k)+zF(gk)+z^2F(g^2k)+\ldots+z^{p-2}F(g^{p-2}k) = L$$

eine cyclische Function und deshalb von der Form

$$L^\lambda = a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_{\lambda-1}z^{\lambda-1};$$

wo a_0, a_1, etc. *ganze,* nicht blofs rationale Zahlen (von der Form $a+bi$) sind, so oft für $F(k)$ irgend eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln $\varphi\left(\frac{rkC}{m}\right)$ gesetzt wird. Eben so verhält es sich mit einer Menge ähnlicher Verbindungen, in denen Wurzeln der Einheit neben Wurzeln der Gleichung $W=0$ vorkommen und die zum Theil von *Abel* betrachtet worden sind, bei denen man auch aus dem einmal erwiesenen cyclischen Verhalten schliefsen kann, dafs sie sich *ganzzahlig* in diejenigen Elemente *allein* ausdrücken lassen, welche sie in ihrer ursprünglichen Form neben den Wurzeln der Gleichung $W=0$ enthalten.

Wenn die cyclische Function homogen in Bezug auf die Wurzeln und vom Grade σ ist, so ist ihr Werth, nach dem weiter oben (§. 5.) Bewiesenen, durch m^ν theilbar, wo ν die kleinste der Bedingung $\sigma \leqq \nu(p-1)$ entsprechende ganze Zahl ist; und der Quotient, den sie durch m^ν dividirt giebt, ist $\equiv (-1)^\nu \delta$ (mod. m), wenn wieder δ wie oben den Coëfficienten von $t^{\nu(p-1)}$ in der Reihe bezeichnet, welche aus der cyclischen Function entspringt, nachdem man in derselben die unbestimmte Variable t an die Stelle von $\frac{kC}{m}$ gesetzt hat. Dies gilt auch, wenn die cyclische Function noch z enthält, also von der Form $F(k;z) = F_0(k)+F_1(k).z+$ etc. ist, und hierbei einzeln $F_0(k)$, $F_1(k)$, etc. cyclisch sind; diese letzteren Coëfficienten sind dann selbst durch m^ν theilbar, und δ wird eine Function von z. Man kann bei der Bestimmung von δ beliebig Vielfache von m vernachlässigen und dadurch den Werth von δ auf eine möglichst einfache Form reduciren, da δ doch nur in einer *Congruenz* (mod. m) vorkommt. Betrachten wir, um diese Art der Reduction deutlich zu machen, noch einmal die Potenz L^λ. Dieselbe ist homogen und vom Grade $\lambda\tau$, wenn $F(k)$, in $L = F(k)+zF(gk)+z^2F(g^2k)+$ etc., homogen und vom Grade τ ist. Bezeichnet $\nu(p-1)$ das kleinste die Zahl $\lambda\tau$

übertreffende oder auch das ihr gleiche Vielfache von $p-1$, so sind in $L^\lambda = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{\lambda-1} z^{\lambda-1}$ die ganzen Zahlen a_0, a_1, etc. durch m^ν theilbar und also $L^\lambda = m^\nu (b_0 + b_1 z + \text{etc.})$, wo b_0, b_1, etc. ebenfalls ganze Zahlen sind. Den Rest der letzteren (mod. m) kann man nun bestimmen, wenn man den Coëfficienten von $t^{\nu(p-1)}$ in der Entwicklung von L^λ aufsucht. Um diese Entwicklung zu erhalten, hat man zunächst statt $F(k)$ dieselbe ganze ganzzahlige Function von $\varphi(r_1 t)$, $\varphi(r_2 t)$, etc. zu setzen, welche $F(k)$ von $\varphi\left(\frac{r_1 kC}{m}\right)$, $\varphi\left(\frac{r_2 kC}{m}\right)$, etc. bedeutet, und die so erhaltene Function der unbestimmten Variabeln t nach Potenzen von t zu entwickeln. Es sei die hieraus hervorgehende Reihe $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \text{etc.}$, oder besser:

$$c_\tau t^\tau + c_{\tau+1} t^{\tau+1} + \text{in inf.} = R(t).$$

Es ist nämlich $F(k)$ von der Dimension τ in Bezug auf die Wurzeln angenommen worden, und da jede der Gröfsen $\varphi(r_1 t)$, $\varphi(r_2 t)$, etc. in ihrer Entwicklung schon mit der ersten Potenz von t und nicht mit einem constanten Gliede beginnt, so fängt eine ganze Function derselben von der Ordnung τ mit der Potenz t^τ an. Für $F(gk)$, $F(g^2 k)$, etc. hat man dann die Entwicklungen $R(gt)$, $R(g^2 t)$, etc. zu setzen; diese sämmtlichen Entwicklungen brauchen nur bis $t^{\tau+p-1}$ excl. fortgeführt zu werden. An die Stelle von L tritt auf diese Weise

$$c^\tau (1 + z g^\tau + z^2 g^{2\tau} + \ldots + z^{p-2} g^{(p-2)\tau}) t^\tau$$
$$+ c_{\tau+1} (1 + z g^{\tau+1} + z^2 g^{2(\tau+1)} + \ldots + z^{p-2} g^{(p-2)(\tau+1)}) t^{\tau+1} + \text{etc.}$$
$$= c_\tau t^\tau \Sigma z^\mu g^{\mu\tau} + c_{\tau+1} t^{\tau+1} \Sigma z^\mu g^{\mu(\tau+1)} + \text{etc.} = L(t),$$

und in der λten Potenz dieser Reihe $L(t)$ hat man den Coëfficienten von $t^{\nu(p-1)}$ aufzusuchen. Bezeichnet man denselben durch $\delta = \delta_0 + \delta_1 z + \text{etc.} + \delta_{\lambda-1} z^{\lambda-1}$, so ist $b_0 \equiv \delta_0$, $b_1 \equiv \delta_1$ etc. (mod. m). Bei der Aufsuchung von δ findet nun, da man Vielfache von m vernachlässigen darf, folgende Vereinfachung Statt. Man kann, wenn $p-1 = \lambda e$ gesetzt wird, aus der Reihe $L(t)$ alle diejenigen Potenzen von t weglassen, deren Exponent nicht mit e aufgeht, denn ihre Coëfficienten sind durch m theilbar. Man hat nämlich allgemein, wegen $z^\lambda = 1$, für jede ganze Zahl ϱ:

$$1 + z g^\varrho + z^2 g^{2\varrho} + \ldots + z^{p-2} g^{(p-2)\varrho} = \text{dem Producte}$$
$$(1 + z g^\varrho + z^2 g^{2\varrho} + \ldots + z^{\lambda-1} g^{(\lambda-1)\varrho})(1 + g^{\lambda\varrho} + g^{2\lambda\varrho} + \ldots + g^{(e-1)\lambda\varrho}),$$

und hier ist der zweite Factor $= \frac{1-g^{e\lambda\varrho}}{1-g^{\lambda\varrho}} \equiv \frac{1-g^{\varrho(p-1)}}{1-g^{\varrho\lambda}}$ durch m theilbar,

aufser wenn $\varrho \equiv 0 \pmod{e}$, dann ist derselbe $\equiv e \pmod{m}$; unter den Werthen $\varrho = \tau,\ \tau+1,\ \tau+2$, etc. brauchen also, da übrigens keiner der Coëfficienten c_τ, $c_{\tau+1}$, bis $c_{\tau+p-2}$ den Divisor m im Nenner enthalten kann, nur die durch e theilbaren beibehalten zu werden, und an die Stelle von $L(t)$ kann man schreiben:

$$e.\{c_{\nu e}(1+zg^{\nu e}+z^2g^{2\nu e}+\ldots.+z^{\lambda-1}g^{(\lambda-1)\nu e})t^{\nu e}+\text{etc.}\}.$$

In der λten Potenz dieser Reihe ist der Coëfficient der niedrigsten Potenz von t, deren Exponent mit $p-1$ aufgeht, nämlich der Coëfficient von $t^{\lambda\nu e} = t^{\nu(p-1)}$, offenbar

$$e^\lambda c_{\nu e}^\lambda(1+zg^{\nu e}+z^2g^{2\nu e}+\ldots.+z^{\lambda-1}g^{(\lambda-1)\nu e})^\lambda.$$

Diesem sehr einfachen Ausdrucke, mit $(-1)^\nu$ multiplicirt, ist also die ganze complexe Zahl aus λten Wurzeln der Einheit

$$\frac{L^\lambda}{m^\nu} = b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots.+b_{\lambda-1}z^{\lambda-1} \text{ congruent } (\text{mod. } m).$$

Setzt man hier an die Stelle von z eine Wurzel der Congruenz $z^\lambda \equiv 1 \pmod{m}$, also eine Potenz von g^e, so verwandelt sich der Factor

$$1+zg^{\nu e}+\ldots.+z^{\lambda-1}g^{(\lambda-1)\nu e},$$

welcher $= \frac{1-g^{\nu(p-1)}}{1-zg^{\nu e}}$ ist, in eine durch m theilbare ganze Zahl; mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn gerade die specielle Wurzel $g^{-\nu e}$ statt z gesetzt wird. In diesem Falle wird der eben betrachtete Factor $\equiv \lambda \pmod{m}$. Die mehrgliedrig complexe Zahl $b_0+b_1z+\ldots.$ geht also für jede Wurzel der Congruenz $z^\lambda \equiv 1 \pmod{m}$ in eine durch m theilbare ganze Zahl über; nur für die eine Wurzel $g^{-\nu e}$ geht sie in eine ganze Zahl über, welche $\equiv (-1)^\nu e^\lambda c_{\nu e}^\lambda.\lambda^\lambda \equiv (-1)^\nu(p-1)^\lambda c_{\nu e}^\lambda \equiv (-1)^{\nu+\lambda}c_{\nu e}^\lambda \pmod{m}$ ist, d. h. $\equiv (-1)^{\nu+\lambda}$ mal der λten Potenz des Coëfficienten von $t^{\nu e}$ in der für $F(k)$ zu setzenden unendlichen Reihe. Im Vorbeigehen bemerkt, heifst dies, im Sinne der von ***Kummer*** eingeführten idealen Primfactoren: die complexe Zahl $b_0+b_1z+\ldots.$ enthält alle idealen Primfactoren von m aus λten Wurzeln der Einheit, mit Ausnahme desjenigen, welcher zur Congruenzwurzel $g^{-\nu e}$ gehört; der letztere kann nur dann in b_0+b_1z+ etc. enthalten sein, wenn der Coëfficient $c_{\nu e}$ durch m theilbar ist. Analoge Betrachtungen lassen sich, statt auf die Potenz L^λ, auf ein Product mehrerer Factoren von der Form $F(k)+z^\alpha F(gk)+z^{2\alpha}F(g^2k)+$ etc. anwenden, welches eine ***cyclische*** Function darstellt, sobald die Summe aller Exponenten α in den verschiedenen Factoren ein Vielfaches von λ ergiebt, mag übrigens die Function F als dieselbe, oder verschieden in den verschie-

denen Factoren angenommen werden. Ohne für den Augenblick in weiteres Detail einzugehen, will ich unter den Resultaten, welche sich in Folge einer ausführlichen Entwicklung der obigen Principien ergeben und auf welche ich später zurückkommen werde, nur eine characteristische Eigenschaft der in den Auflösungsformeln für die Wurzeln der Gleichung $W = 0$ vorkommenden ***Irrationalitäten*** als besonders bemerkenswerth hervorheben. Ehe die neuesten zahlentheoretischen Arbeiten von ***Kummer*** erschienen und mir bekannt geworden waren, hatte ich diese Eigenschaft in einer ziemlich complicirten Form gefunden; sie läfst sich mit gröfster Einfachheit und Kürze aufstellen, wenn man den schon oben berührten Begriff der *idealen* Zahlen zu Hülfe nimmt, und zwar müssen die Elemente der idealen Zahlen nicht als reell, wie bei ***Kummer***, sondern selbst als complex und von der Form: $a + bi$ angenommen werden. Man findet dann, dafs mit Hülfe dieser Gattung idealer Zahlen den Formeln für die Theilung der ganzen Lemniscate durch den Divisor m immer eine solche Form gegeben werden kann, ***dafs die vorkommenden Wurzelzeichen sich nur auf ideale Primfactoren des Divisors m beziehen und dafs die Potenzen und Producte jener Primfactoren von m unter den Wurzelzeichen ein demjenigen ganz analoges Gesetz befolgen,*** welches ***Kummer*** für die Kreistheilung und in Rücksicht auf die gewöhnlichen idealen Primfactoren der reellen Primzahl p nachgewiesen hat. Die so beschriebenen Irrationalitäten sind in der Lemniscatentheilung noch mit gewissen rationalen Factoren aufserhalb des Wurzelzeichens multiplicirt, welche durch die complicirte Natur der lemniscatischen Functionen bedingt werden. Diese zu den wesentlichen Wurzelgröfsen hinzutretenden rationalen Factoren entziehen sich den von mir angewandten Principien; sie kommen übrigens auch schon in der Kreistheilung vor, wenn man statt der Wurzeln der Einheit andere trigonometrische Functionen, z. B. die Tangenten aliquoter Theile des Kreis-Umfanges betrachtet. Glücklicher Weise ist aber die Bestimmung der genannten Factoren für eine ganze Reihe von zahlentheoretischen Anwendungen nicht erforderlich, sondern nur die genaue Untersuchung der wesentlichen Wurzelgröfsen selbst; welche letztere, wie bemerkt, mittels der obigen Principien vollständig durchgeführt werden kann.

§. 7.

Nachdem in den vorhergehenden drei Paragraphen allgemeine Principien auseinandergesetzt worden sind, auf die ich mich in der Folge stützen

werde, soll hier die vollständige Durchführung eines speciellen Problems aus der Lemniscatentheilung versucht werden, welches wegen seiner Anwendung in der Theorie der 8ten Potenzreste ein besonderes Interesse hat. Neben den cyclischen Verbindungen der Wurzeln der Gleichung $W=0$ hat schon *Abel* diejenigen als besonders wichtig erkannt, welche, wie dies z. B. bei dem oben betrachteten Ausdrucke $F(k)+zF(gk)+z^2F(g^2k)+$ etc. der Fall ist, zu einer gewissen Potenz erhoben werden müssen, um eine cyclische Function zu ergeben. Ich beabsichtige hier ins Einzelne solche Functionen zu untersuchen, deren *achte* Potenz die eben genannte Eigenschaft hat und welche man als cyclische Verbindungen achter Ordnung bezeichnen kann, während dann die früher definirten gewöhnliche cyclische Functionen, oder cyclische Functionen erster Ordnung benannt werden müssen. Zuvor will ich noch einige Bemerkungen über die cyclischen Functionen 2ter und 4ter Ordnung vorausschicken, deren Untersuchung als Einleitung zu der viel schwierigeren Theorie der cyclischen Functionen 8ter Ordnung angesehen werden kann.

In einer früheren Abhandlung ist bereits ein sehr einfacher Ausdruck betrachtet worden, dessen *4te* Potenz einen rationalen Werth annimmt; ich will denselben hier in einer von der dortigen etwas verschiedenen Weise darstellen. Bezeichnet man der Kürze wegen die Wurzeln $\varphi\left(\frac{rC}{m}\right)$ durch $\psi(r)$ und, wie oben, durch g eine primitive Congruenzwurzel (mod. m), so sind

$$(1.)\quad \psi(k),\quad \psi(gk),\quad \psi(g^2k),\ \ldots.\ \psi(g^{p-1}k)$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $W=0$. Ich wähle die Zahl g unter derjenigen Hälfte, welche der Bedingung $g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv i$ (mod. m) und *nicht* der entgegengesetzten $g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv i$ (mod. m) genügen. Bildet man den Ausdruck

$$\psi(k)\psi(gk)\psi(g^2k)\ \ldots.\ \psi(g^{p-2}k),$$

so ist derselbe, als Product aller Wurzeln, $=$ dem letzten Coëfficienten der Gleichung $W=0$, und zwar mit positivem Zeichen, weil der Grad $p-1$ dieser Gleichung eine gerade Zahl ist. Man hat folglich

$$(2.)\quad \psi(k)\psi(gk)\psi(g^2k)\ldots.\psi(g^{p-2}k)=m.$$

Dieses Product, dessen Werth m ist, will ich in vier Partialproducte zerlegen, indem ich die ersten $\frac{1}{4}(p-1)$ Factoren und dann von den folgenden ebenfalls immer $\frac{1}{4}(p-1)$ vereinige. Diese vier Partialproducte lassen sich leicht auf einander reduciren. Bezeichnet man das erste derselben mit $P(k)$, setzt also

$$(3.)\quad P(k)=\psi(k)\psi(gk)\ldots.\psi(g^{\frac{1}{4}(p-5)}k)$$

und bedenkt, dafs allgemein

$$\psi(g^{\frac{1}{4}(p-1)}r) = \psi(ir) = i\psi(r), \quad \psi(g^{\frac{1}{4}(p-1)}r) = \psi(-r) = -\psi(r);$$

und endlich $\psi(g^{\frac{3}{4}(p-1)}r) = \psi(-ir) = -i\psi(r)$ ist, so sieht man leicht, dafs die drei folgenden Producte durch resp. $i^{\frac{1}{4}(p-1)}.\boldsymbol{P}(k)$, $(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\boldsymbol{P}(k)$, $(-i)^{\frac{1}{4}(p-1)}\boldsymbol{P}(k)$ ausgedrückt werden können und dafs demnach das ganze Product in (2.) durch $i^{\frac{1}{4}(p-1)}.(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.(-i)^{\frac{1}{4}(p-1)}.\boldsymbol{P}(k)^4 = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.\boldsymbol{P}(k)^4$ ersetzt werden kann. Hieraus ergiebt sich

$$(4.) \qquad \boldsymbol{P}(k)^4 = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.m = \varepsilon m,$$

wo $\boldsymbol{P}(k)$ durch (3.) bestimmt ist. — Der Ausdruck $\boldsymbol{P}(k)$ ist eine cyclische Function 4ter Ordnung und $\boldsymbol{P}(k)^4$ eine gewöhnliche cyclische Function. Um im Allgemeinen von dem cyclischen Verhalten eines Ausdrucks sich zu überzeugen, genügt es offenbar, zu untersuchen, ob derselbe durch die Substitution von gk statt k unverändert bleibe. Man hat

$$\boldsymbol{P}(gk) = \psi(gk)\psi(g^2k) \ldots\ldots \psi(g^{\frac{1}{4}(p-5)}k)\psi(g^{\frac{1}{4}(p-1)}k),$$

und da $\psi(g^{\frac{1}{4}(p-1)}k) = \psi(ik) = i\psi(k)$ ist, so genügt $\boldsymbol{P}(k)$ der Relation $\boldsymbol{P}(gk) = i\boldsymbol{P}(k)$, und es ist folglich $\boldsymbol{P}(gk)^4 = \boldsymbol{P}(k)^4$. Ich will auf eine bestimmtere Weise, als oben geschehen, durch die Benennung cyclische Functionen vierter Ordnung alle diejenigen ganzen ganzzahligen Functionen der Gröfsen (1.) definiren, welche der Relation $\boldsymbol{F}(gk) = i\boldsymbol{F}(k)$ oder auch der entgegengesetzten Relation $\boldsymbol{F}(gk) = i^3\boldsymbol{F}(k)$ Genüge leisten; für die cyclischen Functionen der zweiten Ordnung soll auf analoge Weise die Bedingung $\boldsymbol{F}(gk) = -\boldsymbol{F}(k)$ als Definition festgesetzt werden. Unter dieser Voraussetzung ist nicht allein die vierte Potenz jeder cyclischen Function vierter Ordnung, sondern auch das Product aus irgend vier, welche derselben Relation genügen, und aus zweien, die den beiden entgegengesetzten Relationen genügen, eine gewöhnliche cyclische Function; Dasselbe gilt von dem Producte aus irgend zwei Functionen zweiter Ordnung. Da demnach, mit Rücksicht auf (§. 6.), die eben bezeichneten Verbindungen *ganzen Zahlen* gleich sein müssen, so kann man diese Bemerkung dazu anwenden, um die Werthe aller cyclischen Functionen zweiter und vierter Ordnung auf den bereits durch (4.) ermittelten Werth von $\boldsymbol{P}(k)$ zurückzuführen. Gesetzt die drei Functionen $\boldsymbol{F}(k)$, $\boldsymbol{F}'(k)$, $\boldsymbol{F}''(k)$ genügen den Bedingungen resp. $\boldsymbol{F}(gk) = i\boldsymbol{F}(k)$, $\boldsymbol{F}'(gk) = -i\boldsymbol{F}'(k)$, $\boldsymbol{F}''(gk) = -\boldsymbol{F}''(k)$, so sind, da auch $\boldsymbol{P}(gk) = i\boldsymbol{P}(k)$ ist, die folgenden Combinationen $\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{P}(k)^3$, $\boldsymbol{F}'(k)\boldsymbol{P}(k)$ und $\boldsymbol{F}''(k)\boldsymbol{P}(k)^2$ ganzen Zahlen gleich. Bezeichnet man diese ganzen Zahlen durch h, h', h'' und erhebt zur vierten Potenz, so erhält man, mit

Rücksicht auf den Werth von $P(k)^4$, aus (4.):

$$F(k)^4.(\varepsilon m)^3 = h^4, \quad F''(k)^4.\varepsilon m = h'^4, \quad F'''(k)^4.m^2 = h''^4.$$

Da nun auch $F(k)^4$, $F''(k)^4$ und $F'''(k)^4$ ganzen Zahlen gleich sind, so müssen h^4, h'^4, h''^4 durch m theilbar sein, und da m eine Primzahl ist, so mufs Dasselbe von h, h', h'' gelten. Setzt man demnach

$$h = mh_1, \quad h' = mh_1', \quad h'' = mh_1'',$$

so erhält man, nach Weglassung gemeinschaftlicher Factoren, die Resultate

$$F(k) = h_1\sqrt[4]{(\varepsilon m)}, \quad F''(k) = h_1'\sqrt[4]{(\varepsilon m)^3}, \quad F'''(k) = h_1''\sqrt[4]{(\varepsilon m)},$$

welche in folgenden Lehrsatz vereinigt werden können:

„Bezeichnet man durch Δ die Wurzelgröfse $\sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.m)}$, so ist „der Werth jeder cyclischen Function vierter Ordnung, welche der Bedingung „$F(gk) = iF(k)$ genügt, von der Form $h\Delta$. Genügt dieselbe der Bedingung „$F(gk) = -iF(k)$, so ist ihr Werth von der Form $h\Delta^3$. Endlich: ist der „Werth jeder cyclischen Function zweiter Ordnung, welche der Bedingung „$F(gk) = -F(k)$ genügt, von der Form $h\Delta^2$; und es bedeutet dabei h „jedesmal eine von der Natur der Function abhängige *ganze Zahl.*"

Als Beispiel betrachte man den Ausdruck

$$\psi(k)^\mu + i^\alpha\psi(gk)^\mu + i^{2\alpha}\psi(g^2k)^\mu + \ldots + i^{(p-2)\alpha}\psi(g^{p-2}k)^\mu,$$

welcher in die Categorie der bei *Abel* vorkommenden gehört. Die vierte Potenz dieses Ausdrucks ist von der Form $h^4(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m$, oder von der Form $h^4(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m^3$, je nachdem $\alpha \equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist. Wenn $\alpha \equiv 2 \pmod 4$, so ist schon das Quadrat desselben eine ganze Zahl von der Form $h^2(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m$.

In gewissen Fällen kann die ganze Zahl h sich auf Null reduciren; in solchen Fällen ist die cyclische Function selbst $= 0$ und die Form des Resultats wird illusorisch, da es sich von selbst versteht, dafs Null die Eigenschaften der cyclischen Functionen theilt und unter den mannigfaltigsten Formen aufgefafst werden kann; dafs aber immer solche Verbindungen existiren, für welche *h von Null verschieden* ist, ergiebt sich aus dem Obigen, und wäre es auch nur die einzige Function $P(k)$ selbst, welche gewifs dieser Bedingung genügt, indem für sie $h = 1$ ist. Die besondere Wichtigkeit dieser letztern Bemerkung wird weiter unten noch klarer hervortreten.

Das biquadratische, von *Gaufs* aufgestellte Reciprocitätsgesetz ergiebt sich, wie ich hier kurz anführen will, mit der gröfsten Leichtigkeit aus der in obigem Lehrsatze ausgesprochenen Eigenthümlichkeit der cyclischen Func-

tionen vierter Ordnung, und zwar leistet jede Function dieser Art zu dem Ende gleiche Dienste, nur ist es nöthig, wenn man m mit einer anderen primären Primzahl n vergleichen will, $F(k)$ so auszuwählen, dafs h zu n relative Primzahl wird. Dieser Bedingung genügt $P(k)$ selbst unter allen Umständen. Hat man also $F(gk) = iF(k)$ und mithin dem Lehrsatze zufolge $F(k)^4 = \varepsilon m h^4$ gefunden, so ergiebt sich nach den Principien in (§. 4.) $(\varepsilon m)^{\frac{1}{4}(q+3)} h^{q+3} = F(k)^{q+3} = F(k)^3 (F(nk) + nT(k))$; wo $N(n) = q$ gesetzt ist. Nimmt man $n \equiv g^\nu \pmod{m}$ an, so wird $F(nk) = F(g^\nu k) = i^\nu F(k)$, und wenn man noch statt $F(k)^3 T(k)$ blofs $T(k)$ schreibt und $i^\nu F(k)^4$ durch $i^\nu . \varepsilon m h^4$ ersetzt, so gelangt man zu einer Gleichung, der sich die Form

$$(\varepsilon m)^{\frac{1}{4}(q+3)} h^{q+3} - i^\nu . \varepsilon m h^4 = n . T(k)$$

geben läfst. Hier steht links eine ganze Zahl. Dividirt man dieselbe durch n, so erhält man, wenn nicht eine ganze, so doch mindestens eine rationale Zahl. Es hat also $T(k)$, welches eine ganze ganzzahlige Function der Gröfsen (1.) bedeutet, einen rationalen Werth und ist demnach nach den Principien in (§. 6.) einer ganzen Zahl gleich. Die obige Gleichung verwandelt sich demnach in eine gewöhnliche Congruenz $\pmod{n}$; aus derselben kann man noch den Factor $\varepsilon m h^4$ weglassen, da m von n verschieden und h wie vorausgesetzt zu n relative Primzahl ist; dies giebt dann

$$(\varepsilon m)^{\frac{1}{4}(q-1)} h^{q-1} \equiv i^\nu \pmod{n}.$$

Aus dieser Congruenz, in welcher $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}$ ist, ergiebt sich unmittelbar das gesuchte Reciprocitätsgesetz, wenn man bedenkt, dafs h^{q-1}, welches $\equiv 1 \pmod{n}$ ist, ebenfalls weggelassen werden kann, und dafs ν den biquadratischen Character von n in Bezug auf m (nach der Definition von *Gaufs*) bedeutet. Es ist leicht zu sehen, dafs das ganze Verfahren illusorisch werden würde, sobald $h = 0$ wäre.

Hieran schliefsen sich auch, wenn man den Analogieen der Kreistheilung folgt, diejenigen Zerfällungen der ganzen Function W, welche der Eintheilung ihrer Wurzelwerthe (1.) in zwei oder vier Perioden entsprechen. Setzt man

$$W_1 = (x - \psi(k))(x - \psi(g^2 k))(x - \psi(g^4 k)) \ldots . (x - \psi(g^{p-3} k)),$$
$$W_2 = (x - \psi(gk))(x - \psi(g^3 k))(x - \psi(g^5 k)) \ldots . (x - \psi(g^{p-2} k)),$$

so geht, wenn gk statt k substituirt wird, W_1 in W_2 und zugleich W_2 in W_1 über; es bleibt daher $W_1 + W_2$ durch diese Substitution ungeändert und $W_1 - W_2$ wechselt sein Zeichen; und zwar gilt dies für jeden Werth von x, also auch in Rücksicht der Coëfficienten dieser ganzen Functionen. Diese Coëf-

ficienten sind demnach für die Summe W_1+W_2 gewöhnliche cyclische Functionen, also ganze Zahlen, und für die Differenz W_1-W_2 cyclische Functionen zweiter Ordnung, also von der Form $h\sqrt{m}$. Hiernach ist es erlaubt

$$W_1+W_2 = Y, \quad W_1-W_2 = Z\sqrt{m}$$

zu setzen, wo Y und Z ganze ganzzahlige Functionen von x bedeuten, die erste vom Grade $\frac{1}{2}(p-1)$, die zweite vom Grade $\frac{1}{2}(p-3)$. Aus diesen Gleichungen folgt, durch Addition und Subtraction:

$$2W_1 = Y+Z\sqrt{m}, \quad 2W_2 = Y-Z\sqrt{m},$$

und da $W =$ dem Producte $W_1 W_2$ ist, „so läfst sich immer $4W$ auf die Form

$$„4W = (Y+Z\sqrt{m})(Y-Z\sqrt{m}) = Y^2-mZ^2 = Y^2+m(Zi)^2$$

„bringen." Durch eine mehr detaillirte Untersuchung läfst sich sogar zeigen, „dafs W selbst auf diese Form Y^2-mZ^2 gebracht werden kann." Y und Z sind stets beide von Null verschieden, weil sonst W als ein vollständiges Quadrat dargestellt werden könnte, was offenbar der in (§. 2.) bewiesenen Irreductibilität der Gleichung $W=0$ widerstreitet. Um wenigstens *ein* Beispiel zu geben, sei $m=-3$, $p=9$; dann ist $\varphi(-3t) = \frac{-3x+6x^5+x^9}{1+6x^4-3x^8}$, also $W = x^8+6x^4-3 = (x^4+3)^2-3.4$, $Y = x^4+3$, $Z = 2i$. Hier kann man nämlich $g = 1+i$ setzen, und die geraden Potenzen von g werden $\equiv 1$, $-i$, -1, i (mod. -3), die ungeraden Potenzen von $g \equiv$ denselben Zahlen noch mit $1+i$ multiplicirt; es nehmen daher W_1 und W_2 die Formen resp. x^4-w^4 und $x^4-w'^4$ an, wo w^4 und w'^4 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $\xi^2+6\xi-3=0$ sind. — Diese Art der Zerfällung steht im genauesten Zusammenhange mit der von *Dirichlet* im 24ten Bande gegenwärtigen Journals untersuchten Anzahl der binären quadratischen Formen in der complexen Zahlentheorie; doch will ich dem hochgeehrten Verfasser in der näheren Auseinandersetzung jenes Zusammenhanges nicht störend vorgreifen, da der zweite Theil seiner betreffenden Abhandlung (a. a. O. Seite 291) noch zu erwarten ist und *Dirichlet's eigene* weitere Durchführung dieses Gegenstandes gewifs ein Wunsch aller Freunde der Zahlentheorie sein wird.

Eine der obigen analoge Betrachtung der vier Factoren von W, welche der Zerlegung der Totalität der $p-1$ Wurzeln in 4 Perioden entsprechen, zeigt, mit Rücksicht auf die Eigenthümlichkeit der cyclischen Functionen vierter Ordnung, dafs diese vier Factoren in der Form

$$\tfrac{1}{4}(Y+Y'\Delta+Y''\Delta^2+Y'''\Delta^3)$$

enthalten sind, aus welcher sie hervorgehen, wenn man der Wurzelgröfse $\Delta = \sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m)}$ ihre vier verschiedenen Werthe giebt. Y, Y', Y'', Y''' sind vier ganze Functionen von x mit ganzen Coëfficienten; die erste Y ist vom Grade $\frac{1}{4}(p-1)$, die übrigen drei sind wenigstens um einen Grad niedriger. Bezeichnet man nämlich die vier Factoren durch W_0, W_1, W_2, W_3, so ist nur zu bemerken, dafs die ganzen Functionen von x:

$$W_0+W_1+W_2+W_3, \quad W_0+iW_1-W_2-iW_3, \quad W_0-W_1+W_2-W_3$$
$$\text{und} \quad W_0-iW_1-W_2+iW_3,$$

so wie ihre Coëfficienten, cyclische Verbindungen resp. von der ersten, vierten, zweiten und vierten Ordnung sind, und dafs aufser der ersten in den drei anderen das höchste Glied $x^{\frac{1}{4}(p-1)}$ sich aufhebt. Das Übrige ergiebt sich leicht.

Cyclische Verbindungen *achter* Ordnung, zu denen ich jetzt übergehe, finden nur dann Statt, wenn $p \equiv 1 \pmod 8$, also $\frac{1}{4}(p-1)$ eine gerade Zahl ist. Unter dieser Voraussetzung, welche im Folgenden stets gelten soll, ist $(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} = +1$, $P(k)^4 = m$, und die Wurzelgröfse Δ geht in $\sqrt[4]{m}$ über.

Um die einfachste cyclische Function achter Ordnung, oder wenigstens eine solche, welche die leichteste Behandlung zuläfst, zu finden, zerlege ich das Product $P(k)$ abermals in zwei Factoren

$$(5.) \quad \begin{cases} \psi(k)\psi(g^2k)\psi(g^4k)\ldots\psi(g^{2\lambda-2}k) = Q(k), \\ \psi(gk)\psi(g^3k)\psi(g^5k)\ldots\psi(g^{2\lambda-1}k) = R(k), \end{cases}$$

wo der Kürze wegen $p-1 = 8\lambda$ gesetzt ist. Aus Q und R bilde ich die Verbindung

$$(6.) \quad Q(k) - \omega i R(k) = S(k) = S(k;\omega),$$

in welcher ω *irgend eine* der beiden Wurzeln der Gleichung $\omega^2 = i$ bezeichnet. Zwischen den Functionen Q und R finden folgende Relationen, bei denen nicht zu vergessen, dafs $\psi(g^{2\lambda}k) = \psi(ik) = i\psi(k)$ ist, Statt: $Q(gk) = R(k)$, $R(gk) = Q(g^2k) = iQ(k)$, $R(g^2k) = iQ(gk) = iR(k)$, u. s. w.; ferner $QR = P$, $Q^4R^4 = P^4 = m$. Für die Function S ergiebt sich hieraus $S(gk) = Q(gk) - \omega i R(gk) = R(k) + \omega Q(k) = \omega(Q(k) - \omega i R(k)) = \omega S(k)$; also ist S in der That eine cyclische Verbindung 8ter Ordnung: denn aus $S(gk) = \omega S(k)$ folgt $S(gk)^8 = S(k)^8$, da $\omega^8 = 1$ ist; und zwar gilt dies für beide Werthe von ω, die der Gleichung $\omega^2 = i$ genügen und deren einer dem andern entgegengesetzt und zugleich die 5te Potenz desselben ist. Statt indessen gleich von vorn herein bis zur 8ten Potenz von S aufzusteigen, be-

trachte ich zunächst S^2 und andere eben so einfache Verbindungen, welche sich bequem mit den bereits untersuchten cyclischen Functionen 4ter Ordnung vergleichen lassen. Beachtet man die für alles Folgende sehr wesentlichen Relationen

$$(7.)\quad P(gk) = iP(k) = \omega^2 P(k),\quad S(gk;\omega) = \omega S(k;\omega),$$
$$S(gk;\omega^5) = \omega^5 S(k;\omega^5),$$

so zeigt sich leicht, dafs die Verbindungen

$$S(k;\omega)^2 P(k)^3,\quad S(k;\omega^5)^2 P(k)^3,\quad S(k;\omega)S(k;\omega^5)P(k)$$

durch die Substitution von gk statt k unverändert bleiben; denn die in Folge der Relationen (7.) als Factoren hinzutretenden Potenzen von ω vereinigen sich jedesmal zu $\omega^8 = 1$. Da diese Unveränderlichkeit für beide Werthe von ω Statt findet, so sind alle jene Verbindungen nach (§. 6.) ganzen complexen Zahlen von der Form $A + B\omega$ gleich, so dafs A und B gewöhnliche ganze complexe Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit bedeuten. Um jene Verbindungen übersichtlicher darzustellen, kann man $S(k;\omega^5) = S'(k)$ setzen und die Zahl k überall weglassen, so dafs $S = Q - \omega iR$, $S' = Q + \omega iR$ geschrieben wird. Dann sind also

$$(8.)\quad S^2P^3,\quad S'^2P^3,\quad SS'P,\quad = \text{ganzen Zahlen von der Form } A + B\omega.$$

Ich entwickle jetzt die Ausdrücke in (8.), indem ich statt S und S' wieder die Verbindungen $Q - i\omega R$ und $Q + i\omega R$ setze und die Gleichungen $QR = P$, $P^4 = m$ zu Hülfe nehme. Dies giebt

$$S^2P^3 = (Q^2 - iR^2 - 2\omega iQR)P^3 = (Q^2 - iR^2)P^3 - 2\omega iP^4.$$

Der Coëfficient von ω wird also $= -2im$ und ist *a priori* angebbar; der übrige Theil $(Q^2 - iR^2)P^3$, welcher ω nicht enthält, mufs für sich ebenfalls einer ganzen Zahl gleich sein. Dies kann *a posteriori* nachgewiesen werden; denn setzt man gk statt k, so geht Q^2 in R^2, R^2 in $-Q^2$, also $Q^2 - iR^2$ in $R^2 + iQ^2 = i(Q^2 - iR^2)$, ferner P^3 in i^3P^3 über, also bleibt $(Q^2 - iR^2)P^3$ durch diese Substitution unverändert und ist deshalb nach (§. 6.) einer ganzen Zahl gleich. Diese ganze Zahl ist überdies nach (§. 5.) durch m theilbar, da der Ausdruck in Bezug auf die Wurzeln (1.) homogen und vom Grade $2\lambda + 6\lambda = 8\lambda = p - 1 > 0$ ist. Die für S^2P^3 zu setzende complexe Zahl $A + B\omega$ hat also die beiden Eigenschaften $B = -2im$ und $A \equiv 0 \pmod{m}$. Der Werth von S'^2P^3 geht entweder aus dem von S^2P^3 durch Vertauschung von ω mit $\omega^5 = -\omega$ hervor, oder kann auf dieselbe Weise ermittelt werden,

und man erhält

$$(9.) \qquad S^2P^3 = m(u-2i\omega), \quad S'^2P^3 = m(u+2i\omega).$$

Die Multiplication dieser beiden Gleichungen giebt

$$S^2S'^2P^6 = m^2(u+2i\omega)(u-2i\omega).$$

Läfst man links P^4, rechts statt dessen den Factor m weg, so kommt $(SS'P)^2 = m(u+2i\omega)(u-2i\omega)$, und da $SS'P$ ebenfalls eine ganze Zahl und zwar eine gewöhnliche complexe Zahl ist, indem $SS'P = (Q^2+iR^2)P$ die Wurzel ω nicht enthält, so mufs $m(u+2i\omega)(u-2i\omega)$ ein vollständiges Quadrat sein; woraus hervorgeht, dafs $(u+2i\omega)(u-2i\omega)$ (welches sich übrigens auf die gewöhnliche complexe Zahl u^2+4i reducirt) mit m aufgeht und dafs der Quotient der Division ebenfalls ein vollständiges Quadrat sein mufs. Setzt man $(u+2i\omega)(u-2i\omega) = mv^2$, so ist v eine gewöhnliche ganze complexe Zahl und man findet

$$(10.) \qquad SS'P = mv, \quad (u+2i\omega)(u-2i\omega) = mv^2.$$

Aus dem Werthe $\pm 2im$ des Coëfficienten von ω in S^2P^3 und S'^2P^3 (9.) ergiebt sich sogleich, dafs diese Gröfsen, und folglich auch S und S' selbst, ***von Null verschieden sind und dafs es demnach immer cyclische Verbindungen achter Ordnung giebt, die einen von Null verschiedenen Werth haben.*** — Die ganze Zahl u bleibt unbekannt; es läfst sich indessen ihr Rest (mod. m) angeben. Zu dem Ende ist es nach den Principien von (§. 5.) nur nöthig, den Ausdruck $(Q^2-iR^2)P^3 = mu$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen von t zu entwickeln, nachdem man zuvor t statt $\frac{kC}{m}$ in den Wurzelgröfsen $\psi(k) = \varphi\left(\frac{kC}{m}\right)$, $\varphi(gk) = \psi\left(\frac{gkC}{m}\right)$ u. s. w. gesetzt hat, und in diese Reihe den Coëfficienten der niedrigsten Potenz von t aufzusuchen, deren Exponent durch $p-1$ theilbar ist. Für das vorliegende Beispiel wird die Auffindung jenes Coëfficienten dadurch ungemein erleichtert, dafs der zu entwickelnde Ausdruck vom Grade $p-1$ ist und also nur das erste Glied der Entwicklung, welches die Potenz t^{p-1} enthält, beibehalten zu werden braucht; auch bei der Entwicklung der einzelnen Theile ist jedesmal nur das erste Glied beizubehalten nöthig. Da wir es hierbei nur mit Producten von der Form $\varphi(rt)\varphi(r't)\varphi(r''t)$ zu thun haben, so bemerke man, dafs allgemein die Entwicklung der lemniscatischen Function $\varphi(rt)$ mit rt als erstem Gliede beginnt, und dafs demnach für ein Product wie $\varphi(rt)\varphi(r't)\varphi(r''t)\ldots$ der erste Coëfficient der Entwicklung zu dem Product der Zahlen $rr'r''\ldots$ wird,

wobei übrigens die Zahlen r, r', r'', ... ungleich, oder auch zum Theil gleich sein können. Hiernach fängt, wenn man die Entwicklung ausführt, Q^2 mit $(g^2g^4g^6 \ldots g^{2\lambda-2})^2 t^{2\lambda} \equiv g^{2\lambda(\lambda-1)} t^{2\lambda}$, R^2 mit $(gg^3g^5 \ldots g^{2\lambda-1})^2 t^{2\lambda} \equiv g^{2\lambda^2} t^{2\lambda}$ an, also $Q^2 - iR^2$ mit $g^{2\lambda(\lambda-1)}(1-ig^{2\lambda})t^{2\lambda}$; ferner fängt P^3 mit $(gg^2g^3g^4 \ldots g^{2\lambda-1})^3 t^{6\lambda} \equiv g^{3\lambda(2\lambda-1)} t^{6\lambda}$, also endlich der zu untersuchende Ausdruck $(Q^2 - iR^2)P^3$ mit $g^{2\lambda(\lambda-1)+3\lambda(2\lambda-1)}(1-ig^{2\lambda})t^{2\lambda} \equiv g^{8\lambda^2-5\lambda}(1-ig^{2\lambda})t^{p-1}$ an. Da es sich nur um den Rest (mod. m) des gefundenen Coëfficienten $g^{8\lambda^2-5\lambda}(1-ig^{2\lambda})$ handelt, so kann man denselben vereinfachen, indem man die Congruenz $g^{2\lambda} \equiv i$ (mod. m) hinzuzieht; $1-ig^{2\lambda}$ geht dann in $1-i.i = 2$ über, $g^{8\lambda^2}$ wird $\equiv 1$, $g^{-5\lambda} \equiv g^{3\lambda} \equiv ig^{\lambda}$, also kann blofs $2ig^{\lambda}$ statt des Coëfficienten von t^{p-1} geschrieben werden. Vergleicht man dies mit dem allgemeinen Satze $\frac{1}{m^{\nu}} F(k) \equiv (-1)^{\nu}\delta$ (mod. m) in (§. 5.), so ist hier $\nu = 1$, $\delta \equiv 2ig^{\lambda}$ (mod. m), mithin $u = \frac{1}{m}(Q^2 - iR^2)P^3 \equiv -2ig^{\lambda}$ (mod. m). Man bemerke die hieraus sich ergebenden Congruenzen

$$(11.) \qquad u - 2i\omega \equiv -2i(g^{\lambda} + \omega), \quad u + 2i\omega \equiv -2i(g^{\lambda} - \omega) \text{ (mod. } m),$$

durch deren Multiplication sich das schon oben gefundene Resultat bestätigen läfst, dafs nämlich das Product $(u - 2i\omega)(u + 2i\omega)$ durch m theilbar ist; denn dieses Product wird $\equiv -4(g^{\lambda} + \omega)(g^{\lambda} - \omega) \equiv -4(g^{2\lambda} - i)$ (mod. m) und $g^{2\lambda} - i$ ist wirklich durch m theilbar. Um indessen einzusehen, wie sich der Divisor m auf die beiden Factoren vertheilt, sind einige Sätze aus der elementaren Theorie der aus achten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen nothwendig, mit welchen ich mich im folgenden Paragraphen beschäftigen werde. Inzwischen folgt über die Form von S und S', soweit das Bisherige reicht, dafs

$$(12). \qquad \begin{cases} S = \sqrt{(u - 2i\omega)}\sqrt[8]{m}, & S' = \sqrt{(u + 2i\omega)}\sqrt[8]{m}, \\ S^8 = m(u - 2i\omega)^4, & S'^8 = m(u + 2i\omega)^4 \end{cases}$$

ist, wie sich aus (9.) ergiebt, wenn man statt P seinen Werth $\sqrt[4]{m}$ setzt; das Product beider Wurzelverbindungen in (12.) enthält nur noch die eine Irrationalität $\sqrt[4]{m}$, wie aus (10.) hervorgeht, und die ganze Zahl u ist $\equiv -2ig^{\lambda}$ (mod. m). Zu einer gründlichen Erforschung der in (12.) vorkommenden Irrationalitäten ist es jedoch ebenfalls erforderlich, die wichtigsten elementaren Sätze über die aus achten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen vorauszuschicken.

§. 8.

Die aus 8ten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen betrachte ich immer unter der Form $A+B\omega$, in welcher $A=a+bi$, $B=c+di$ gewöhnliche complexe Zahlen sind und $\omega^2=i$ ist. Vollständig ausgeschrieben wird eine solche Zahl

$$a+bi+(c+di)\omega = a+c\omega+b\omega^2+d\omega^3,$$

und wenn man $a+cx+bx^2+dx^3=a+bx^2+(c+dx^2)x=f(x)$ setzt, so wird sie $=f(\omega)$. A und B bleiben unverändert, wenn $\omega^5=-\omega$ an die Stelle von ω tritt; dann geht $A+B\omega=f(\omega)$ in $A-B\omega=f(\omega^5)$ über. Anders verhält es sich, wenn ω^3 oder ω^7 statt ω gesetzt wird, wodurch i in $-i$ und A und B gleichzeitig in ihre conjugirten Werthe $a-bi$ resp. $c-di$ übergehen. Da das Product der beiden Werthe $A+B\omega$ und $A-B\omega$, welche ich *zugeordnete* nennen will, eine wichtige Rolle spielt, und da das Wort *Norm* schon eine anderweitige, ganz bestimmte Bedeutung als Quadrat des analytischen Moduls für die imaginären Ausdrücke erhalten hat, so entsteht in der That eine Verlegenheit, wie ein solches Product zu bezeichnen sei. Ich will, in Ermangelung eines besseren Ausdrucks, das Product $(A+B\omega)(A-B\omega)=f(\omega)f(\omega^5)$, welches die gewöhnliche complexe Zahl A^2-iB^2 vorstellt, einstweilen das *Normalproduct* von $A+B\omega$ oder $A-B\omega$ nennen und durch $\mathfrak{N}(A+B\omega)=\mathfrak{N}(A-B\omega)$ bezeichnen. Die Norm von $f(\omega)$ ist dagegen das immer positive Product $f(\omega)f(\omega^7)=Nf(\omega)=Nf(\omega^7)$, die Norm von $f(\omega^3)$ das ebenfalls positive Product $f(\omega^3)f(\omega^5)=Nf(\omega^3)=Nf(\omega^5)$. Das Product aller vier Werthe $f(\omega)f(\omega^3)f(\omega^5)f(\omega^7)$ ist die Norm des Normalproducts $=N\mathfrak{N}(A+B\omega)=N(A^2-iB^2)$ und hat immer einen reellen positiven und zwar *ganzen* Werth, wenn A und B ganze Zahlen sind. Da die vorliegenden complexen Zahlen vom Standpuncte der gewöhnlichen complexen Zahlentheorie und nicht von dem der reellen angesehen werden und ω nicht sowohl als achte Wurzel der Einheit, sondern als Wurzel der Gleichung $\omega^2=i$ zu betrachten ist, so soll im Allgemeinen eine Trennung von A und B in ihre weiteren Bestandtheile nicht unnöthigerweise vorgenommen werden, und ich unterscheide nur die beiden Fälle der complexen Zahl $A+B\omega$, wenn $B=0$, und wenn B von Null verschieden ist. Im ersten Falle ist dieselbe monom und man hat $f(\omega)=f(\omega^5)$, $\mathfrak{N}f(\omega)=f(\omega)^2=A^2$, im zweiten ist sie binom und $f(\omega^5)$ ist von $f(\omega)$ verschieden. Für gewisse Betrachtungen könnte es von Interesse sein, die Fälle, in welchen die complexe Zahl auf die Form $a+b\sqrt{2}$ oder $a+b\sqrt{-2}$ gebracht werden kann und in welchen

entweder $f(\omega)$ mit $f(\omega^7)$ und $f(\omega^3)$ mit $f(\omega^5)$, oder $f(\omega)$ mit $f(\omega^3)$ und $f(\omega^5)$ mit $f(\omega^7)$ übereinstimmt, speciell hervorzuheben und von den übrigen abzusondern: für den gegenwärtigen Zweck scheint indessen eine solche Unterscheidung überflüssig und würde nur unnöthige Complicationen verursachen.

Obwohl die elementaren Sätze über diese complexen Zahlen aus der von ***Dirichlet*** gegebenen Theorie der binären quadratischen Formen für die gewöhnlichen complexen Zahlen abgeleitet werden können, wenn man der Determinante den speciellen Werth i giebt *), so scheint es mir doch einfacher und angemessener, einem demjenigen ähnlichen Wege zu folgen, welchen auch ***Dirichlet*** am Anfange seiner oben erwähnten Abhandlung (a. a. O. §. 2.) eingeschlagen hat und welcher schon von ***Gauſs*** in seinen „Disq. Arithm." für reelle Zahlen, ja selbst schon von ***Euclid*** vorgezeichnet worden ist. Man geht hierbei von folgender Grundbetrachtung aus. Ist $\alpha+\beta\omega$ eine beliebige gegebene complexe Zahl, in welcher α und β nicht nothwendig ganze Zahlen sind, sondern beliebig rationale oder irrationale Werthe haben können, $k+l\omega$ eine unbestimmte *ganze* complexe Zahl, und setzt man die Differenz

$$\alpha+\beta\omega-(k+l\omega) = (\alpha-k)+(\beta-l)\omega = f(\omega),$$

so läfst sich über die unbestimmten ganzen Zahlen k und l immer so verfügen, dafs das Product $f(\omega)f(\omega^3)f(\omega^5)f(\omega^7)<1$ wird, wobei das Zeichen $<$ in allen Fällen die Gleichheit ausschliefst. Setzt man $f(\omega)f(\omega^3)f(\omega^5)f(\omega^7)=\Pi$ und bezeichnet durch ein vorgesetztes M den analytischen Modul irgend einer Gröfse, so erhält man

$$\Pi = N[(\alpha-k)^2-i(\beta-l)^2], \qquad \sqrt{\Pi} = M[(\alpha-k)^2-i(\beta-l)^2].$$

Betrachtet man den Ausdruck $(\alpha-k)^2-i(\beta-l)^2$ als die Summe aus $(\alpha-k)^2$ und $-i(\beta-l)^2$, und bemerkt, dafs $M(\alpha-k)^2=N(\alpha-k)$ und $M(-i(\beta-l)^2)=M(\beta-l)^2=N(\beta-l)$ ist, so folgt aus einem bekannten Satze:

$$\sqrt{\Pi} \leqq N(\alpha-k)+N(\beta-l).$$

In den beiden Normen $N(\alpha-k)$ und $N(\beta-l)$ kann man die ganzen Zahlen k und l immer so bestimmen, dafs jene entweder beide $<\frac{1}{2}$ werden, oder wenigstens die eine $<\frac{1}{2}$, die andere $=\frac{1}{2}$ wird. Eine Ausnahme macht nur der Fall, wenn α und β gleichzeitig von der Form $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$ sind; d. h. man kann immer $N(\alpha-k)\leqq\frac{1}{2}$ und $N(\beta-l)\leqq\frac{1}{2}$ machen und beide untere Zeichen zugleich braucht man nur in dem einzigen eben erwähnten Falle gelten zu lassen. Mit Ausnahme dieses einen Falles hat man also stets, wenn k und l

*) Vergl. *Jacobi's* Bemerkung hierüber im 19ten Bande dieses Journals S. 316.

demgemäfs bestimmt werden, $\sqrt{\Pi} \leqq N(\alpha - k) + N(\beta - l) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$, also auch $\Pi < 1$ (nicht $\leqq 1$); wie behauptet. Was den ausgenommenen Fall betrifft, in welchem $\alpha = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ und zugleich $\beta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$, so kann man für diesen der Zahl $f(\omega)$ die Form $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) + \omega(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2}(1+i).(1+\omega)$ geben und es wird $\Pi = \frac{1}{2}$, also auch in diesem Falle $\Pi < 1$.

Aus diesem Princip geht hervor, dafs zu dem Quotienten je zweier gegebenen ganzen complexen Zahlen von der hier betrachteten Art $\frac{A + B\omega}{A' + B'\omega}$ immer eine *ganze* complexe Zahl $k + l\omega$ dergestalt bestimmt werden kann, dafs für die Differenz $\frac{A + B\omega}{A' + B'\omega} - (k + l\omega)$ die Norm des Normalproducts unter der Einheit liegt und dafs also

$$N\mathfrak{R}(A + B\omega - (k + l\omega)(A' + B'\omega)) < N\mathfrak{R}(A' + B'\omega)$$

wird. Hierdurch wird die Möglichkeit gegeben, die bekannte Operation der Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen auch für die hier vorliegenden complexen Zahlen so durchzuführen, dafs die Reihe der zu bildenden Quotienten und Reste endlich abbricht; und im Gefolge dieser Operation ergeben sich alle diejenigen elementaren Sätze über die Theilbarkeit der Zahlen durch einander und ihre Darstellbarkeit durch Producte von Primzahlen, welche das Fundament der reellen und der gewöhnlichen, von *Gaufs* eingeführten complexen Zahlentheorie ausmachen. Da sich demnach in der neuen Theorie mit wenigen Ausnahmen Alles vollkommen analog gestaltet, so wird es der Kürze wegen genügen, wiederholt auf die ersten Paragraphen der schon oft citirten Abhandlung von *Dirichlet* im 24ten Bande gegenwärtigen Journals zu verweisen und nur die eigenthümlichen Puncte der Theorie hervorzuheben, unter welchen die Betrachtung der complexen Einheiten obenan steht.

Unter den complexen Einheiten will ich alle diejenigen ganzen Zahlen zusammenfassen, deren Normalproduct eine gewöhnliche Einheit ± 1, oder $\pm i$ ist. Aufser den Potenzen von ω sind also noch die übrigen Lösungen der Gleichungen $A^2 - iB^2 = \pm 1$ und $A^2 - iB^2 = \pm i$ aufzusuchen. Ich bemerke, dafs aus den Lösungen der Gleichung $A^2 - iB^2 = +1$ sofort die der drei übrigen in der Form $A^2 - iB^2 = i^\mu$ enthaltenen Gleichungen durch Multiplication mit einer Potenz von ω hervorgehen. Denn genügt $f(\omega)$ der ersteren, so dafs $f(\omega)f(\omega^5) = 1$ ist, so hat man, $f'(\omega) = \omega^{-\mu}f(\omega)$ setzend:

$$f'(\omega)f'(\omega^5) = \omega^{-\mu}\omega^{-5\mu}f(\omega)f(\omega^5) = \omega^{-6\mu} = \omega^{2\mu} = i^\mu;$$

also genügt dann $\omega^\mu f(\omega)$ der Gleichung $A^2 - iB^2 = i^\mu$; und umgekehrt: jedesmal, wenn $f'(\omega)$ der letzteren Gleichung genügt, ist $\omega^\mu f'(\omega) = f(\omega)$ eine Lösung von $A^2 - iB^2 = 1$; so dafs demnach, wenn $f(\omega)$ *alle* Lösungen dieser Gleichung enthält, $\omega^{-\mu} f(\omega)$ *alle* Lösungen von $A^2 - iB^2 = i^\mu$ ergeben wird. *Dirichlet* hat die allgemeine Theorie der Gleichung $A^2 - DB^2 = 1$ für eine beliebige gewöhnliche complexe Zahl D aufgestellt und dabei den Fall besonders hervor gehoben, wenn D einen reellen Werth hat, oder, wie dies hier der Fall ist, das $i$fache einer reellen Zahl bedeutet. Seinen Andeutungen folgend, setze man $A = \alpha + \beta i$, $B = \gamma + \delta i$, wodurch die Gleichung

$$(\alpha + \beta i)^2 - i(\gamma + \delta i)^2 = 1$$

in die beiden

$$\text{(a.)}\quad \alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma\delta = 1 \quad \text{und} \quad \text{(b.)}\quad 2\alpha\beta - \gamma^2 + \delta^2 = 0$$

zerfällt. Die zweite läfst sich so schreiben:

$$\text{(c.)}\quad 2\alpha\beta = (\gamma + \delta)(\gamma - \delta);$$

woraus hervorgeht, dafs einer der beiden Factoren $\gamma + \delta$ und $\gamma - \delta$ gerade ist, also, da Summe und Differenz zweier Zahlen immer zugleich entweder gerade oder ungerade sind, dafs auch der andere Factor gerade sein mufs. Setzt man demnach $\gamma + \delta = 2k$, $\gamma - \delta = 2h$, so wird $\gamma = k + h$, $\delta = k - h$, $2\gamma\delta = 2(k^2 - h^2)$ und aus (c.) wird

$$\text{(d.)}\quad \alpha\beta = 2kh.$$

Erster Fall: β gerade $= 2\beta'$; $\alpha\beta' = kh = abcd$, $\alpha = ab$, $\beta' = cd$, $k = ac$, $h = bd$; aus (a.) wird $a^2b^2 - 4c^2d^2 + 2a^2c^2 - 2b^2d^2 = (a^2 - 2d^2)(b^2 + 2c^2) = 1$; da also $b^2 + 2c^2$ in 1 aufgeht und gewifs positiv ist, so kann nur $b^2 + 2c^2 = +1$ sein, also $c = 0$ und $b = \pm 1 = \varepsilon$; ferner ist dann zugleich $a^2 - 2d^2 = 1$. Hiernach ist $\beta' = cd = 0$, also auch $\beta = 0$, $k = ac = 0$, $h = \varepsilon d$, $\alpha = \varepsilon a$, $\gamma = \varepsilon d$, $\delta = -\varepsilon d$, folglich in diesem Falle $f(\omega) = \varepsilon(a + \omega(1-i)d) = \varepsilon(a + d\sqrt{2})$, während $a^2 - 2d^2 = 1$. ***Zweiter Fall:*** α gerade $= 2\alpha'$; $\alpha'\beta = kh = abcd$, $\alpha' = ab$, $\beta = cd$, $k = ac$, $h = bd$; aus (a.) wird $(2a^2 - d^2)(2b^2 + c^2) = 1$, woraus, wie vorhin, $b = 0$, $c = \pm 1 = \varepsilon$, $d^2 - 2a^2 = -1$, $\alpha = h = 0$, $\beta = \varepsilon d$, $\gamma = \delta = k = \varepsilon a$, $f(\omega) = \varepsilon(di + \omega(1+i)a) = \varepsilon i(d + a\sqrt{2})$, während $d^2 - 2a^2 = -1$. Die einfachste Lösung der Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$ ist $x = 1$, $y = 1$, also sind alle Lösungen von $x^2 - 2y^2 = -1$ in $\pm(1+\sqrt{2})^{2\nu+1}$, ν von $-\infty$ bis ∞, und alle Lösungen von $x^2 - 2y^2 = +1$ in $\pm(1+\sqrt{2})^{2\nu}$ enthalten. Daher sind alle Werthe von $f(\omega)$ in den beiden Formen

$$\pm(1+\sqrt{2})^{2\nu} \quad \text{und} \quad \pm i(1+\sqrt{2})^{2\nu+1}$$

enthalten, die sich in $\pm[i(1+\sqrt{2})]^\nu$ vereinigen lassen, weil $i^\nu = \pm 1$ oder $= \pm i$, je nachdem ν gerade oder ungerade ist. Da $i\sqrt{2} = \omega.\omega\sqrt{2} = \omega(1+i)$ ist, so hat man, in der gewöhnlichen Form ausgedrückt, $f(\omega) = \pm(i+\omega(1+i))^\nu = \pm e^\nu$, wenn die einfachste complexe Einheit $i+\omega(1+i)$ hier und im Folgenden durch e bezeichnet wird. Alle complexen Einheiten sind demnach in der Formel

$$(13.)\quad \mathfrak{E}(\omega) = \omega^\mu e^\nu \begin{Bmatrix} \mu \text{ von } & 0 \text{ bis } 7 \\ \nu \text{ von } -\infty & \text{bis } \infty \end{Bmatrix},\quad e = i+\omega(1+i) = (1+\omega)^2 : (1-i)$$

enthalten. Die Zahl e fällt, abgesehen von dem Factor i, mit dem positiven und von 1 verschiedenen Werthe $1+\sqrt{2}$ zusammen, und es sind daher alle ihre Potenzen sowohl unter sich als auch von den Potenzen von ω verschieden. Die Potenzen der zugeordneten Zahl $e' = i-\omega(1+i)$ liefern keine neuen complexen Einheiten; denn aus $ee' = 1$ folgt $e' = e^{-1}$, also fallen die positiven Potenzen von e' mit den negativen von e und umgekehrt zusammen.

Nach den complexen Einheiten sind die einfachsten complexen Zahlen $1+\omega$ und die Potenzen dieser Zahl. Von ihnen ist zu bemerken: 1) das Normalproduct von $1+\omega$ ist $(1+\omega)(1-\omega) = 1-i$, hiervon 2 ist die Norm; 2) $1+\omega$ geht für jeden ganzen Werth von μ in $1+\omega^\mu$ auf; wenn μ ungerade, so ist der Quotient eine complexe Einheit; jede Potenz von ω ist $\equiv 1 \pmod{1+\omega}$. 3) Die Potenzen von $1+\omega$ können, so oft sie als Moduln vorkommen, durch einfachere Zahlen ersetzt werden: die geraden Potenzen $(1+\omega)^2$, $(1+\omega)^4$, $(1+\omega)^6$, $(1+\omega)^8$ u. s. w. durch resp. $1\pm i$, 2, $2\pm 2i$, 4 u. s. w., die ungeraden Potenzen durch die Producte dieser Zahlen in $1+\omega$, so dafs z. B. $(1+\omega)^{17}$ mit $8+8\omega$ gleichgeltend ist. 4) Alle complexen ganzen Zahlen zerfallen in ***ungerade*** und in solche, die durch $1+\omega$ oder eine höhere Potenz von $1+\omega$ theilbar sind; jede ungerade Zahl $A+B\omega$ ist $\equiv 1 \pmod{1+\omega}$ und für sie ist eine der beiden Zahlen A, B ungerade, die andere gerade, d. h. durch $1+i$ theilbar. Wenn $A+B\omega$ durch $1+\omega$, aber nicht durch $1+i$ theilbar ist, so sind A und B beide ungerade; in jedem anderen Falle sind A und B beide durch $1+i$ theilbar. 5) Die ungeraden Zahlen kann man durch Multiplication mit Potenzen von ω und mit der einfachsten Einheit e immer so einrichten, dafs sie in Bezug auf die hier in Rede stehenden Moduln gewissen Bedingungen genügen, die in der Folge von Wichtigkeit sein werden. In $f(\omega) = A+B\omega$ ist entweder A ungerade und B gerade, oder es verhält sich umgekehrt, und in letzterm Falle wird $\omega(A+B\omega) = iB+\omega A$ eine solche Zahl, für welche der erste Bestandtheil ungerade, der

Coëfficient von ω gerade ist; unter den beiden Zahlen $f(\omega)$ und $\omega f(\omega)$ befindet sich also eine und nur eine, die dieser Bedingung genügt. Durch Multiplication mit i kann man ferner erreichen, dafs $A \equiv 1 \pmod 2$ wird, d. h. dafs in $A = a + bi$, a ungerade, b gerade wird und dafs nicht das Umgekehrte Statt findet; genügt A schon von selbst dieser Bedingung, so unterläfst man die Multiplication. Auf diese Weise ermittelt man unter den vier Zahlen $f(\omega)$, $\omega f(\omega)$, $if(\omega)$, $i\omega f(\omega)$ eine und nur eine, $A + B\omega$, für welche gleichzeitig $A \equiv 1 \pmod 2$ und $B \equiv 0 \pmod{1+i}$ ist. Nachdem dies geschehen, kann man mittels der Factoren ± 1 und e über neue Bedingungen verfügen. Je nachdem B durch 2 oder blofs durch $1+i$ theilbar ist, wird die dem Vorhergehenden gemäfs eingerichtete Zahl $\equiv 1$ oder $\equiv 1 + \omega(1-i) \pmod 2$; im letzteren Falle wird $if(\omega) \equiv e \pmod 2$. Man findet demnach unter je vier Zahlen, wie $f(\omega)$, $\omega f(\omega)$, $if(\omega)$, $i\omega f(\omega)$, stets eine und nur eine, die entweder $\equiv 1 \pmod 2$, oder $\equiv e \pmod 2$ ist; und zwar hangt das Letztere vom Reste des Quotienten $\frac{B}{1+i} \pmod{1+i}$ ab. Das Product zweier Zahlen, welche beide $\equiv e \pmod 2$ sind, ist $\equiv 1 \pmod 2$; denn dasselbe ist $\equiv e^2 \pmod 2$ und man hat $e^2 = -1 + 2\omega(1+i)i + 2i.\omega^2 \equiv -1 \equiv 1 \pmod 2$; wenn also $f(\omega)$ nicht schon $\equiv 1 \pmod 2$ ist, sondern $\equiv e \pmod 2$, so ist sicher $ef(\omega) \equiv 1 \pmod 2$. Vereinigt man dies mit dem Früheren, so folgt, dafs es, wenn $f(\omega)$ irgend eine ungerade Zahl bezeichnet, unter den acht Zahlen

$$f(\omega),\ \omega f(\omega),\ \omega^2 f(\omega),\ \omega^3 f(\omega),\ ef(\omega),\ e\omega f(\omega),\ e\omega^2 f(\omega),\ e\omega^3 f(\omega)$$

eine und nur eine giebt, welche $\equiv 1 \pmod 2$, d. h. für welche $A \equiv 1 \pmod 2$ und $B \equiv 0 \pmod 2$, für welche also, wenn $A = a + bi$, $B = c + di$ gesetzt wird, a ungerade, b, c und d gerade sind. Benutzt man endlich den Factor ± 1 dazu, um, wie es für die Anwendung auf die Theorie der achten Potenzreste am zweckmäfsigsten scheint,

$$(14.)\quad \begin{cases} A \equiv 1 \pmod{2+2i} \text{ zu machen, wenn } B \equiv 0 \pmod{2+2i} \text{ (I.) und} \\ A \equiv -1 \pmod{2+2i} \text{ zu machen, wenn } B \equiv 2 \pmod{2+2i} \text{ (II.),} \end{cases}$$

und nennt eine so bestimmte complexe Zahl eine *primäre* Zahl (der ersten oder zweiten Art, je nachdem I. oder II. Statt findet), so findet sich unter den 16, in den beiden Formeln $\omega^\mu f(\omega)$ und $\omega^\mu ef(\omega)$ enthaltenen Zahlen ebenfalls eine und nur eine primäre Zahl. Ob dieselbe zur ersten oder zweiten Art, d. h. in die Categorie (I.) oder (II.) gehört, hangt davon ab, ob B durch $2+2i$, oder blofs durch 2 und nicht mehr durch $(1+i)^3$ theilbar ist, und es kann

hierüber nicht mehr nach Willkür verfügt werden. Die in (I.) enthaltenen primären Zahlen sind $\equiv 1 \pmod{2+2i}$, die in (II.) enthaltenen $\equiv -1+2\omega \equiv 3+2\omega \pmod{2+2i}$, beide Arten sind $\equiv 1 \pmod{2+2\omega}$. Zwei Zahlen, welche entweder beide zur ersten oder beide zur zweiten Art gehören, geben mit einander multiplicirt ein Product, welches zur ersten Art gehört, denn es ist $(3+2\omega)^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 4$, also gewifs $\equiv 1 \pmod{2+2i}$. Zwei zu verschiedenen Arten gehörige primäre Zahlen geben ein in (II.) gehöriges Product; eine *monome* Zahl A, für welche also $B=0$, ist offenbar nach der hier gegebenen Definition primär und zur ersten Art gehörig, wenn sie im Sinne von *Gaufs* primär, nämlich $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ ist. Es ist von Wichtigkeit, unter den einer ungeraden Zahl $f(\omega)$ associirten und in der Form $\omega^\mu e^\nu f(\omega)$ enthaltenen Zahlen diejenigen hervorzuheben, welche gleichzeitig primär sind, wenn $f(\omega)$ als primär vorausgesetzt wird. Diese Zahlen sind in der Form $e^{2\nu} f(\omega)$ begriffen, und alle übrigen sind nicht primär; der zweite Theil dieser Behauptung wird durch das Vorhergehende evident. Um sich von der Richtigkeit des ersten Theils zu überzeugen, genügt es offenbar, zu untersuchen, ob e^2 und demnach jede Potenz von e^2 eine primäre Zahl sei. Dies ist in der That der Fall; denn $e^2 = -3+(2+2i)i\omega$ ist nicht blofs primär, sondern überdies zur Categorie (I.) gehörig, so dafs die Zahlen $e^{2\nu} f(\omega)$ primär sind und mit $f(\omega)$ zu derselben Art gehören. Eine primäre Zahl bleibt demnach primär, wenn man sie mit solchen complexen Einheiten multiplicirt, welche geraden Potenzen von $e = i+(1+i)\omega$ gleich sind. Dies ist nicht der Fall in Bezug auf andere complexe Einheiten; ferner ist es unmöglich, durch eine solche Multiplication die primäre Zahl aus einer Art in die andere zu versetzen. 6) Läfst man für einen Augenblick $f(\omega)$ die Totalität aller primären Zahlen bedeuten, so ist nach dem Vorhergehenden jede ungerade Zahl in einer der beiden Formen $\omega^\mu f(\omega)$, $\omega^\mu e f(\omega)$ enthalten, welche in der That 16 verschiedene Formen ausmachen. Es lassen sich hieraus verschiedene Folgerungen ziehn. Bildet man das Normalproduct dieser Formen, so erhält man, da $ee' = 1$ und $\omega^\mu \omega^{5\mu} = (-i)^\mu$ ist: $(-i)^\mu f(\omega) f(\omega^5) = (-i)^\mu (A^2 - iB^2)$. Da nun $f(\omega)$ primär, also jedenfalls $A \equiv 1 \pmod 2$, $B \equiv 0 \pmod 2$ vorausgesetzt wird, so hat man $A^2 - iB^2 \equiv 1 \pmod 4$, und der obige Ausdruck wird $\equiv (-i)^\mu \pmod 4$. Es wird hierdurch ersichtlich, dafs verschiedenen Formen der Zahl verschiedene Formen des Normalproducts und umgekehrt entsprechen, dafs die Zahl nur dann primär sein kann, wenn auch das Normalproduct im gewöhnlichen Sinne primär ist, dafs es keine Zahl giebt, deren Normalproduct

$\equiv 3+2i \pmod 4$ wäre, dafs eine Zahl, deren Normalproduct primär und folglich (da der andere Fall eben ausgeschlossen worden ist) $\equiv 1 \pmod 4$ ist, nur in den Formen $\pm f(\omega)$ oder $\pm ef(\omega)$ enthalten sein kann u. s. w. Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist in den Formen $i^\mu + 4L$ oder $i^\mu e^2 + 4L$ enthalten, die sich wegen $e^2 \equiv 1 \pmod{2+2i}$ in $i^\mu + (2+2i)L$ vereinigen lassen; das Biquadrat ist in $(-1)^\mu + 8L$ oder $(-1)^\mu e^4 + 8L$ zusammen in $(-1)^\mu + (4+4i)L$ enthalten, die achte Potenz immer in der Form $1+(8+8i)L$ u. s. w.

Bei der Untersuchung der ungeraden complexen ***Primzahlen***, welche nun ihren Platz findet, gehe ich dem oben festgesetzten Standpuncte gemäfs nicht von der Zerfällung der reellen, sondern, was die Betrachtung ungemein vereinfacht, von der Zerfällung der gewöhnlichen complexen Primzahlen aus. Es sei m eine solche Primzahl und wenn es möglich ist $m = (A+B\omega)(C+D\omega)$, wo beide Factoren von complexen Einheiten verschieden sind. Man kann m als primär voraussetzen, da ja die Zerfällung von Einheiten wiederum nur auf die bereits vollständig erledigten Einheiten zurückführt. $A+B\omega$ und $C+D\omega$ dürfen dann ebenfalls beide primär angenommen werden. A und B können keinen gemeinschaftlichen Factor haben, denn ein solcher könnte, da m Primzahl ist, nur m selbst sein, und $C+D\omega$ würde sich dann auf eine complexe Einheit reduciren; eben so wenig können C und D einen gemeinschaftlichen Factor haben. Die vorgelegte Gleichung zerfällt in $AC+BDi = m$ und $AD+BC = 0$; schreibt man die letztere so: $AD = -BC$, so folgt, da A zu B und D zu C relative Primzahl ist, dafs nur entweder $C = \pm A$ und dann $D = \mp B$, oder $C = \pm iA$ und dann $D = \mp iB$ angenommen werden kann. Die zweite Annahme ist deshalb unstatthaft, weil bei derselben nicht gleichzeitig A und $C \equiv 1 \pmod 2$ sein könnten, und in Bezug auf die erste können nur die obern Zeichen gelten, weil sonst ebenfalls $A+B\omega$ und $C+D\omega$ nicht beide primär sein könnten. Es wird also der zweite Factor $C+D\omega = A-B\omega$ die dem ersten $A+B\omega$ zugeordnete Zahl und $m = A^2 - iB^2$, so dafs nur noch zu untersuchen bleibt, welche Primzahlen m in diese Form gebracht und demnach als Normalproducte anderer Zahlen $A+B\omega$ angesehen werden können. Alle primären Primzahlen m zerfallen in dieser Hinsicht in zwei Classen, je nachdem sie $\equiv 1$ oder $\equiv 3+2i \pmod 4$ sind, und es ist dies dieselbe Eintheilung, welche auch bei den biquadratischen Resten eine Rolle spielt und zuerst von ***Gaufs*** aufgestellt worden ist. Dafs die zur zweiten Classe gehörigen Zahlen nicht als Normalproducte dienen können, ist schon

oben gezeigt worden; es bleibt nur zu beweisen, dafs die der ersten Classe wirklich diese Eigenschaft besitzen. Wenn $m \equiv 1 \pmod 4$, so ist $N(m) = p \equiv 1 \pmod 8$. Setzt man, wie im vorigen Paragraphen, $p-1 = 8\lambda$ und bedeutet wieder g eine primitive Congruenzwurzel (mod. m), die der Bedingung $g^{2\lambda} \equiv i \pmod m$ genügt, so ist $g^{2\lambda} - i = (g^\lambda + \omega)(g^\lambda - \omega)$ durch m theilbar, und da die beiden Factoren $g^\lambda + \omega$ und $g^\lambda - \omega$ keinen anderen gemeinschaftlichen Theiler haben können, aufser einen solchen, der in ihrer Differenz 2ω aufgeht, also eine Potenz von $1+\omega$ ist, übrigens m in keinem der beiden Factoren enthalten sein kann, da diese Zahl sonst in ± 1, dem Coëfficienten von ω aufgehen müfste: so bleibt nichts anderes übrig, als dafs m in das Product zweier complexen Factoren zerfällt, deren einer in $g^\lambda + \omega$, der andere in $g^\lambda - \omega$ enthalten ist und welche beide von complexen Einheiten verschieden sind. Nach dem Obigen ist es immer möglich, diese Zerfällung in der Form $m = (A + B\omega)(A - B\omega) = m_1 m_5$ und zwar nur in dieser Form zu bewerkstelligen, wenn $A + B\omega$ primär angenommen wird. Man kann hierbei ferner annehmen, dafs m_1 in $g^\lambda - \omega$ und m_5 in $g^\lambda + \omega$ aufgeht, dafs also $g^\lambda \equiv \omega \pmod{m_1}$ und $g^\lambda \equiv \omega^5 \pmod{m_5}$ ist. Wenn die Zerfällung $m = m_1 m_5$ in irgend einer Weise ausgeführt ist, so gehen alle Primzahlen, welche das Normalproduct m haben, und überhaupt alle in m aufgehenden Primzahlen aus m_1 oder aus m_5 durch Multiplication mit Einheiten hervor. Setzt man $f(\omega) = \varepsilon m_1$, wo ε eine Einheit ist, und soll $\mathfrak{N} f(\omega) = f(\omega) f(\omega^5) = m$ werden, so mufs, da auch schon $\mathfrak{N}(m_1) = m_1 m_5 = m$ ist, $\mathfrak{N}(\varepsilon) = 1$ werden; und dieser Bedingung genügen, wie oben gefunden, nur Einheiten von der Form $\varepsilon = \pm e^\nu$, wo $e = i + (1+i)\omega$; es ist also z. B. im_1 kein Werth von $f(\omega)$, noch weniger ωm_1. Es sind demnach alle Zahlen, deren Normalproduct $= m$ ist und die zu m_1 associirt sind, in der Form $\pm e^\nu m_1$ enthalten; eben so sind alle zu m_5 associirten Werthe, die der Bedingung $\mathfrak{N} f(\omega) = m$ genügen, in der Form $f(\omega) = \pm e^\nu m_5$ enthalten; unter allen diesen sind die ***primären:*** einerseits $f(\omega) = e^{2\nu} m_1$, andrerseits $f(\omega) = e^{2\nu} m_5$, wenn m_1 und m_5 selbst als primär vorausgesetzt werden.

Hierin ist bereits die elementare Theorie der Primzahlen vollständig enthalten; denn fügt man hinzu, dafs eine zusamengesetzte Zahl auch ein zusammengesetztes Normalproduct ergiebt und dafs jede im gewöhnlichen Sinne zusammengesetzte Zahl auch in dieser Theorie als zusammengesetzt angesehen werden mufs, ferner keine zusammengesetzte Zahl als Normalproduct einer binomen Primzahl dienen kann, so leuchtet ein, dafs, abgesehen von complexen Einheiten, welche als Factoren hinzutreten können und den Character

der Primzahl nicht verändern, von Primzahlen keine anderen existiren aufser den beiden folgenden Arten:

1) Die gewöhnlichen Primzahlen $m \equiv 3+2i \pmod 4$, deren Norm $p \equiv 5 \pmod 8$ ist, wie z. B. $-1 \pm 2i$ mit der Norm 5, $3 \pm 2i$ mit der Norm 13, u. s. w., welche in dieser Theorie ebenfalls als Primzahlen angesehen werden müssen. Es sind zugleich die einzigen gewöhnlichen Zahlen, welche hier als (monome) Primzahlen gelten, namentlich sind die gewöhnlichen ***reellen*** Primzahlen ohne Ausnahme als zusammengesetzt zu betrachten.

2) Die aus der Zerfällung der gewöhnlichen Primzahlen $m \equiv 1 \pmod 4$, deren Norm $p \equiv 1 \pmod 8$ ist, entspringenden. Diese sind die binomen Primzahlen, und jedes $m = m_1 m_5$ giebt zwei derselben m_1 und m_5, welche einander zugeordnet sind. Hierunter sind auch diejenigen begriffen, welche aus den Zerfällungen $a^2+2b^2 = (a+b(1+i)\omega)(a-b(1+i)\omega)$ und $a^2-2b^2 = (a+b(1-i)\omega)(a-b(1-i)\omega)$ reeller Primzahlen hervorgehen, welche abgesehen vom Zeichen $\pm$, resp. $\equiv 3$ und $\equiv 7 \pmod 8$ sind und deren Norm mit ihrem Quadrate zusammenfällt, also gewifs $\equiv 1 \pmod 8$ ist. Es würde indessen überflüssig sein, die Primzahlen dieser Art zu einer besonderen Gattung zu rechnen, im Gegentheil liegt es, wie schon weiter oben bemerkt, im Interesse der Einfachheit und Übersichtlichkeit für alle spätern Untersuchungen, sie gemeinschaftlich mit den übrigen hier unter 2) enthaltenen Primzahlen zu betrachten, und nur die monomen von den binomen Primzahlen zu unterscheiden.

Die Theorie der Potenzreste für die aus achten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen ist vollkommen analog derselben Theorie für die früheren complexen Zahlen. Man hat auch hier, wenn $f(\omega)$ eine ungerade Primzahl und p die Norm ihres Normalproductes bedeutet, analog dem ***Fermat***schen Satze $F(\omega)^{p-1} \equiv 1 \pmod{f(\omega)}$, für jede nicht durch $f(\omega)$ theilbare ganze Zahl $F(\omega)$. Der Exponent $p-1$ ist in allen Fällen durch 8 theilbar, und deshalb zerfällt die Differenz $F(\omega)^{p-1}-1 = F(\omega)^{8\lambda}-1$ in 8 Factoren, deren jeder die Form $F(\omega)^{\lambda}-\omega^{\mu}$ hat, wo μ die Werthe $0, 1, 2 \ldots 7$ erhält. Einer und nur einer dieser Factoren ist jedesmal durch $f(\omega)$ theilbar, und nach dem Werthe von μ, welcher die Congruenz $F(\omega)^{\lambda} \equiv \omega^{\mu} \pmod{f(\omega)}$ erfüllt, zerfallen für eine gegebene ungerade Primzahl $f(\omega)$ alle Werthe von $F(\omega)$ und für ein gegebenes $F(\omega)$ alle nicht in $F(\omega)$ aufgehenden ungeraden Primzahlen $f(\omega)$ in acht Classen, deren erste, für welche $F(\omega)^{\lambda} \equiv 1 \pmod{f(\omega)}$ ist, einerseits die achten Potenzreste $\pmod{f(\omega)}$, andrerseits alle ungeraden

Primzahlen $f(\omega)$ enthält, zu denen als Moduln eine gegebene Zahl $F(\omega)$ achter Potenzrest ist. Die vollkommen bestimmte Potenz von ω, welche in der Congruenz $F(\omega)^\lambda \equiv \omega^\mu \pmod{f(\omega)}$ für ein gegebenes $F(\omega)$ und $f(\omega)$ vorkommt, kann durch $\left(\frac{F(\omega)}{f(\omega)}\right)_8$, oder wenn keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, blofs durch $\left(\frac{F(\omega)}{f(\omega)}\right)$ bezeichnet werden, und es kann die Bedeutung dieses Symbols nach Analogie der zuerst von ***Jacobi*** *) für die ***Legendre***schen Zeichen eingeführten fruchtbaren Verallgemeinerung auf den Fall eines zusammengesetzten Nenners ausgedehnt werden, indem man unter $\left(\frac{F(\omega)}{f(\omega)f'(\omega)\ldots.}\right)_8$ das Product $\left(\frac{F(\omega)}{f(\omega)}\right)_8\left(\frac{F(\omega)}{f'(\omega)}\right)_8 \ldots.$ versteht.

Dies ist ungefähr Alles, was aus der elementaren Theorie der hier betrachteten complexen Zahlen im Folgenden vorausgesetzt werden wird, und es scheint daher ein ausführlicheres Eingehen in dieselbe überflüssig. Es versteht sich von selbst, dafs beim jetzigen Standpuncte der Wissenschaft, und namentlich in Rücksicht auf ***Dirichlet's*** und ***Kummer's*** neueste zahlentheoretische Arbeiten, die bisherigen Entwicklungen dieses Paragraphen nicht als etwas Neues beansprucht werden können, sondern nur des Zusammenhanges wegen vorgetragen worden sind. Übrigens habe ich Grund zu vermuthen, dafs auch ***Kummer,*** von demselben Principe des Algorithmus der Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers ausgehend, nicht blofs die elementare Theorie der aus 8ten, sondern auch der aus 5ten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen abgeleitet hat. Viel weiter möchte sich indessen das hier zum Grunde liegende Princip nicht erstrecken, da es wesentlich darauf beruht, dafs man das Product aller Werthe der complexen Zahl < 1 machen kann, während die Elemente derselben arithmetische Reihen mit der Differenz 1 durchlaufen, und es ist demgemäfs eine in den Pariser „Comptes rendus" vorkommende Notiz eines andern Verfassers zu berichtigen, in welcher diesem Princip die unbeschränkte und ausgedehnteste Anwendbarkeit auf complexe Zahlen aller möglichen Gattungen zugeschrieben wird.

§. 9.

Zurückkehrend zu der am Schlusse von (§. 7.) abgebrochenen Untersuchung, beschäftige ich mich jetzt mit einer näheren Erforschung der dort

*) Monatsberichte der Berl. Akademie vom Oct. 1837.

vorkommenden complexen ganzen Zahlen $u-2i\omega$ und $u+2i\omega$. Man zerlege, was für eine gewöhnliche complexe Primzahl $m \equiv 1 \pmod{2+2i}$, deren Norm $p \equiv 1 \pmod 8$, nach dem Obigen (§. 8.) immer möglich ist, m in seine beiden zugeordneten Primfactoren $m = m_1 m_5$ und setze fest, dafs diese beiden einander zugeordneten Factoren in solcher Reihenfolge genommen seien, dafs die Congruenzen

$$(15.) \qquad g^\lambda \equiv \omega \pmod{m_1} \quad \text{und} \quad g^\lambda \equiv \omega^5 \equiv -\omega \pmod{m_5}$$

erfüllt werden. Durch diese Congruenzen sind, nach Annahme einer gewissen primitiven Congruenzwurzel g, die beiden Factoren m_1 und m_5, bis auf hinzutretende Einheiten von der Form $\pm e^\nu$, vollkommen bestimmt, und eine Vertauschung von m_1 mit m_5 würde die Annahme eines neuen Werthes von g bedingen. Ferner werden m_1 und m_5 als primär vorausgesetzt und dürfen dann, wenn man nicht aus dieser Bedingung heraustreten will, nur noch mit $e^{2\nu}$ resp. $e^{-2\nu}$ multiplicirt werden. Verbindet man jetzt die Congruenzen (11.) in (§. 7.) mit denen in (15.), so erhellet, dafs $u-2i\omega$ durch m_5, aber nicht durch m_1, und $u+2i\omega$ durch m_1, aber nicht durch m_5 theilbar ist. Man kann demnach $u-2i\omega = hm_5^\alpha$ und $u+2i\omega = h'm_1^\alpha$ setzen, wo h und h' zugeordnete Zahlen sind, die mit m keinen Theiler weiter gemein haben. Das Product $(u-2i\omega)(u+2i\omega)$ nimmt demnach die Form $hh'm_5^\alpha m_1^\alpha = hh'm^\alpha$ an, und da dasselbe Product nach (§. 7.) Gleichung (10.) auf die Form mv^2 gebracht werden kann *), so mufs $hh'm^{\alpha-1} = v^2$ ein vollständiges Quadrat und $\alpha-1$ mufs daher eine gerade Zahl sein, weil nach der Voraussetzung hh' zu m relative Primzahl ist. Hieraus ergiebt sich, dafs $u-2i\omega$ und $u+2i\omega$ den Primtheiler m_5, resp. m_1, in einer ungeraden Potenz enthalten, so dafs die zu untersuchenden complexen ganzen Zahlen in folgender Form erscheinen: $u-2i\omega = hm_5^{2\beta+1}$, $u+2i\omega = h'm_1^{2\beta+1}$; wo h und h', wie bemerkt, keinen Factor, weder m_1 noch m_5, mit m gemein haben.

Um jetzt zu untersuchen, in welcher Weise dieselben Zahlen die in ihnen vorkommenden, von m_1 und m_5 ***verschiedenen*** ungeraden Primtheiler enthalten (wenigstens so weit es hier erforderlich ist), bediene ich mich der folgenden Reductionsmethode, welche sich auf die Sätze in (§. 4.) stützt und für die ganze Theorie der Lemniscatentheilung bemerkenswerth scheint. Es sei $F(k;\omega)$ irgend eine ganze ganzzahlige Function der Gröfsen (1.) und

---

*) So dafs beiläufig u und v eine Lösung der unbestimmten Gleichung $u^2 - mv^2 = -4i$ ausmachen.

von ω, welche der Bedingung $F(gk) = \omega F(k)$, und zwar für beide Werthe von ω aus $\omega^2 = i$ genügt. Jede solche Function ist eine cyclische Verbindung 8ter Ordnung und ihre 8te Potenz $F(k)^8 =$ einer ganzen Zahl aus 8ten Wurzeln der Einheit. Nach (§. 4.) ist, wenn n irgend eine von m verschiedene gewöhnliche primäre Primzahl und $N(n) = q$ ihre Norm bedeutet:

$$(16.) \quad \begin{cases} F(k;\omega)^q = F(nk;\omega^q) + nT(k;\omega), \\ F(k;\omega)^{q^2} = F(n^2k;\omega^{q^2}) + nT(k;\omega). \end{cases}$$

Wenn $q \equiv 1 \pmod 8$, so geht ω^q in ω, also $F(nk;\omega^q)$ in $F(nk;\omega) = F(nk)$ über: wenn dagegen $q \equiv 5 \pmod 8$, also erst $q^2 \equiv 1 \pmod 8$ ist, so kann man wenigstens in der zweiten Gleichung $F(n^2k)$ statt $F(n^2k;\omega^{q^2})$ schreiben; und da überdies $F(n^2k)$ und $F(nk)$ nach der Voraussetzung sich von $F(k)$ nur durch eine Potenz von ω unterscheiden, so läfst sich in beiden Fällen eine Gleichung finden, deren erster Term rechts genau dieselbe Gröfse $F(k)$ enthält, welche links zur Potenz q resp. q^2 erhoben ist. Um die für beide Fälle $n \equiv 1$ und $n \equiv 3 + 2i \pmod 4$ sich ergebenden Formeln bequem vereinigen zu können, lasse man die bisherige Bedeutung von n fallen und bezeichne vielmehr durch n das Normalproduct einer primären Primzahl h aus 8ten Wurzeln der Einheit; n ist dann, nach der Untersuchung über die complexen Primzahlen im vorigen Paragraphen, entweder selbst eine gewöhnliche Primzahl, welche $\equiv 1 \pmod 4$, oder das Quadrat einer solchen, welche $\equiv 3 + 2i \pmod 4$ ist, je nachdem h binom oder monom angenommen wird. Im ersten Falle ist h als Theiler in n enthalten und $n = hh'$; im zweiten fällt h selbst mit der früheren Bedeutung von n zusammen. Hiernach sieht man, dafs, h mag binom oder monom angenommen werden, stets eine Gleichung von der Form

$$(17.) \quad F(k;\omega)^{N(n)} = \omega^\nu F(k;\omega) + hT(k;\omega) \text{ oder kürzer } F^q = \omega^\nu F + hT$$

Statt findet, in welcher $n = \mathfrak{N}(h)$, $q = N(n)$ ist; ω^ν entspringt aus $F(nk) = \omega^\nu F(k)$, und es bedeutet also ν den der Congruenz $n \equiv g^\nu \pmod m$ oder auch $n \equiv g^\nu \pmod{m_1}$ genügenden Exponenten, und da hieraus mit Zuziehung von (15.) $n^\lambda \equiv g^{\lambda\nu} \equiv \omega^\nu \pmod{m_1}$ folgt, so kann ω^ν durch $\left(\frac{n}{m_1}\right)_8$ ersetzt werden. Die Gleichung (17.) geht für einen binomen Werth von h aus der ersten in (16.) hervor, wenn dort hh' statt n und darauf $T(k)$ statt $h'T(k)$ geschrieben wird, und fällt für einen monomen Werth von h mit der zweiten in (16.) zusammen; im letzteren Falle wird aus der ersten in (16.), weil dann $N(h) \equiv 5 \pmod 8$ ist:

$$(18.)\qquad F(k;\omega)^{N(h)} = \omega^{5\varrho}F(k;\omega^5)+hT(k;\omega) = \omega^{5\varrho}F'+hT,$$

welches nur für eine monome primäre Primzahl h gilt; ϱ genügt der Congruenz $h \equiv g^\varrho \pmod m$, also auch der Congruenz $h \equiv g^\varrho \pmod{m_1}$, und da hieraus $h^\lambda \equiv g^{\lambda\varrho} \equiv \omega^\varrho \pmod{m_1}$ folgt, so kann $\omega^{5\varrho}$ durch $\left(\frac{h}{m_1}\right)_8^5$ ersetzt werden. Die Gleichung (17.), welche später bei den arithmetischen Anwendungen in der Form

$$(17'.)\qquad F^q = \left(\frac{n}{m_1}\right).F+hT$$

zugleich mit (18.) in der Form

$$(18'.)\qquad F^{N(h)} = \left(\frac{h}{m_1}\right)^5.F'+hT$$

eine Rolle spielen wird, benutze ich für den vorliegenden Zweck, um umgekehrt nicht die $q$te Potenz F^q durch die erste F, sondern die erste Potenz F durch die übrigen Theile der Gleichung auszudrücken. Ich gebe ihr deshalb die nachstehende Form:

$$(19.)\qquad F(k) = \omega^{-\nu}F(k)^q - h.\omega^{-\nu}T(k);$$

auch wende ich sie im Augenblick nur auf den Fall an, wenn h Primtheiler der ganzen Zahl $F(k)^8$ ist. Schreibt man die Potenz $F(k)^q$ so: $F(k)^8.F(k)^{q-8}$, so wird in diesem Falle, da $q>8$, also $q-8$ ein positiver Exponent ist, die ganze Seite rechts das *hfache* einer ganzzahligen Function der Wurzeln der Gleichungen $W=0$ und $\omega^2=i$; nämlich wenn $F(k)^8 = hl$ ist: $F = h.\{\omega^{-\nu}lF^{q-8} - \omega^{-\nu}T\}$. Dies gilt für alle $p-1$ Werthe von k und für beide Werthe von ω. Wird demnach $F(k) = hF_1(k)$ gesetzt, wo $F_1(k)$ die in der Parenthese $\{\ \}$ stehende Function bedeutet, so hat man ebenfalls $F(gk) = hF_1(gk)$, indem h zugleich mit $F(k)^8$ von k unabhängig ist; und aus der Voraussetzung $F(gk) = \omega F(k)$ ergiebt sich dann, dafs auch $F_1(k)$ der analogen Relation $F_1(gk) = \omega F_1(k)$ genügt, also, wie $F(k)$, eine cyclische Function 8ter Ordnung vorstellt. Wird ω mit ω^5 vertauscht, so geht h in die ihr zugeordnete Zahl h' über, die übrigens, wenn h monom ist, mit ihr zusammenfällt, und man erhält

$$F(k;\omega^5) = h'F_1(k;\omega^5),\quad F_1(gk;\omega^5) = \omega^5F_1(k;\omega^5).$$

„Wenn also $F(k)$ irgend eine *ganze ganzzahlige* Function der Wur-
„zeln der Gleichungen $W=0$ und $\omega^2=i$ bezeichnet, die der Relation $F(gk)$
„$=\omega F(k)$ genügt, und h bedeutet einen der von m_1, m_5 und $1+\omega$ ver-
„schiedenen Primtheiler der ganzen Zahl $F(k)^8$, so läfst sich die erste Potenz
„$F(k)$ auf die Form $hF_1(k)$ bringen, wo $F_1(k)$ alle von $F(k)$ vorausgesetzten

„Eigenschaften ebenfalls besitzt. Es ist demnach $F_1(k)^8$ wieder einer ganzen „Zahl gleich und $F(k)^8$ nicht blofs durch h, sondern durch h^8 theilbar."

Statt (19.) hätte man bei dieser Reduction von $F(k)$ auch eine allgemeinere Gleichung zum Grunde legen können, in der q durch eine beliebige Potenz von q ersetzt ist und die sich eben so leicht aus den Principien von (§. 4.) ergiebt. Eine wiederholte Anwendung desselben Verfahrens, durch welches der Primfactor h herausgezogen und $F(k)$ auf die neue cyclische Function $F_1(k)$ reducirt worden ist, dient zur successiven Absonderung sämmtlicher in $F(k)^8$ aufgehenden ungeraden Primfactoren, aufser m_1 und m_5, und man kann auf diese Weise zuletzt $F(k)$ auf eine neue cyclische Function reduciren, in deren achter Potenz nur noch $1+\omega$, m_1 und m_5, und keine anderen Primfactoren mehr aufgehen. Denn ist h_1 irgend ein Primfactor der ganzen Zahl $F_1(k)^8$ (aufser m_1, m_5 und $1+\omega$, wie immer stillschweigend vorausgesetzt wird), von dem es übrigens gleichgültig ist, ob er mit h übereinstimmt oder nicht, so läfst sich nach dem Obigen wiederum $F_1(k)$ auf die Form $h_1F_2(k)$ bringen, wo auf's Neue $F_2(k)$ allen Bedingungen einer (ganzen ganzzahligen) cyclischen Function 8ter Ordnung genügt, und man hat nun schon $F(k)=hh_1F_2(k)$. Ist ferner h_2 ein Primfactor der ganzen Zahl $F_2(k)^8$, so erhält man durch das wiederholte Verfahren $F_2(k)=h_2F_3(k)$; woraus $F(k)=hh_1h_2F_3(k)$ folgt, u. s. w. Da jede ganze Zahl, also auch der Werth von $F(k)^8$, wenn man von den complexen Einheiten absieht, nur eine *endliche* Anzahl von gleichen oder ungleichen Primfactoren enthalten kann, so kommt man in der Reihe der cyclischen Functionen

$$F(k),\ F_1(k),\ F_2(k),\ F_3(k),\ \ldots.$$

nothwendig zuletzt auf eine solche, deren 8te Potenz keine von m_1 und m_5 verschiedenen ungeraden Primtheiler mehr enthält. Mit dieser letzten cyclischen Function, welche ich durch $G(k)$ bezeichnen will, findet das Verfahren sein Ende. Man hat dann $F(k)=hh_1h_2\ldots.\ G(k)=f(\omega).G(k)$, $F(k)^8=f(\omega)^8G(k)^8$. $G(k)$ ist eine der Bedingung $G(gk)=\omega G(k)$ genügende ganze ganzzahlige Function der oft erwähnten Gröfsen, und zwar, was das Wichtigste ist, von der Art, dafs $G(k)^8$ eine durch *keinen* ungeraden Primfactor aufser m_1 und m_5 theilbare ganze Zahl wird, die also nur Potenzen von $1+\omega$, m_1 und m_5 und aufserdem nur noch complexe Einheiten enthalten kann. Eine Ausnahme macht nur der einzige Fall, wenn $F(k)^8=0$, also auch $F(k)=0$ sein sollte; denn da Null durch jede beliebige ganze Zahl, also, wenn man sich so ausdrücken will, durch *unendlich viele* Primzahlen theilbar ist, so würde man

in diesem Falle bei dem Reductions-Verfahren, welches dann ohnedies ganz illusorisch wäre, nie zum Schlusse kommen, und jede folgende cyclische Function hätte, wie die erste, den Werth Null. Man sieht hieraus, wie wichtig es ist, sich nicht allein jedesmal, ehe man das Verfahren beginnt, vom Nichtstattfinden dieses Ausnahmefalles zu überzeugen, sondern auch, wie schon früher bemerkt, sich überhaupt der Existenz zunächst nur einer von Null verschiedenen cyclischen Verbindung achter Ordnung zu versichern, um sich derselben als Ausgangspunct für und zur Vergleichung mit allen andern Functionen derselben Art zu bedienen. Wenn *eine* solche von Null verschiedene Verbindung existirt (und wir haben uns davon durch die Function $S(k)$ (6.) überzeugt), so existirt auch stets eine, deren achte Potenz einen solchen ganzen Werth erhält, welcher zu einer, nicht durch m_1 oder m_5 theilbaren, sonst beliebig gegebenen ungeraden Zahl relative Primzahl wird.

Als Corollar zu dieser fortgesetzten Reductions-Methode ergiebt sich, dafs die 8te Potenz jeder cyclischen Function 8ter Ordnung (und ich verstehe darunter immer eine der Bedingung $F(gk) = \omega F(k)$ genügende ganze ganzzahlige Function) jede von m_1 und m_5 wesentlich, d. h. nicht blofs durch complexe Einheiten verschiedene ungerade Primzahl nur in einer solchen Potenz enthalten kann, deren Exponent durch 8 theilbar ist, und dafs demnach, wenn $F(k)$ in der Form $F(k) = \sqrt[8]{(F(k)^8)}$ geschrieben wird, alle diese Primzahlen aus dem Wurzelzeichen herausgezogen werden können. Wir werden bald sehen, dafs das Gleiche auch von der Primzahl $1+\omega$ und von den complexen Einheiten gilt und dafs demnach unter dem im Werthe der cyclischen Function vorkommenden nothwendigen Wurzelzeichen nur Potenzen von m_1 und m_5 enthalten sind.

Wendet man diese Reduction im einzelnen auf unsere Functionen $S(k)$, mit ihrer zugeordneten $S'(k)$ an, aus denen die Zahlen $u \mp 2i\omega$ entsprungen sind, so ergiebt sich, in Verbindung mit dem Früheren, Folgendes:

1) $S(k)$ läfst sich auf die Form $S(k) = f(\omega) G(k)$ und zugleich $S'(k)$ auf die Form $S'(k) = f(\omega^5) G'(k)$ bringen, wo $f(\omega)$, $f(\omega^5)$ zwei zugeordnete *ganze* complexe Zahlen sind und $G(k)$ eine neue cyclische Function 8ter Ordnung von gröfserer Einfachheit als $S(k)$ ist, insofern ihre 8te Potenz nur die drei Primfactoren $1+\omega$, m_1 und m_5 enthält; $G'(k)$ geht aus $G(k)$, so wie $S'(k)$ aus $S(k)$ durch Vertauschung von ω^5 mit ω hervor.

2) Die Verbindungen $S^2P^3 = m(u - 2i\omega)$, $S'^2P^3 = m(u + 2i\omega)$ und $SS'P = mv$ werden resp. zu $f(\omega)^2 G^2 P^3$, $f(\omega^5)^2 G'^2 P^3$, $f(\omega) f(\omega^5) GG'P$; und

zwar sind die neuen Verbindungen G^2P^3, G'^2P^3, $GG'P$ ebenfalls ganze Zahlen, welche keine andern als die drei obigen Primfactoren enthalten. Letzteres ergiebt sich zunächst für die achten Potenzen dieser Zahlen aus der über G^8 und G'^8 in dieser Hinsicht gemachten Voraussetzung und aus der Gleichung $P^4 = m$; sodann für die Zahlen selbst, welche keine anderen Primfactoren haben können, als solche, die auch in ihren achten Potenzen aufgehen.

3) Die ganzen Zahlen $u \mp 2i\omega$ lassen sich in solcher Weise durch ein vollständiges Quadrat dividiren, dafs der Quotient nur durch $1+\omega$, m_1 oder m_5 theilbar bleibt; und da sich am Anfange dieses Paragraphen bereits zeigte, dafs $u-2i\omega$ nur m_5 und nicht m_1, $u+2i\omega$ nur m_1 und nicht m_5, und zwar beide den in ihnen vorkommenden Primfactor in einer ***ungeraden*** Potenz enthalten, so kann vor der Hand

$$(20.) \qquad u-2i\omega = h^2.\varepsilon.(1+\omega)^\alpha.m_5, \qquad u+2i\omega = h'^2.\varepsilon'.(1-\omega)^\alpha.m_1$$

gesetzt werden. Die etwa noch hinzutretende Potenz von m_5, resp. m_1, mit geradem Exponenten, ist als bereits in den Quadraten h^2 resp. h'^2 enthalten anzunehmen. Da diese zugeordneten quadratischen Factoren h und h'^2 keiner Beschränkung unterworfen sind, so kann ferner α der Exponent von $1+\omega$ (resp. $1-\omega$) auf einen der beiden Werthe 0 oder 1 reducirt werden; denn setzt man $\alpha = 2\beta+\alpha'$, wo $0 \leqq \alpha' < 2$, so kann man die gerade Potenz $(1+\omega)^{2\beta}$ mit h^2 zu einem einzigen quadratischen Factor vereinigen. Weiter unten wird sich zeigen, dafs $\alpha = 2$ ist, also auf 0 reducirt werden kann. Aus ähnlichem Grunde ist es erlaubt, die complexe Einheit ε nur unter den folgenden vier Einheiten

$$1, \quad \omega, \quad e, \quad \omega e,$$

und ε' dann unter den entsprechenden zugeordneten

$$1, \quad \omega^5, \quad e^{-1}, \quad \omega^5 e^{-1}$$

anzunehmen, da jede andere Einheit sich von diesen nur durch einen quadratischen Factor unterscheidet, welcher ebenfalls mit h^2 resp. h'^2 zusammengezogen werden kann. Der Werth von v wird jetzt durch die Gleichung $v^2 = (hh')^2\varepsilon\varepsilon'(1-i)^\alpha$ bestimmt.

4) Nach Annahme der obigen Formen in (20.), und wenn man m_1m_5 statt m schreibt, wird also

$$(21.) \qquad S^2P^3 = h^2.\varepsilon.(1+\omega)^\alpha.m_1m_5^2, \qquad S'^2P^3 = h'^2.\varepsilon'.(1-\omega)^\alpha.m_1^2m_5.$$

Wenn man zur vierten Potenz erhebt und mit $P^{12} = m^3 = m_1^3m_5^3$ dividirt, so erhält man

$$(22.) \qquad S^8 = h^8.\varepsilon^4.(1+\omega)^{4\alpha}.m_1m_5^5, \qquad S'^8 = h'^8.\varepsilon'^4.(1-\omega)^{4\alpha}.m_1^5m_5.$$

§. 10.

Die wichtigste Untersuchung besteht jetzt noch darin, den Exponenten α von $1+\omega$ und die complexen Einheiten ε, ε' zu ermitteln, welche wir wenigstens schon solchen Beschränkungen unterworfen haben, dafs nur noch zwischen einer geringen Anzahl Fälle die Wahl sein kann. Ferner sind noch einige andere hier vorkommende Unbestimmtheiten zu heben; z. B. es ist der zweifelhafte Werth von v in der Gröfse $SS'P = mv$ zu bestimmen, von der nur das Quadrat und nicht die erste Potenz aus den etwa bekannten Werthen von S^2P^3 und S'^2P^3 ohne Zweideutigkeit abgeleitet werden kann.

Zur Bestimmung einer complexen Einheit und eines zweifelhaften Vorzeichens ergiebt sich hier kein anderer Weg, als der durch eine Congruenz in Bezug auf eine Potenz von $1+\omega$, als Modul. Es wird also, um die noch obschwebenden Fragen zu erledigen, zu untersuchen sein: 1) Welches die höchste Potenz von $1+\omega$ sei, die in den für S^2P^3, S'^2P^3, $SS'P$ sich ergebenden ganzen Zahlen aufgeht. 2) Nachdem man die letzteren durch jene höchste Potenz von $1+\omega$ dividirt hat, welches der Rest sei, den die Quotienten der Division in Bezug auf eine neue Potenz von $1+\omega$ ergeben.

Um die so eben kurz bezeichnete Untersuchung durchzuführen, leite man aus dem Additionstheorem für die lemniscatischen Functionen, indem man das zweite Argument dem ersten oder dem $i$fachen des ersten gleich setzt, folgende Multiplicationsformeln ab:

$$\varphi(2t) = \frac{2x\sqrt{(1-x^4)}}{1+x^4}, \qquad \varphi((1+i)t) = \frac{(1+i)x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

welche sich auf die Multiplicatoren 2 und $1+i$ beziehen und in denen wie immer $x = \varphi(t)$ gesetzt ist. Multiplicirt man beide Formeln mit einander, schafft die Nenner weg und setzt der Kürze wegen $1+i = \eta$, $\varphi(2t) = x_2$, $\varphi(\eta t) = x_\eta$, so erhält man

$$(23.) \qquad x_2 x_\eta (1+x^4) = (2+2i).x^2; \qquad \eta = 1+i.$$

Bedeutet jetzt x eine Wurzel der Gleichung $W = 0$, so sind x_2 und x_η ebenfalls Wurzeln dieser Gleichung; multiplicirt man links und rechts mit dem Producte der aufser x_2 und x_η noch fehlenden $p-3$ Wurzeln, so erhält man links $1+x^4$ multiplicirt mit dem Producte aller Wurzeln, also $m(1+x^4)$, und rechts das $(2+2i)$fache eines Products aus theils gleichen, theils ungleichen Wurzeln, jedenfalls also das $(2+2i)$fache einer ganzen ganzzahligen Function der Wurzeln. Schreibt man die Zahl m, welche $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ ist, in der

Form $1+(2+2i)m'$, und bringt den Theil $(2+2i)m'(1+x^4)$ auf die rechte Seite hinüber, „so erhält man $1+x^4$ selbst in der Form $(2+2i)T$ dargestellt." Es wird also, wenn man statt x seinen Werth $\varphi\left(\frac{rC}{m}\right)$ oder $\psi(r)$ setzt, „$\psi(r)^4+1 =$ dem $(2+2i)$fachen einer ganzen ganzzahligen Function der „Gröfsen $\psi(k)$, $\psi(gk)$, ..., während r irgend einen der Werthe k, gk, ... „vorstellen kann." — Für die nachfolgenden Untersuchungen scheint es zweckmäfsig (und es hätte vielleicht schon früher geschehen können), das Zeichen $\equiv$ in einer solchen Bedeutung zu nehmen, dafs der Modul statt mit einer ganzen Zahl, auch mit einer ganzen ganzzahligen Function der Wurzeln der Gleichung $W=0$ multiplicirt sein kann, und $L\equiv L'$ (mod. ϑ) zu schreiben, wenn die Differenz $L-L'$ zweier *ganzen ganzzahligen* Functionen L und L' dieser Wurzeln dem ϑfachen einer andern ebenfalls *ganzen ganzzahligen* Function derselben gleich wird. Hiernach wird das oben gefundene Resultat so ausgedrückt:

$$\psi(r)^4 \equiv -1 \pmod{2+2i}. \tag{24.}$$

Eine Congruenz dieser Art ist nicht mit einer gewöhnlichen zu verwechseln, indem das Zeichen $\equiv$ dabei nur der Kürze wegen und in Ermangelung einer eigenthümlichen Bezeichnung des Begriffs angewandt wird. Nur in dem einzigen Falle, wenn sich nachweisen läfst, dafs L und L' *ganzen* Zahlen gleich sind, ist man nach (§. 6.) berechtigt, eine solche Congruenz wie eine gewöhnliche anzusehen und zu behandeln; was wir denn auch in der Folge thun werden. Übrigens versteht es sich, dafs man in Hinsicht auf Addition, Subtraction, Multiplication (aber *nicht* Division) mit dieser Art von Congruenzen eben wie mit gewöhnlichen operiren kann.

Auf diese Betrachtungen, namentlich auf die Congruenz (24.) gestützt, läfst sich die Untersuchung in folgende Puncte zusammenfassen.

1) Aus $S=Q-iR\omega$ folgt, wenn man beim Quadriren das doppelte Product vernachlässigt, $S^2\equiv Q^2-iR^2$ (mod. 2) und hieraus $S^4\equiv(Q^2-iR^2)^2$ (mod. 4), d. h. $S^4\equiv Q^4-R^4-2iQ^2R^2$ (mod. 4), also auch (mod. $2+2i$). Nun ist $Q^4-R^4\equiv 0$ (mod. $2+2i$); denn Q^4 und R^4 sind Producte aus lauter Gröfsen von der Form $\psi(r)^4$, deren Anzahl jedesmal λ beträgt. Wendet man also (24.) auf jede der in Q und R enthaltenen Wurzeln an, so ergiebt sich, *multiplicando*, $Q^4\equiv R^4\equiv(-1)^\lambda$ (mod. $2+2i$). Die Congruenz für S^4 (mod. $2+2i$) wird, da man hiernach aus derselben Q^4-R^4 weglassen kann und ferner auch,

da für diesen Modul $+2$ statt $-2i$ geschrieben werden darf, $S^4 \equiv 2Q^2R^2 = 2P^2$ (mod. $2+2i$). Hieraus folgt endlich durch abermaliges Quadriren $S^8 \equiv 4P^4 = 4m$ (mod. $4+4i$). Die letztere Congruenz $S^8 \equiv 4m$ (mod. $4+4i$) enthält nur ganze Zahlen und gilt daher auch im gewöhnlichen Sinne. Als erstes Resultat ergiebt sich aus derselben, wenn man sie vorläufig nur in Bezug auf den Modul 4 betrachtet, der durch $(1+\omega)^8$ ersetzt werden kann, „dafs „S^8 durch $(1+\omega)^8$, oder 4 theilbar ist." Dafs S^8 auch durch keine höhere Potenz von $1+\omega$, als $(1+\omega)^8$, theilbar sein kann, sieht man aus derselben Congruenz, wenn man sie (was hiernach erlaubt ist) folgendermafsen schreibt: $\frac{1}{4}S^8 \equiv m$ (mod. $1+i$); denn da m eine ungerade Zahl ist, so ist $\frac{1}{4}S^8$ ebenfalls ungerade und durch keine weitere Potenz von $1+\omega$ theilbar. Dieselben Betrachtungen lassen sich auf S'^8 anwenden.

2) Die vierte Potenz von S^2P^3 ist $S^8P^{12} = m^3S^8$, und da m^3 ungerade ist, so ist diese Gröfse, so wie S^8, ebenfalls durch $(1+\omega)^8$ und durch keine höhere Potenz von $1+\omega$ theilbar; S^2P^3 selbst, oder $m(u-2i\omega)$, ist demnach genau durch $(1+\omega)^2$ oder $1+i$ theilbar, und aus ähnlichem Grunde ist $S'^2P^3 = m(u+2i\omega)$ genau durch $(1+\omega)^2$ oder $1+i$ theilbar.

3) Die beiden ganzen Zahlen $u \mp 2i\omega$ sind demnach durch $1+i$ oder $(1+\omega)^2$ theilbar und der Quotient der Division ist eine ungerade Zahl. Da der Coëfficient von ω in diesen beiden Zahlen durch 2, also durch $(1+i)^2$ theilbar ist, so gilt Obiges auch von u, und es ist $u \equiv 1+i$ (mod. 2), $u \mp 2i\omega \equiv 1+i$ (mod. 2). Aus $u^2+4i = mv^2$ ergiebt sich dann, dafs v^2 durch 2, also v durch $1+i$ und durch keine höhere Potenz von $1+i$ theilbar ist. Setzt man $u = (1+i)u'$, $v = (1+i)v'$, so wird $u^2 = 2iu'^2$, $v^2 = 2iv'^2$, $u'^2 - mv'^2 = -2$; wo u' und v' ungerade Zahlen sind. Das letztere ergiebt sich auch aus der Gleichung $u'^2 - mv'^2 = -2$ selbst und ohne die früheren Betrachtungen: denn wäre u' gerade, so wäre es auch v', und umgekehrt. Gesetzt also, es wäre $u' = (1+i)u''$ und $v' = (1+i)v''$, so erhielte man, nach Division mit $(1+i)^2 = 2i$, $u''^2 - mv''^2 = i$; da aber das Quadrat jeder ungeraden (gewöhnlichen) Zahl $\equiv 1$ (mod. 2) und das jeder durch $1+i$ theilbaren $\equiv 0$ (mod. 2) ist, so könnte die linke Seite der Gleichung nur entweder $\equiv 0$, oder $\equiv 1-m$, oder $\equiv 1$, oder endlich $\equiv -m$ (mod. 2) werden, und keiner dieser Fälle giebt ein Resultat, welches $\equiv i$ (mod. 2) wäre.

4) Setzt man $u \mp 2i\omega = (1-i)(\alpha \mp \beta\omega)$, so ist $(1-i)\beta = 2i$, $\beta = i(1+i)$, also auch $\beta \equiv 1+i$ (mod. 2), oder allgemeiner $\beta \equiv i^\mu(1+i)$ (mod. 2); α ist ungerade und daher entweder $\equiv \pm 1$, oder $\equiv \pm i$ (mod. 2);

demnach ist $\alpha \mp \beta\omega$ entweder $\equiv i+(1+i)\omega \pmod 2$, wenn $\alpha \equiv i \pmod 2$, oder $\alpha \mp \beta\omega \equiv i(i+(1+i)\omega)$, wenn $\alpha \equiv 1 \pmod 2$, d. h. $\alpha \mp \beta\omega \equiv e$, oder $\equiv ie \pmod 2$. Hätte man, statt $u \mp 2\omega$ durch $1-i$ zu dividiren und den Quotienten $= \alpha \mp \beta\omega$ zu setzen, dieselben Zahlen vielmehr durch $(1+\omega)^2$ dividirt und $u \mp 2\omega = (1+\omega)^2(\gamma \mp \delta\omega)$ gesetzt, so müfste sich $\gamma \mp \delta\omega \equiv 1$ oder $\equiv i \pmod 2$ ergeben; denn unter dieser Voraussetzung ist $\alpha \mp \beta\omega = e(\gamma \mp \delta\omega)$, weil e selbst sich, wie schon in der Gleichung (13.) angemerkt ist, $= \frac{(1+\omega)^2}{1-i}$ findet. Schreibt man die Gleichung $\alpha \mp \beta\omega = e(\gamma \mp \delta\omega)$ als Congruenz (mod. 2), so liefert sie das Behauptete, da die linke Seite nach dem Obigen nur $\equiv e$ oder $\equiv ie \pmod 2$ sein kann. Da $i = \omega^2$ ein vollständiges Quadrat ist, so läfst sich sagen, dafs $u \mp 2i\omega$ sich mit Hülfe einer quadratischen Factors, nämlich entweder $(1+\omega)^2$, oder $[\omega(1+\omega)]^2 = (i+\omega)^2$, auf eine Zahl reduciren läfst, die $\equiv 1 \pmod 2$ ist; und da ± 1 ebenfalls ein vollständiges Quadrat ist, so können sich $u \mp 2i\omega$ von ***primären*** Zahlen (vergl. §. 8.) nur durch einen quadratischen Factoren unterscheiden. ***Hierin ist die Bestimmung der am Schlusse von (§. 9.) mit ε bezeichneten complexen Einheit enthalten:*** denn da m_5 selbst als primär vorausgesetzt ist und für den Werth von ε nur unter den vier Einheiten 1, ω, e, ωe die Wahl bleibt, so mufs nothwendig $\varepsilon = 1$ sein; dasselbe gilt von ε'. Es bleibt nun kein Zweifel mehr, dafs $u \mp 2i\omega$ die Form

$$(20'.) \qquad u - 2i\omega = h^2(1+\omega)^2 m_5, \quad u + 2i\omega = h'^2(1-\omega)^2 m_1$$

annehmen müssen; wo h, h' zwei einander zugeordnete ***ungerade*** Zahlen bedeuten.

5) Setzt man diese Werthe und verfährt wie am Schlusse des vorigen Paragraphen, so ergiebt sich, als Ergänzung der dortigen Formeln:

$$(21'.) \qquad S^2P^3 = h^2(1+\omega)^2 m_1 m_5^2, \quad S'^2P^3 = h'^2(1-\omega)^2 m_1^2 m^5,$$

$$(22'.) \qquad S^8 = h^8(1+\omega)^8 m_1 m_5^5, \quad S'^8 = h'^8(1-\omega)^8 m_1^5 m_5,$$

$$S = h(1+\omega)\sqrt[8]{(m_1 m_5^5)}, \quad S' = h'(1-\omega)\sqrt[8]{(m_1^5 m_5)},$$

wobei ins Gedächtnifs zurückzurufen ist, dafs m_1, m_5 zwei primäre (14.), einander zugeordnete und den Bedingungen (15.) genügende Primzahlen bedeuten, deren Normalproduct $m_1 m_5 = m$ ist, und dafs, wenn unter den, allen diesen Bedingungen zugleich genügenden, immer noch unendlich vielen Systemen m_1, m_5 zwei verschiedene genommen werden, dies nichts anderes, als eine Veränderung des Werths von h und h' in den obigen Formeln zur Folge haben

kann; wodurch die wesentlichen Irrationalitäten $\sqrt[8]{(m_1 m_5^5)}$, $\sqrt[8]{(m_1^5 m_5)}$ nicht betroffen werden. Sollte man aber m_1 und m_5 nicht primär angenommen haben, so müfste zu den Formeln in (21′.) rechts im Allgemeinen noch eine der complexen Einheiten ω, e oder ωe hinzutreten, und nur unter der gemachten Voraussetzung haben die Formeln die obige (gröfste) Einfachheit; wenigstens besteht die einzige Freiheit, die man sich, ohne diese Einfachheit zu stören, noch erlauben könnte, darin, m_1, m_5 mit ± 1 oder $\pm i$ zu multipliciren, da sich diese Factoren als Quadrate schreiben und mit h^2, h'^2 vereinigen liefsen. Dafs auch diese Unbestimmtheit in der Definition der primären Zahlen bereits aufgehoben ist (was für (21′.) allein nicht unbedingt nothwendig wäre): davon wird sich der Vortheil in der folgenden Nr. zeigen.

(Der Schlufs folgt im nächsten Hefte.)

23.

Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhangt, nebst Anwendungen derselben auf die Zahlentheorie.

(Schlufs der letzten Abhandlung im vorhergehenden Hefte.)

(Von Herrn Dr. *G. Eisenstein* zu Berlin.)

---

6) Es ist jetzt noch der Ausdruck $SS'P$, aus welchem die gegenseitige Abhängigkeit der beiden für S und S' gefundenen Wurzelgröfsen erkannt wird, ohne Zweideutigkeit darzustellen. Multiplicirt man $SS'P$ mit den schon untersuchten Gröfsen S^2P^3 und S'^2P^3, so erhält man $S^3S'P^4$ und SS'^3P^4; dividirt man durch $P^4 = m$, so erhält man die beiden neuen Verbindungen S^3S' und SS'^3, welche ebenfalls ganze Zahlen darstellen müssen; und zwar sind die letzteren, wie sich aus dem Vorhergehenden und daraus, dafs $P^4 = m$ ungerade ist, ergiebt, durch $(1'+\omega)^4$ oder 2 und keine höhere Potenz von $1+\omega$ theilbar. Diese neuen cyclischen Functionen S^3S' und SS'^3, welche sich also aus den bisher allein betrachteten drei einfachsten Verbindungen dieser Art S^2P^3, S'^2P^3 und $SS'P$ auf *rationale* Weise erzeugen lassen, bieten für die vorliegende Behandlung eine bequemere Form dar, als der ursprünglich in Frage stehende Ausdruck $SS'P$, und sollen statt des letzteren untersucht werden, welcher umgekehrt in jene und die bereits untersuchten, entweder in der Form $SS'P = m \times (S^3S') : (S^2P^3)$, oder in der Form $SS'P = m \times (SS'^3) : (S'^2P^3)$ *rational* ausgedrückt werden kann. Entwickelt man dieselben, indem man von den drei Gleichungen

$$SS' = Q^2 + iR^2, \quad S^2 = Q^2 - iR^2 - 2i\omega QR, \quad S'^2 = Q^2 - iR^2 + 2i\omega QR$$

die erste sowohl mit der zweiten als mit der dritten multiplicirt und dabei P statt QR und $Q^4 + R$ statt $(Q^2 + iR^2)(Q^2 - iR^2)$ schreibt, so ergiebt sich

$$(25.) \quad \begin{Bmatrix} S^3S' \\ SS'^3 \end{Bmatrix} = Q^4 + R^4 \mp 2i\omega P(Q^2 + iR^2).$$

Von diesen Ausdrücken ist nachzuweisen, wie sie durch 2 dividirt werden können, und der Quotient der Division ist einer ferneren Untersuchung zu unter-

werfen. Der Coëfficient von $\mp\omega$ in (25.) enthält ersichtlich den Factor $2i$, und zwar mit $P(Q^2+iR^2)$ multiplicirt, welches eine gewöhnliche ganze Zahl und in der That nichts anderes als die Zahl $mv = SS'P$ ist, von der man aus 3) weifs, dafs sie, mit $1+i$ getheilt, einen ungeraden Quotienten ohne Rest giebt, also $\equiv 1+i \pmod 2$ gesetzt werden kann. Was ferner den ersten Bestandtheil Q^4+R^4 betrifft, so ist derselbe ebenfalls eine gewöhnliche ganze Zahl, von welcher sich nicht blofs zeigen läfst, dafs sie mit 2 aufgeht, sondern die, was hier sehr wesentlich ist, noch in Bezug auf eine weit höhere Potenz von $1+i$ als Modul bestimmt werden kann. Setzt man zu dem Ende nach (24.) allgemein $-\psi(r)^4 = 1+(2+2i)\chi(r)$ und wendet diese Formel auf mehrere Werthe $r_1, r_2, \ldots r_\mu$ von r an, so erhält man, durch Multiplication und mit Vernachlässigung der Glieder, die den Factor $(2+2i)^2$ oder 8 enthalten, $(-1)^\mu \Pi\psi(r)^4 \equiv 1+(2+2i)\Sigma\chi(r) \pmod 8$. Sind $r_1', r_2', \ldots r_{\mu'}'$ neue Werthe von r, so ist eben so $(-1)^{\mu'}\Pi\psi(r')^4 \equiv 1+(2+2i)\Sigma\chi(r')$. Die Addition beider Congruenzen giebt $(-1)^\mu \Pi\psi(r)^4 + (-1)^{\mu'}\Pi\psi(r')^4 \equiv 2+(2+2i)(\Sigma\chi(r)+\Sigma\chi(r'))$. Andrerseits ist nach demselben Principe, wenn alle 2μ Werthe von r auf einmal angewendet werden, $(-1)^{\mu+\mu'}\Pi\psi(r)^4.\Pi\psi(r')^4 \equiv 1+(2+2i)(\Sigma\chi(r)+\Sigma\chi(r'))$. Eliminirt man aus dieser und der vorigen Congruenz die Gröfse $\Sigma\chi(r)+\Sigma\chi(r')$, so erhält man die allgemeine Formel

$$(-1)^\mu\Pi\psi(r)^4+(-1)^{\mu'}\Pi\psi(r')^4 \equiv 1+(-1)^{\mu+\mu'}\Pi\psi(r)^4\Pi\psi(r')^4 \pmod 8$$

für Producte aus Wurzeln der Gleichung $W=0$. Auf die Producte Q und R angewandt, ergiebt dieselbe, da die Anzahl sowohl der in Q als in R enthaltenen Wurzeln λ beträgt, also für diesen Fall $\mu=\mu'=\lambda$ zu setzen ist und ferner $\Pi\psi(r)^4\Pi\psi(r')^4 = Q^4R^4 = P^4 = m$ wird, das sehr einfache Resultat $Q^4+R^4 \equiv (-1)^\lambda(m+1) \pmod 8$. Es zeigt sich aus demselben erstens, dafs Q^4+R^4 wirklich durch 2 ohne Rest getheilt werden kann, und zweitens, dafs der Quotient der Division $\frac{1}{2}(Q^4+R^4)$ ungerade und $\equiv (-1)^\lambda.\frac{1}{2}(m+1) \pmod 4$ werden mufs. Setzt man demnach

$$(26.) \qquad S^3S' = 2(A+B\omega), \quad SS'^3 = 2(A-B\omega),$$

so genügen die ganzen Zahlen A und B den Congruenzen

$$(27.) \qquad A \equiv (-1)^\lambda.\tfrac{1}{2}(m+1) \pmod 4., \quad B \equiv 1+i \pmod 2.$$

Der für A gefundenen Congruenz läfst sich eine bequemere Form geben, wenn man beachtet, dafs nur die vier nachstehenden Fälle mit den ihnen entsprechenden Folgerungen Statt finden:

$$(28.)\quad \begin{cases} m \equiv 1, & 1+4i, & 5, & 5+4i \pmod 8, \\ \frac{1}{2}(m+1) \equiv 1, & 1+2i, & -1, & -1+2i \pmod 4, \\ p \equiv 1, & 1, & 9, & 9 \pmod{16}, \\ \lambda \equiv 0, & 0, & 1, & 1 \pmod 2, \\ (-1)^{\lambda} = 1, & 1, & -1, & -1. \end{cases}$$

Aus diesem Schema ergiebt sich, dafs im ersten und dritten Falle $(-1)^{\lambda}\cdot\frac{1}{2}(m+1) \equiv 1 \pmod 4$, im zweiten und vierten dasselbe Product $\equiv 1+2i \pmod 4$ sein wird. Setzt man also $m = a+bi$, so ist

(27′.) $A \equiv 1$ oder $\equiv 1+2i \pmod 4$, je nachdem $b \equiv 0$ oder $\equiv 4 \pmod 8$.

Beschränkt man sich auf mod. $2+2i$ statt mod. 4, so kommt, da $1+2i \equiv 1-2 \equiv -1 \pmod{2+2i}$ ist,

(27″.) $A \equiv 1$ oder $\equiv -1 \pmod{2+2i}$, vereinigt $A \equiv (-1)^{\frac{1}{4}b} \pmod{2+2i}$.

Zu bemerken ist zugleich, dafs im 1ten und 4ten Falle des Schemas $m \equiv 1 \pmod{4+4i}$ ist, und m_1, m_5 zur Kategorie (I.) der primären Zahlen in (14.) gehören und dafs im 2ten und 3ten Falle $m \equiv 1+4i \pmod{4+4i}$ und m_1, m_5 zur Kategorie (II.) gehören; denn setzt man für den Augenblick $m_1 = \alpha+\beta\omega$, $m_5 = \alpha-\beta\omega$, so ist jedenfalls $\alpha \equiv \pm 1 \pmod{2+2i}$, folglich $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{4+4i}$, $m = \alpha^2 - i\beta^2 \equiv 1 - i\beta^2 \pmod{4+4i}$; je nachdem nun $\beta \equiv 0$ oder $\equiv 2 \pmod{2+2i}$, wird $\beta^2 \equiv 0$ oder $\equiv \pm 4 \pmod{4+4i}$ und $m \equiv 1$ oder $\equiv 1+4i \pmod{4+4i}$. Aus der letzteren Bemerkung ergiebt sich eine vierte, hier die wichtigste Darstellung der für A Statt findenden Congruenz:

$$(27'''.)\quad A \equiv +(-1)^{\lambda} \text{ oder } -(-1)^{\lambda} \pmod{2+2i},$$

je nachdem m_1 zu (I.) oder (II.) gehört, während λ wie immer $\frac{1}{8}(p-1)$ bedeutet.

Zu Gunsten einer bequemeren Vergleichung mit den früheren Formeln scheint es zweckmäfsig, den Factor 2 in (26.) durch $(1+\omega)^3(1-\omega)$ resp. $(1+\omega)(1-\omega)^3$ zu ersetzen. Wird also

$$(29.)\quad S^3S' = (1+\omega)^3(1-\omega)(C+D\omega),\quad SS'^3 = (1+\omega)(1-\omega)^3(C-D\omega)$$

geschrieben, so erhält man leicht C und D auf folgende Weise in A und B ausgedrückt:

$$C = -A+(1+i)B,\quad D = (1-i)A-B.$$

D wird hiernach das $1+i$fache von der Summe zweier ungeraden Zahlen, also $D \equiv 0 \pmod 2$; C wird $\equiv -A+(1+i)^2 \pmod{2+2i} \equiv -A+2 \pmod{2+2i}$, weil $B \equiv 1+i \pmod 2$ ist, so dafs $C \equiv -1+2 \equiv 1$, wenn

$A \equiv 1$, und $C \equiv 1+2 \equiv -1$, wenn $A \equiv -1$, also immer $C \equiv A \pmod{2+2i}$, demnach:

(30.) $C \equiv (-1)^{\frac{1}{4}b} \pmod{2+2i}$, $D \equiv 0 \pmod{2}$, auch

(30′.) $C \equiv +(-1)^{\lambda}$ oder $\equiv -(-1)^{\lambda} \pmod{2+2i}$,

je nachdem m_1 und $m_5 \equiv 1$ oder $\equiv -1+2\omega \pmod{2+2i}$ sind, d. h., je nachdem der erste Bestandtheil in diesen Zahlen $\equiv 1$ oder $\equiv -1 \pmod{2+2i}$ ist, während dem entsprechend der Coëfficient von ω durch $2+2i$ oder blofs durch 2 und keine höhere Potenz von $1+i$ theilbar ist.

Aus den Gleichungen (21′.) in 5) findet man die ***Quadrate*** der Gröfsen S^3S' und SS'^3, wenn man den Cubus jeder dieser Gleichungen mit der anderen multiplicirt und sodann durch $P^{12} = m^3$ dividirt; nemlich

(31.) $(S^3S')^2 = H^2 m_1^2 m_5^4$, $(SS'^3)^2 = H'^2 m_1^4 m_5^2$,

wo der Kürze wegen $h^3h'(1+\omega)^3(1-\omega) = H$, $hh'^3(1+\omega)(1-\omega)^3 = H'$ gesetzt ist. Da man aber nicht jene Gröfsen selbst findet, so bleibt es zweifelhaft, ob und in welchen Fällen aus diesen Werthen der ***Quadrate*** für die Gröfsen ***selbst***, z. B. $S^3S' = +Hm_1m_5^2$ oder $S^3S' = -Hm_1m_5^2$ geschlossen werden darf. Dieser Zweifel wird durch die obigen Congruenzen gehoben. Denn setzt man zunächst, was gewifs erlaubt ist, $S^3S' = (-1)^{\mu}Hm_1m_5^2$, so stimmt $(-1)^{\mu}h^3h'm_1m_5^2$ mit $C+D\omega$ in (29.) überein. Für jede ungerade Zahl h ist ein Ausdruck wie h^3h' immer $\equiv 1 \pmod{2+2i}$; denn setzt man $h = \alpha+\beta\omega$, $h' = \alpha-\beta\omega$, so ist eine der Zahlen α, β durch $1+i$ theilbar, die andere ungerade; h^3h' wird $= h^2.hh' = (\alpha^2+i\beta^2+2\alpha\beta\omega)(\alpha^2-i\beta^2) = \alpha^4+\beta^4+2\alpha\beta(\alpha^2-i\beta^2)\omega$, und hier ist der Coëfficient von ω durch $2+2i$ theilbar, da entweder 2α oder 2β diesen Factor enthält; ferner ist der erste Bestandtheil $\alpha^4+\beta^4 \equiv 1 \pmod{2+2i}$, sogar $\equiv 1 \pmod{4}$, da entweder $\alpha^4 \equiv 1 \pmod{8}$, $\beta^4 \equiv 0 \pmod{4}$, oder $\alpha^4 \equiv 0 \pmod{4}$, $\beta^4 \equiv 1 \pmod{8}$ ist. Setzt man demnach 1 statt h^3h' und zugleich ebenfalls 1 statt $m_1m_5 = m$ in die Gleichung $C+D\omega = (-1)^{\mu}h^3h'm_1m_5^2$, so erhält man

$$C+D\omega \equiv (-1)^{\mu}m_5 \pmod{2+2i};$$

und da nach (30′.) $C \equiv +(-1)^{\lambda}$, oder $C \equiv -(-1)^{\lambda} \pmod{2+2i}$ wird, je nachdem in m_5 der erste Bestandtheil $\equiv +1$, oder $\equiv -1 \pmod{2+2i}$ ist, so kann dies nicht anders der Fall sein, als wenn $(-1)^{\mu} = (-1)^{\lambda}$, also $\mu = \lambda = \frac{1}{8}(p-1)$ ist. Zugleich sieht man, dafs D, welches oben nur in Bezug auf mod. 2 bestimmt war, sich in Bezug auf mod. $2+2i$ nicht anders

als der Coëfficient von ω in m_5 verhalten kann. Hiernach ergiebt sich ohne Unbestimmtheit:

(32.) $$S^3S' = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}Hm_1m_5^2, \quad SS'^3 = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}H'm_1^2m_5,$$

und endlich hieraus, in Verbindung mit (21′.),

(33.) $$SS'P = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}hh'(1-i)m, \quad v = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}hh'(1-i).$$

Um die letzteren Gleichungen, welche ein wesentliches Element dieser Untersuchungen ausmachen, richtig zu verstehen, mufs man es sich klar machen, dafs die von einer gewissen Willkür der Zahlen h und h' herrührende, noch in ihnen vorkommende Unbestimmtheit nur *scheinbar* ist. In der That enthalten die Formeln (21′.) nur die Quadrate von h und h' und nicht diese Gröfsen selbst; man könnte daher auch eben so gut $-h$ statt h setzen; es ist aber nicht zu vergessen, dafs dann auch gleichzeitig $-h'$ statt h' geschrieben werden müfste, indem die beiden Zahlen conjugirt bleiben sollen, wodurch das Product hh' nicht verändert wird. Das Nämliche zeigt sich, wenn man in denselben Formeln $e^{2\nu}m_1$ statt m_1, $e^{-2\nu}m_5$ statt m_5 substituirt, da gleichzeitig h in $e^{\nu}h$, h' in $e^{-\nu}h'$ verwandelt werden mufs, so dafs alle Veränderungen, welche ohne die Beschaffenheit der Formeln (21′.) zu stören, mit h und h' vorgenommen werden können, das Product hh' nicht betreffen, und daher $SS'P$, so wie v, durch (33.) in der That vollkommen bestimmt sind. Wollte man aber m_1 in $-m_1$, also h in ih, oder m_1 in im_1, also h in ωh übergehen lassen, so bliebe, da $i.i^5$ und $\omega.\omega^5$ nicht den Werth Eins haben, das Product hh' keinesweges ungeändert, und die Gleichung (33.) würde ihre Gültigkeit verlieren, sobald man aufhörte, m_1 und m_5 als primär vorauszusetzen. Vergl. in (5) die Schlufsbemerkung. Die ähnlichen Bemerkungen hinsichtlich (32.) hinzuzufügen kann dem Leser überlassen bleiben.

7) Endlich füge ich noch einige Worte in Betreff aller andern, von S und S' verschiedenen cyclischen Functionen 8ter Ordnung hinzu. Es sei $F(k)$ eine beliebige derartige (von Null verschiedene) Function und $F'(k)$ ihre zugeordnete, welche aus ihr durch Vertauschung von ω mit ω^5 hervorgeht, so dafs $F(gk) = \omega F(k)$, $F'(gk) = \omega^5 F(k)$. Aus der Bemerkung, dafs FS^7 und S^8, so wie $F'S'^7$ und S'^8 ganzen Zahlen gleich sein müssen, folgt, dafs $F:S$ und $F':S'$ im Verhältnifs ganzer Zahlen stehen und dafs also F und F' keine andern Irrationalitäten enthalten können, als S resp. S'. Es können daher für F und F' die den obigen (22′.), (21′.) für S und S' analogen Gleichungen

$$(34.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{F}(k) &= f(\omega)\sqrt[8]{(m_1 m_5^5)}, & \boldsymbol{F}'(k) &= f(\omega^5)\sqrt[8]{(m_1^5 m_5)}, \\ \boldsymbol{F}(k)^8 &= f(\omega)^8 . m_1 m_5^5, & \boldsymbol{F}'(k)^8 &= f(\omega^5)^8 . m_1^5 m_5, \\ \boldsymbol{F}(k)^2\boldsymbol{P}^3 &= f(\omega)^2 . m_1 m_5^2, & \boldsymbol{F}'(k)^2\boldsymbol{P}^3 &= f(\omega^5)^2 . m_1^2 m_5 \end{cases}$$

aufgestellt werden. Wegen der Gründe, aus welchen hier $f(\omega)$ und $f(\omega^5)$ nothwendig *ganze* Zahlen sein müssen, verweise ich auf die ähnlichen Untersuchungen über die cyclischen Functionen 4ter Ordnung in (§. 7.). — Um auch die Gültigkeit derjenigen Formeln, welche (32.) und (33.) analog sind, für die allgemeinen Functionen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}'$ nachzuweisen, verfahre ich, wie folgt. Das zwischen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{S}$ Statt findende rationale Verhältnifs kann jedenfalls so dargestellt werden:

$$f_1(\omega)(1+\omega)^\mu \boldsymbol{F} = f_2(\omega)(1+\omega)^\nu \boldsymbol{S};$$

wo $f_1(\omega)$ und $f_2(\omega)$ *ungerade* ganze Zahlen bedeuten. Einer der beiden Exponenten μ oder ν könnte noch auf 0 reducirt werden: da aber unentschieden bleibt, welcher von beiden es sein wird, so habe ich, um alle Fälle in einer einzigen Gleichung zusammenzufassen, auf beiden Seiten eine Potenz von $1+\omega$ hinzugefügt. Multiplicirt man die dritte Potenz dieser Gleichung mit der aus ihr durch Vertauschung von ω mit ω^5 entspringenden und setzt zugleich für $\boldsymbol{S}^3\boldsymbol{S}'$ seinen Werth aus (32.), so ergiebt sich

$$f_1(\omega)^3 f_1(\omega^5)(1+\omega)^{3\mu}(1-\omega)^\mu \boldsymbol{F}^3\boldsymbol{F}'$$
$$= f_2(\omega)^3 f_2(\omega^5)(1+\omega)^{3\nu}(1-\omega)^\nu . (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} h^3 h' (1+\omega)^3 (1-\omega) m_1 m_5^2.$$

Die höchste in der Seite rechts aufgehende Potenz von $1+\omega$ ist $(1+\omega)^{4(\nu+1)}$, und da $\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{F}'$ einer ganzen Zahl gleich ist, so kann die Gleichung nicht anders bestehen, als wenn $\mu \leqq \nu+1$ ist. Dividirt man zu beiden Seiten durch $(1+\omega)^{3\mu}(1-\omega)^\mu$ und setzt der Kürze wegen blofs ν statt des nicht negativen Exponenten $\nu-\mu+1$, so erhält man

$$f_1(\omega)^3 f_1(\omega^5)\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{F}' = f_2(\omega)^3 f_2(\omega^5)(1+\omega)^{3\nu}(1-\omega)^\nu . (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} h^3 h' m_1 m_5^2.$$

Da ferner nach einer in der vorigen Nr. gemachten Bemerkung die Verbindungen $f_1(\omega)^3 f_1(\omega^5)$, $f_2(\omega)^3 f_2(\omega^5)$, $h^3 h'$ alle drei $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ werden, so mufs $\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{F}'$ einer solchen ganzen Zahl gleich sein, welche durch $(1+\omega)^{3\nu}(1-\omega)^\nu$ und durch $m_1 m_5^2$ dividirt einen Quotienten giebt, der $\equiv (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} \pmod{2+2i}$ ist. Nachdem hierdurch das Vorzeichen der Zahl $\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{F}'$, deren Quadrat aus (34.) leicht ermittelt werden kann, vollkommen bestimmt ist, und da sich die ähnlichen Schlüsse auch auf $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'^3$ anwenden lassen, so erhält man ohne Zweideutigkeit:

$$(35.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{F}(k)^3\boldsymbol{F}'(k) &= (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} f(\omega)^3 f(\omega^5) m_1 m_5^2, \\ \boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{F}'(k)^3 &= (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} f(\omega) f(\omega^5)^3 m_1^2 m_5; \end{cases}$$

und hieraus endlich, in Verbindung mit (34.):

$$(36.) \qquad \boldsymbol{F(k)F'(k).P} = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} m . f(\omega) f(\omega^5).$$

Es scheint unnöthig, noch ins Besondere bei denjenigen Functionen zu verweilen, welche der Bedingung $\boldsymbol{F(gk)} = \omega^\mu \boldsymbol{F(k)}$ für einen von 1 verschiedenen ungeraden Werth von μ genügen; ich bemerke nur, dafs dieselben mit $\boldsymbol{S}^\mu$ in rationalem Verhältnisse stehen; wonach die betreffenden Formeln zu bilden sind. Auch übergehe ich die hierhergehörige Zerfällung von $\boldsymbol{W}$ in 8 Factoren.

Anwendungen auf die Theorie der achten Potenzreste.

§. 11.

Die Anwendung auf die achten Potenzreste hat jetzt keine Schwierigkeit mehr, nachdem alle dazu nöthigen Elemente in dem Vorhergehenden bereits enthalten sind, und die Analogie durch die vierten Potenzreste gegeben ist. m bedeutet wie immer eine gewöhnliche complexe Primzahl $\equiv 1 (\mathrm{mod.}\, 4)$; wird dieselbe in das Product der beiden zugeordneten Primfactoren m_1, m_5 zerlegt, welche $\equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, 2+2\omega)$ angenommen werden, so kann m_1 mit jeder gegebenen binomen Primzahl, bis auf einen Factor wie ω^μ oder $\omega^\mu e$, übereinstimmen; p ist $= \boldsymbol{N}(m) = \boldsymbol{N}\mathfrak{N}(m_1)$ und $\lambda = \frac{1}{8}(p-1)$. Zu erinnern ist, dafs für eine der Bedingung $g^\lambda \equiv \omega \ (\mathrm{mod.}\, m_1)$ genügende primitive Congruenzwurzel $g^{\nu\lambda} \equiv \omega^\nu \ (\mathrm{mod.}\, m_1)$ ist, also ω^ν durch $\left(\frac{g^\nu}{m_1}\right)$ ersetzt werden kann; wo statt g^ν auch jede andere dieser Potenz congruente Zahl geschrieben werden darf.

1) Es sei n eine zweite, von m verschiedene gewöhnliche primäre Primzahl; q ihre Norm. $\boldsymbol{F(k)}$ sei eine der Bedingung $\boldsymbol{F(gk)} = \omega \boldsymbol{F(k)}$ genügende ganze ganzzahlige cyclische Verbindung 8ter Ordnung, die nur der einzigen Beschränkung unterworfen wird, dafs der ganzzahlige Werth ihrer achten Potenz mit n keinen gemeinschaftlichen Factor haben soll; und durch die Reductionsmethode in (§. 9.) läfst sich immer eine solche Function auffinden. $\boldsymbol{F'(k)}$ sei die aus ihr durch Vertauschung von ω mit ω^5 hervorgehende Function, welche der Bedingung $\boldsymbol{F'(gk)} = \omega^5 \boldsymbol{F'(k)}$ genügt. Nach der letzten Nummer des vorigen Paragraphen hat man die für alle cyclischen Functionen achter Ordnung geltenden Formeln

$$(1.) \qquad \boldsymbol{F(k)}^8 = f(\omega)^8 m_1 m_5^5,$$

$$(2.) \qquad \boldsymbol{F(k)}^3 \boldsymbol{F'(k)} = (-1)^\lambda f(\omega)^3 f(\omega^5) m_1 m_5^2.$$

Hier wird ins Specielle $f(\omega)$ eine solche ganze Zahl sein, die mit n keinen

gemeinschaftlichen Theiler hat. Ferner ist aus der Grundbedingung für diese Functionen $F(g^\nu k) = \omega^\nu F(k)$ und $F'(g^\nu k) = \omega^{5\nu} F'(k)$ für jeden ganzen Exponenten ν. Wird $n \equiv g^\nu \pmod{m}$ gesetzt und das Symbol $\left(\frac{n}{m_1}\right)$ statt ω^ν eingeführt, so ergiebt sich

$$(3.) \qquad F(nk) = \left(\frac{n}{m_1}\right) F(k), \qquad F'(nk) = \left(\frac{n}{m_1}\right)^5 F'(k).$$

Diese drei Formeln bilden die Basis aller folgenden Entwicklungen.

2) Die Zahl n bietet zwei Fälle dar, je nachdem sie $\equiv 1 \pmod 4$, oder $\equiv 3 + 2i \pmod 4$ ist. Im ersten Falle, der am leichtesten zu behandeln ist, wird $q \equiv 1 \pmod 8$, also $\frac{1}{8}(q-1) = \varrho$ eine ganze Zahl. Erhebt man (1.) auf beiden Seiten zur Potenz $\varrho + 1$, so erhält man

$$(4.) \qquad F(k)^{q+7} = f(\omega)^{q+7} m_1^{\varrho+1} m_5^{5(\varrho+1)}.$$

Statt der Potenz $F(k)^q$ kann man nach (§. 4.) einen Ausdruck von der Form $F(k) + nT(k)$ setzen; multiplicirt man denselben mit $F(k)^7$, schreibt blofs $T(k)$ statt $F(k)^7 T(k)$ und ersetzt zugleich $F(nk)$ nach (3.) durch $\left(\frac{n}{m_1}\right) F(k)$, so erhält man

$$(5.) \qquad \left(\frac{n}{m_1}\right) F(k)^8 + nT(k) = f(\omega)^{q+7} (m_1 m_5^5)^\varrho . m_1 m_5^5.$$

Diese Gleichung enthält, wenn man statt $F(k)^8$ seinen Werth aus (1.) setzt, aufser dem Gliede $nT(k)$ nur ganze Zahlen; es mufs daher in ihr $T(k)$ einer rationalen, also nach (§. 6.) einer ganzen Zahl gleich sein. Die Gleichung geht demnach in eine Congruenz (mod. n) über und giebt, wenn noch der beiden Seiten gemeinschaftliche Factor $f(\omega)^8 m_1 m_5^5$, welcher zu n relative Primzahl ist, weggelassen wird:

$$(6.) \qquad \left(\frac{n}{m_1}\right) \equiv f(\omega)^{q-1} (m_1 m_5^5)^\varrho \pmod{n}.$$

Setzt man $n = n_1 n_5$, so gilt diese Congruenz auch in Bezug auf mod. n_1; man hat dann ferner $f(\omega)^{q-1} \equiv 1 \pmod{n_1}$, und gemäfs der Definition der symbolischen Zeichen:

$$m_1^\varrho \equiv \left(\frac{m_1}{n_1}\right) \pmod{n_1}, \quad m_5^{5\varrho} \equiv \left(\frac{m_5}{n_1}\right)^5 \equiv \left(\frac{m_1}{n_5}\right) \pmod{n_1}.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe bleiben in (6.) links und rechts nur Potenzen von ω stehen und die Congruenz verwandelt sich in folgende Gleichung:

$$(7.) \qquad \left(\frac{n}{m_1}\right) = \left(\frac{m_1 m_5^5}{n_1}\right) = \left(\frac{m_1}{n_1}\right)\left(\frac{m_1}{n_5}\right) = \left(\frac{m_1}{n}\right).$$

3) Wenn $n \equiv 3+2i \pmod 4$, so werden $\frac{1}{8}(q-5)$ und $\frac{1}{8}(q+3)$ ganze Zahlen. Erhebt man (1.) zur Potenz $\frac{1}{8}(q+3)$, indem man $\frac{1}{8}(q-5)=\varrho$ setzt, so erhält man

$$(8.) \qquad F(k)^{q+3} = f(\omega)^{q+3}(m_1 m_5^5)^{\varrho+1}.$$

In der allgemeineren Bedeutung des Zeichens $\equiv$ (§. 10.) wird

$$F(k)^q \equiv F'(nk) \pmod n \equiv \left(\frac{n}{m_1}\right)^5 F'(k),$$

folglich

$$(9.) \qquad F(k)^3 F'(k).\left(\frac{n}{m_1}\right)^5 \equiv f(\omega)^{q+3}(m_1 m_5^5)^{\varrho+1} \pmod n.$$

Zur weitern Behandlung dieser Congruenz mufs die Formel (2.) hinzugezogen werden, wobei dann eine längere Reihe von vorbereitenden Untersuchungen als im vorigen Falle nöthig ist. Setzt man statt $F(k)^3 F'(k)$ seinen Werth aus (2.) und läfst die gemeinschaftlichen Factoren, welche zu n relative Primzahl sind, weg, so ergiebt sich

$$(10.) \qquad f(\omega^5)(-1)^\lambda \left(\frac{n}{m_1}\right)^5 \equiv f(\omega)^q m_1^\varrho m_5^{5\varrho+3}.$$

Da ferner $f(\omega)^q \equiv f(\omega^q) \pmod n = f(\omega^5)$, $m_5 \equiv m_1^q \pmod n$ und $(-1)^\lambda = (-1)^{5\lambda} = \left(\frac{-1}{m_1}\right)^5$ ist, so erhält man

$$(11.) \qquad \left(\frac{-n}{m_1}\right)^5 \equiv m_1^\varrho m_1^{q(5\varrho+3)} \pmod n.$$

Setzt man statt ϱ seinen Werth $\frac{1}{8}(q-5)$ zurück, so geht der Exponent von m_1 rechts im Ganzen in $\frac{5}{8}(q^2-1)$ über, so dafs

$$(12.) \qquad \left(\frac{-n}{m_1}\right)^5 \equiv m_1^{\frac{5}{8}(q^2-1)} \pmod n \text{ ist.}$$

Da nun n als monome Primzahl in der Theorie der aus achten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen angesehen werden kann und dann q^2 die Norm ihres Normalproducts n^2 wird, so hat man $m_1^{\frac{1}{8}(q^2-1)} \equiv \left(\frac{m_1}{n}\right) \pmod n$, und (12.) kann nicht anders bestehen, als wenn

$$(13.) \qquad \left(\frac{-n}{m_1}\right) = \left(\frac{m_1}{n}\right) = (-1)^\lambda \left(\frac{n}{m_1}\right) \text{ ist.}$$

4) Die beiden Formeln (7.) und (13.) lassen sich in die einzige folgende zusammenziehen:

$$(14.) \qquad \left(\frac{n}{m_1}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(q^2-1)\cdot\frac{1}{8}(p-1)}\left(\frac{m_1}{n}\right),$$

wobei nur zu bedenken, dafs $\frac{1}{8}(q^2-1)$ gerade oder ungerade, je nachdem $q \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod 8$ ist. Diese Formel, durch welche $\left(\frac{n}{h}\right)$ auf $\left(\frac{h}{n}\right)$ zurückgeführt wird, wenn n eine beliebige *gewöhnliche* complexe Primzahl, h eine *binome* Primzahl ist, kann ergänzt werden, wenn man beweiset, dafs auch für eine monome primäre Primzahl h beide Symbole durch eine analoge Formel auf einander bezogen werden können. Für $n = n_1 n_5$ folgt Dies aus dem schon Bewiesenen, nämlich durch Multiplication der beiden Formeln

$$\left(\frac{h}{n_1}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(N(h)^2-1).\frac{1}{8}(q-1)}\left(\frac{n_1}{h}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{h}{n_5}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(N(h)^2-1).\frac{1}{8}(q-1)}\left(\frac{n_5}{h}\right),$$

welche aus (14.) hervorgehen, wenn h statt n und n_1 oder n_5 statt m_1 gesetzt werden. Sind aber h und n beide $\equiv 3+2i \pmod 4$, so ergiebt sich leicht aus der Definition selbst, dafs in diesem Falle $\left(\frac{h}{n}\right)$ nichts anderes als die dritte Potenz des analogen Symbols bei den biquadratischen Resten bedeutet, und die Behauptung geht unmittelbar aus dem biquadratischen Reciprocitätsgesetz hervor. Nachdem man durch diese Ergänzung ein Reciprocitätsgesetz zwischen zwei Zahlen erhalten hat, deren eine eine beliebige gewöhnliche Primzahl, die andere eine beliebige Primzahl aus achten Wurzeln der Einheit sein kann, so läfst sicht leicht durch Multiplication mehrerer solcher Formeln, und durch die bekannte Reduction der in den Umkehrungs-Factoren vorkommenden Exponenten, das folgende allgemeinere Resultat für zusammengesetzte Zahlen ableiten:

„Sind $A+B\omega$ und $C+D\omega$ irgend zwei ganze Zahlen aus achten „Wurzeln der Einheit, ohne gemeinschaftlichen Factor, welche $\equiv 1 \pmod{2+2\omega}$, „und setzt man $N(A^2-iB^2) = K$, $N(C^2-iD^2) = L$, so wird, wenn wenig„stens in einer der beiden Zahlen (oder auch in beiden) der Coëfficient von „ω verschwindet, also entweder B oder $D = 0$ ist:

$$\left(\frac{A+B\omega}{C+D\omega}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(K-1).\frac{1}{8}(L-1)}.\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right).$$"

5) Aus diesem Reciprocitätssatze, in welchem die beiden mit einander verglichenen primären Zahlen nur der einzigen Beschränkung unterliegen, dafs eine derselben monom (von der Form $a+bi$) sein mufs, läfst sich das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für irgend zwei primäre Zahlen $A+B\omega$ und $C+D\omega$ ableiten, indem man aus der identischen Gleichung

$$(15.) \qquad C(A+B\omega)-B\omega(C+D\omega) = AC-BDi = E$$

so viele Congruenzen hervorgehen läfst, als sie Zahlen enthält, deren jede nach und nach als Modul benutzt wird, und dann aus jeder dieser Congruenzen eine Gleichung zwischen den symbolischen Zeichen, welche den betreffenden Modul zum Nenner haben, folgert. Dafs dieses so eingeleitete Verfahren sicher zum Ziele, nämlich durch Elimination der überflüssigen Symbole zu einer einfachen Relation zwischen $\left(\frac{A+B\omega}{C+D\omega}\right)$ und $\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right)$ allein führen mufs, geht daraus hervor, dafs in (15.) aufser den beiden vorgelegten binomen Zahlen nur *monome* Zahlen vorkommen und dafs daher alle übrigen Symbole, aufser den beiden eben geschriebenen, nach Entfernung gewisser complexer Einheiten, Potenzen von $1+\omega$ oder etwa vorkommender gemeinschaftlicher Factoren, nach dem obigen Reciprocitätssatze behandelt werden können. In der That: versteht man, um abzukürzen, allgemeiner unter $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ den Werth dieses Zeichens, nachdem etwa vorkommende Potenzen von $1+\omega$ oder gemeinschaftliche Factoren aus Zähler und Nenner entfernt worden sind, und durch (α, β) denjenigen Umkehrungs-Factor, welcher hinzugefügt werden mufs, um $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ in $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ verwandeln zu können, so dafs also $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right):\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ist, so läfst sich, im Allgemeinen gesprochen, für jede Gleichung von der Form $\alpha = \beta+\gamma$ das Product $(\alpha, \beta)(\beta, \gamma)(\gamma, \alpha)$ als eine bekannte Gröfse ansehen; denn die Gleichung giebt die drei Congruenzen $\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma}$, $\alpha \equiv \gamma \pmod{\beta}$ und $\beta \equiv -\gamma \pmod{\alpha}$, durch welche resp. $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ auf $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ auf $\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$ und $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ auf $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$, also, ***multiplicando***, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ auf $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ zurückgeführt, folglich das obige Product bestimmt wird. In jeder Gleichung von der Form $\alpha = \beta\delta+\gamma\varepsilon$ ist demnach das Product

$(\alpha, \beta\delta)(\beta\delta, \gamma\varepsilon)(\gamma\varepsilon, \alpha)$ oder $(\alpha, \beta)(\alpha, \delta)(\beta, \gamma)(\beta, \varepsilon)(\delta, \gamma)(\delta, \varepsilon)(\gamma, \alpha)(\varepsilon, \alpha)$

ebenfalls als eine bekannte Gröfse anzusehen. Die Gleichung (15.) hat die letztere Form $\alpha = \beta\delta+\gamma\varepsilon$, und nur $\delta = A+B\omega$, $\varepsilon = C+D\omega$ sind binom; die übrigen drei Zahlen sind monom. In dem Producte der vorhin geschriebenen sechs Umkehrungs-Factoren enthält daher nur (δ, ε) zwei binome Elemente, in den übrigen fünf ist stets wenigstens das eine Element monom; die letzteren Umkehrungs-Factoren können also nach dem obigen Reciprocitätssatze ermittelt, und der sechste $(A+B\omega, C+D\omega)$, um dessen Werth es sich

hier handelt, in jenen ausgedrückt werden. Man sieht, dafs die eben kurz ihrem Wesen nach geschilderte Untersuchung keine principiellen Schwierigkeiten hat, und dafs es nur noch auf die Herzählung der dabei sich ergebenden verschiedenen Fälle und deren Betrachtung im Einzelnen ankommt, um das allgemeinste Reciprocitätsgesetz in aller Vollständigkeit und in seiner definitiven Form aufstellen zu können. Dies letztere und die Angabe einiger andern zu demselben Ziele führenden Methoden wird den Gegenstand einer, wie ich hoffe, bald erscheinenden, den achten Potenzresten insbesondere gewidmeten Abhandlung ausmachen.

6) Wenn man sich erlaubt, von der gewöhnlichen Form, in welcher die Reciprocitätsgesetze ausgesprochen zu werden pflegen, abzuweichen, so lassen sich alle Fälle kurz in folgendem Satze zusammenfassen, dessen Beweis aus den eben angedeuteten Principien ohne Schwierigkeit hervorgeht: „Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ irgend zwei binome oder monome ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler, so wird, wenn man $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{a}$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{b}$ (mod. $(1+\omega)^{\mu}$) setzt, wo μ einen oberhalb einer gewissen Grenze beliebig anzunehmenden und von den Zahlen unabhängigen Exponenten bedeutet *), und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ebenfalls relative Primzahlen sind,

$$(A.) \qquad \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right):\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right):\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right),$$

und in entsprechender Form erhält man durch dieselben Principien, die Ergänzungssätze, betreffend den Character der Zahlen ω, e, $1+\omega$:

$$(B.) \qquad \left(\frac{\omega}{\mathfrak{B}}\right) = \left(\frac{\omega}{\mathfrak{b}}\right), \quad \left(\frac{e}{\mathfrak{B}}\right) = \left(\frac{e}{\mathfrak{b}}\right), \quad \left(\frac{1+\omega}{\mathfrak{B}}\right) = \left(\frac{1+\omega}{\mathfrak{b}}\right),$$

deren beide ersten schon in (*A.*) als specielle Fälle enthalten sind.

Es dürfte nicht unpassend sein, diese neue Form, die Fundamentaltheoreme darzustellen, auch für die noch nicht untersuchten höheren Potenzreste allgemein anzunehmen, da man durch dieselbe bei einer Untersuchung rein theoretischer Art die Unterscheidung einer grofsen Reihe von Fällen vermeidet, welche mit den Worten des grofsen Mathematikers zu reden *plus laboris quam artis* erfordert. So wird man z. B., wenn λ eine reelle ungerade Primzahl oder Potenz einer solchen, ζ eine primitive λte Wurzel der Einheit, und die vorkommenden Zahlen ganze Functionen von ζ bedeuten, während die Symbole sich auf die Theorie der λten Potenzreste beziehen, für die

*) Um ganz sicher zu gehen, kann man 64 oder eine noch höhere Potenz von 2 für mod. $(1+\omega)^{\mu}$ nehmen. Es ist hierbei sehr vortheilhaft, dafs man ein vollständiges Restensystem für einen solchen mod. durch die Producte der Potenzen einer sehr geringen Menge von Zahlen darstellen kann.

letztere Theorie das allgemeinste Reciprocitätsgesetz ebenfalls in der Form (*A.*) aussprechen können, wo die zu vergleichenden Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, welche weder gemeinschaftlichen Theiler, noch den Theiler $1-\zeta$ enthalten, auf möglichst einfache $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mittels der Congruenzen $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{a}$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{b}$ (mod. $(1-\zeta)^{\mu}$) zurückgeführt werden, in welchen der Exponent μ nur von λ abhangt; die Ergänzungssätze für die Zahl $1-\zeta$ und für complexe Einheiten werden eine den Relationen (*B.*) ähnliche Form annehmen. Indem man während der ganzen Untersuchung mit einer solchen gemeinschaftlichen, alle Fälle umfassenden Form operirt, erleichtert man dieselbe, und kann am Schlusse und *a posteriori* immer noch mit dem Endresultate, wenn man will, eine zergliedernde Discussion vornehmen, welche, da die einfachsten Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur eine endliche Anzahl von Combinationen darbieten, die man noch dazu durch die Producte der Potenzen einer noch geringeren Menge von Zahlen ausdrücken kann, keiner andern Schwierigkeit als der wachsenden Länge der Rechnung unterliegt. Aber selbst für fernere Anwendungen der Reciprocitätsgesetze auf andere Theorieen, zu deren Gunsten eine solche definitive Discussion unternommen werden könnte, bietet die obige zusammenfassende Form Vortheile im Weiterschliefsen dar, die man bei der gewöhnlichen Darstellungsweise nur mühsam und gewissermaafsen nur auf dem Rückwege zu jener erhalten kann; denn liefsen sich auch auf die gewöhnliche Weise die verschiedenen hervortretenden Fälle in eine einzige Formel zusammenziehen, so möchte die letztere doch nicht diejenige Einfachheit haben, dafs man nicht bei jeder einzelnen Anwendung zu einer abermaligen Zerlegung genöthigt wäre. So führt man schon bei der Anwendung des quadratischen *) Reciprocitätsgesetzes die beiden zu vergleichenden Zahlen stillschweigend auf ihre kleinsten Reste (mod. 4) zurück, und wenn man $\left(\frac{2}{p}\right)$ bestimmen soll, so setzt man für p seinen Rest (mod. 8). Diese neue Form, welche zugleich die Betrachtungen vereinfacht, ohne die Anwendungen zu erschweren, dürfte selbst für den ***Beweis*** der höheren Fundamentaltheoreme gute Winke an die Hand geben; besonders wenn man ihn auf eine Verallgemeinerung des von ***Gaufs*** im letzten Theile seiner „Theoria res. biq. No. 71" gegebenen Lemma's zu stützen sucht. Eine weitere Ausführung dieser Gedanken bildet den Gegenstand einer bald hier folgenden Abhandlung.

*) dieses bildet übrigens hier einen Ausnahmefall, da der Unterschied zwischen pos. und neg. Zahlen nicht durch Congruenzen dargestellt werden kann.

24.

Über die in der Gaufsischen „Summatio quarumdam serierum singularium" vorkommenden Reihen.

(Von Herrn Prof. *E. Heine* in Bonn.)

Läfst eine Function sich nicht blofs direct in eine nach ihrer Veränderlichen x aufsteigende Reihe entwickeln, sondern auch indirect, indem man sie als Product zweier Factoren darstellt, die nach Potenzen derselben Veriabeln fortschreiten: so wird der Coëfficient einer jeden Potenz von x in der ersten Entwicklung als Summe der endlichen Reihe auftreten, welche nach Ausführung der Multiplication der beiden vorerwähnten Factoren in dieselbe Potenz von x multiplicirt ist. Die Anwendung dieses Princips verschafft die beiden Reihen, aus welchen *Gaufs* in der „Summatio quarumdam serierum singularium" das Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste herleitet. Wir gehen dazu von der leicht zu beweisenden Formel aus:

$$(a.)\qquad \frac{1}{(1-z)(1-rz)(1-r^2z)\ldots} = 1+\frac{z}{(1-r)}+\frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)}+\ldots.$$

Setzt man hierin $r=q^2$ und $z=x^2$, so erhält man eine Function, die sich in ein Product der beiden Ausdrücke zerfällen läfst, welche aus $(a.)$ entstehen, wenn man darin $r=q$ und z, einmal gleich x, dann gleich $-x$ macht. Nach der ersten Substitution ist mit x^n für ein gerades n

$$\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^n)}$$

multiplicirt, und Null für ein ungerades. Dieser Werth mufs also mit dem Coëfficienten von x^n in dem Producte der beiden Reihen

$$1+\frac{x}{(1-q)}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots \quad\text{und}\quad 1-\frac{x}{(1-q)}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}-\ldots$$

übereinstimmen. Man erhält demnach

$$1-\frac{(1-q^n)}{(1-q)}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}-\ldots$$

für ein ungerades n gleich 0, für ein gerades gleich $\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^n)}$ oder gleich

$$(1-q)(1-q^3)\ldots(1-q^{n-1}).$$

Um auch den Werth der zweiten *Gaufsischen* Reihe (§. 9) abzuleiten, machen wir in (*a.*) zuerst $r = \sqrt{q}$ und $z = x$. Die so entstehende Function ist ein Product zweier Factoren, welche man aus (*a.*) erhält, wenn man darin $r = q$, und z einmal gleich x und dann auch $z = x\sqrt{q}$ setzt. Es wird demnach

$$\frac{1}{(1-q^{\frac{1}{2}})(1-q^{\frac{2}{2}})\ldots(1-q)^{\frac{n}{2}}}$$

gleich dem Coëfficienten von x^n in dem Producte der beiden Reihen

$$1+\frac{x}{(1-q)}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots$$

und

$$1+\frac{xq^{\frac{1}{2}}}{(1-q)}+\frac{x^2q^{\frac{2}{2}}}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots.$$

Wir erhalten also für jedes ganze n:

$$1+\frac{(1-q^n)}{(1-q)}\cdot q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot q^{\frac{2}{2}}+\ldots$$
$$=(1+q^{\frac{1}{2}})(1+q^{\frac{2}{2}})(1+q^{\frac{3}{2}})\ldots(1+q^{\frac{n}{2}}).$$

Bonn, den 19. August 1849.

25.

Über die Reduction der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

(Gelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9ten November 1848.)

Die quadratischen Formen von einer beliebigen Anzahl Variabeln können durch lineäre Substitutionen, deren Determinante ± 1 ist, auf unendlich viel Arten in andere *äquivalente* verwandelt werden. Man kann die Coëfficienten, welche die Substitutionen enthalten, zur ***Reduction*** der Form benutzen. Im Allgemeinen pflegt man bei Reduction der Functionen vor allem bemüht zu sein, die Argumente, von welchen die Functionen abhängen, auf die möglich kleinste Anzahl zu bringen, und dieselben dann in möglichst enge Gränzen einzuschliefsen. Bei der Reduction der quadratischen Formen hat man nur den letztern Gesichtspunct verfolgt, und unter allen Formen, welche einer gegebenen äquivalent sind, diejenige als die ***reducirte Form*** betrachtet, deren Coëfficienten in solchen Gränzen eingeschlossen sind, dafs keine andere äquivalente Form denselben Gränzbedingungen genügen kann. Es ist gleichwohl auch hier von Interesse, nach der kleinsten Anzahl Glieder zu fragen, auf welche jede quadratische Form von einer gegebnen Anzahl Variabeln gebracht werden kann.

Es ist einleuchtend, dafs bei den quadratischen Formen von zwei Variabeln, oder den *binären* quadratischen Formen, keine derartige Reduction möglich ist, oder im Allgemeinen keines ihrer drei Glieder wird zum Verschwinden gebracht werden können. ***Die quadratischen Formen von mehr als 2 Variabeln dagegen können immer auf eine kleinere Anzahl Glieder gebracht werden.*** Während die Anzahl der Glieder der *vollständigen* quadratischen Formen mit der Zahl der Variabeln wie die *dreieckigen* Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 etc. wächst, wird diese Anzahl bei den ***auf die kleinste Anzahl der Glieder reducirten quadratischen Formen*** wie die *ungeraden* Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 etc. wachsen; so dafs man bei quadratischen Formen von 3, 4, 5 etc. Variabeln resp. 1, 3, 6 etc. Coëfficienten zum Verschwinden bringen kann.

Man kann nämlich für jede gegebene quadratische Form von n Variabeln eine ***äquivalente Form*** finden, welche aufser den Quadraten derselben

nur noch $n-1$ Producte enthält, und zwar diejenigen, welche bei einer angenommenen Reihenfolge der Variabeln durch Multiplication jeder Variable in die *nächst folgende* erhalten werden. Man wird also jede quadratische Form von n Variabeln auf eine andere äquivalente der folgenden Art,

$$aww + a_1 ww_1 + a_2 w_1 w_1 + a_3 w_1 w_2 + a_4 w_2 w_2$$
$$+ a_5 w_2 w_3 + a_6 w_3 w_3 + \ldots + a_{2n-3} w_{n-2} w_{n-1} + a_{2n-2} w_{n-1} w_{n-1},$$

reduciren können.

Das Mittel zur Bewerkstelligung solcher Reduction der quadratischen Formen von mehr als 2 Variabeln besteht darin, dafs man für gegebene lineäre Ausdrücke,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots + \alpha_i x_i,$$

in welchen α_1, α_2, ... α_i ganze Zahlen sind, einen einzigen Term $f.u$ einführt, in welchem f den gemeinschaftlichen Theiler von α_1, α_2 .... α_i bedeutet, oder dafs man für x_1, x_2 .... x_i ein anderes äquivalentes System Gröfsen von der Beschaffenheit einführt, dafs wenn u eine derselben und f der gröfste gemeinschaftliche Theiler von α_1, α_2 .... α_i ist, die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots\ldots \alpha_i x_i = f.u$$

erhalten wird.

Man nennt hiebei zwei Systeme Gröfsen *äquivalent*, welche auf solche Art von einander abhängen, dafs wenn für die Gröfsen eines der beiden Systeme *beliebige* ganze Zahlen gesetzt werden, immer auch die Gröfsen des andern Systems ganze Zahlen werden. Wenn zwei Systeme Gröfsen in diesem Sinne äquivalent sein sollen, müssen die Gröfsen des einen Systems lineäre Functionen des andern sein; es müssen ferner die Coëfficienten dieser Functionen ganze Zahlen und ihre Determinante $= 1$ sein. Es werden dann auch umgekehrt immer die Gröfsen des andern Systems lineäre Functionen des ersteren, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind, und die Determinante dieser Coëfficienten wird wieder $= 1$ werden. Man sieht leicht die Möglichkeit ein, für x_1, x_2, ... x_i äquivalente Systeme von der verlangten Beschaffenheit zu finden und ich werde hiefür bei einer andern Gelegenheit mehrere Methoden angeben *).

---

*) Schwieriger ist die Aufgabe, wenn man die Coëfficienten der gesuchten Ausdrücke gewissen Gränzbedingungen unterwirft, welche die Aufgabe zu einer weniger unbestimmten machen. Die hiezu erforderlichen Algorithmen, welche ich seit längerer Zeit zum Gegenstande meiner Untersuchungen gemacht habe, sind von der gröfsten Wichtigkeit für die Arithmetik, so wie für die Analysis überhaupt. Wendet man sie auf die Auflö-

Nach diesen Bemerkungen ist es sehr leicht, eine gegebene quadratische Form in eine andere äquivalente von der angegebnen Beschaffenheit zu reduciren.

Es sei nämlich V eine quadratische Form von n Variabeln, x_1, x_2, . . x_n und darin das Aggregat der in x_n multiplicirten Glieder

$$x_n(a_1x_1+a_2x_2\ .\ .\ +a_{n-1}x_{n-1})+a_nx_n^2.$$

Für x_1, x_2, . . x_{n-1} führe man ein äquivalentes System Gröfsen x_1', x_2', . . x_{n-1}' von der Beschaffenheit ein, dafs

$$a_1x_1+a_2x_2\ .\ .\ +a_{n-1}x_{n-1}=f_1x_{n-1}',$$

wo f_1 den gemeinschaftlichen Theiler von a_1, a_2, . . a_{n-1} bedeutet. Man erhält dann

$$V=a_nx_n^2+f_1x_nx_{n-1}'+V_1,$$

wo V_1 eine quadratische Form der $n-1$ Gröfsen x_1', x_2', . . x_{n-1}' ist. Es sei in V_1 das Aggregat der in x_{n-1}' multiplicirten Glieder,

$$x_{n-1}'(a_1'x_1'+a_2'x_2'\ .\ .\ +a_{n-2}'x_{n-2}')+a_{n-1}'x_{n-1}'^2.$$

Für x_1', x_2', . . x_{n-2}' führe man ein äquivalentes System Gröfsen x_1'', x_2'', . . x_{n-2}'' von der Beschaffenheit ein, dafs

$$a_1'x_1'+a_2'x_2'\ .\ .\ +a_{n-2}'x_{n-2}'=f_2.x_{n-2}'',$$

wo f_2 den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von a_1', a_2', . . a_{n-2}' bedeutet. Man erhält dann

$$V=a_nx_n^2+f_1x_nx_{n-1}'+a_{n-1}'x_{n-1}'^2+f_2x_{n-1}'x_{n-2}''+V_2,$$

wo V_2 eine quadratische Form der $n-2$ Gröfsen x_1'', x_2'' . . . . x_{n-2}'' ist. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt

$$\begin{aligned}V=\ &a_nx_n^2+a_{n-1}'x_{n-1}'^2+a_{n-2}''x_{n-2}''^2\ .\ .\ +a_1^{(n-1)}x_1^{(n-1)\,2}\\ &+f_1x_nx_{n-1}'+f_2x_{n-1}'x_{n-2}''+f_3x_{n-2}''x_{n-3}'''\ .\ .\\ &+f_{n-1}x_2^{(n-2)}x_1^{(n-1)},\end{aligned}$$

welches eine Form der Variabeln

$$x_n,\quad x_{n-1}',\quad x_{n-2}'',\ .\ .\quad x_2^{(n-2)},\quad x_1^{(n-1)}$$

von der verlangten reducirten Art ist.

---

sung der Gleichungen von höherem als dem 2ten Grade an, so werden diese Algorithmen periodisch und geben die entsprechenden complexen Zahlen, deren Norm der Einheit gleich ist, auf ähnliche Art wie dies bei der Anwendung der Algorithmen der Kettenbrüche auf die Auflösung der quadratischen Gleichungen der Fall ist.

26.

Sur la rotation d'un corps

Extrait d'une lettre adressée à l'académie des sciences de Paris

par Mr. *C. G. J. Jacobi*

(lu dans la séance du 30 juillet 1849).

Le problème de la rotation d'un corps solide quelconque, qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, est susceptible d'être résolu par des formules nouvelles si élégantes et si parfaites, que je ne peux m'empêcher de les communiquer à votre illustre Académie. Ce sont les fonctions Θ et H que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots,$$

au moyen desquelles je suis parvenu à exprimer, de la manière la plus simple, les neuf cosinus eux-mêmes qu'il s'agit, dans ce problème, de déterminer en fonctions du temps. En effet, x étant une variable proportionnelle au temps, on trouve les cosinus des angles qui, à chaque instant, déterminent la position des axes principaux du corps, égaux à des fractions qui ont cette fonction Θ pour commun dénominateur, les neuf numérateurs étant, abstraction faite de facteurs constants, la même fonction Θ, dans laquelle seulement x se trouve augmenté d'une constante imaginaire. Quel que soit le degré d'exactitude auquel on voudra pousser les calculs, on n'aura guère à prendre plus de trois ou quatre termes de ces séries, excepté les cas extrêmes. On doit donc regarder ces cosinus comme exprimés par des quantités finies, et même par des quantités finies très-simples. Si l'on veut résoudre le problème du mouvement elliptique d'une planète par de semblables formules définitives qui ont le temps sous le signe cos ou sin, on a, comme on sait, des séries beaucoup moins convergentes, et des coefficients beaucoup plus compliqués.

La rotation en question se compose de *deux rotations périodiques*, et dont les périodes, en général, sont incommensurables entre elles. Pour avoir une idée nette et claire de ce mouvement, il faut supposer aux axes des x et y, dans le plan invariable, un certain mouvement rotatoire uniforme,

et rapporter la position du corps à ces axes mobiles et à l'axe fixe des z perpendiculaire au plan invariable. Or, étant posé,

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$
$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'$$
$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',$$

les axes des x', y', z' étant les axes principaux du corps, et les axes des x et y, comme on vient de dire, des axes mobiles tournoyant uniformément, avec une vitesse déterminée, dans le plan invariable, les neuf quantités α, β, etc., seront des fonctions du temps *périodiques*. Avant de donner leurs valeurs en fonctions du temps, il faut convenir des notations suivantes:

Soient, h la force vive, l le moment de rotation dans le plan invariable, A, B, C les trois moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z', et supposons, pour fixer les idées, que, B étant le moment moyen, l'on ait

$$Bh > l^2, \quad A > B > C.$$

Dans le cas de $Bh < l^2$, on supposera $A < B < C$.

Le module des transcendantes elliptiques qui entreront dans les formules données ci-dessous, sera

$$k = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}},$$

d'où

$$k' = \sqrt{(1-k^2)} = \sqrt{\frac{A-C}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{Bh-l^2}{Ah-l^2}}.$$

Faisons, comme dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques,

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\beta)}}, \quad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\beta)}}, \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

soit de plus $K'-a$ une intégrale elliptique de première espèce, dont le sinus de l'amplitude, par rapport au module complémentaire k', est

$$\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin\mathrm{am}(K'-a, k'),$$

ou, étant mis

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}},$$

soit

$$a = \int_\beta^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\beta)}}.$$

Soit t le temps, et

$$u = nt + \tau,$$

τ étant une constante arbitraire, et de plus

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}.$$

Aux fonctions Θu et Hu dont j'ai fait usage dans les *Fundamenta*, je joins les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u), \qquad H_1(u) = H(K-u);$$

de sorte qu'on a

$$\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u = \frac{Hu}{\Theta u}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\mathrm{am}\,u = \frac{H_1(u)}{\Theta u}, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\mathrm{am}\,u = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}.$$

Cela posé, et étant $i = \sqrt{-1}$, *on aura le tableau suivant des valeurs des neuf quantités* α, β, *etc.*,

$$\alpha = -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)+H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \alpha' = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)-H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\beta = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta' = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\gamma = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u}, \quad \gamma' = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u};$$

$$\alpha'' = -\frac{\Theta(ia)H_1 u}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta'' = \frac{\Theta_1(ia)Hu}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \gamma'' = \frac{H(ia)\Theta_1(u)}{iH_1(ia)\Theta u}.$$

Les vitesses de rotation autour des axes des x, y, z *seront:*

$$\frac{f[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u}, \quad -\frac{f[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \frac{h}{l},$$

où

$$f = n\sqrt{(kk')}\,\Theta_1(0).$$

Les axes des x *et des* y *ayant, dans le plan invariable, un mouvement de rotation uniforme autour du point fixe, dans le sens du choc primitif appliqué au corps, l'angle proportionel au temps qu'ils décriront dans un intervalle* t *du temps, sera* $nn't$, *où la constante* n' *est*

$$n' = \frac{1}{A-C}\left[C\frac{d\log H(ia)}{da} - A\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right].$$

Mettant

$$x = \frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi(nt+\tau)}{2K}, \qquad b = \frac{a}{K'},$$

où $b < 1$, on aura d'après la définition des fonctions Θ etc.,

$$\tfrac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)] = 1-q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x-\ldots,$$
$$\frac{1}{2i}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)] = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x-q^{4-2b}(1-q^{4b})\sin 4x+\ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}[H(u+ia)+H(u-ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^{b})\sin x-q^{2-b}(1+q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$
$$\frac{1}{2i}[H(u+ia)-H(u-ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^{b})\cos x-q^{2-b}(1-q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$
$$\tfrac{1}{2}[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^{b})\cos x+q^{2-b}(1+q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$
$$\frac{1}{2i}[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^{b})\sin x+q^{2-b}(1-q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$
$$\tfrac{1}{2}[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)] = 1+q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x+\ldots,$$
$$\frac{1}{2i}[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)] = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x+q^{4-2b}(1-q^{4b})\cos 4x+\ldots.$$

Dans les deux premières et les deux dernières formules, les premiers termes qui suivent ceux qu'on a écrits, sont de l'ordre de la quantité q^{9-3b}; dans les quatre autres formules, ces termes sont de l'ordre de la quantité q^{6-2b}: ceux-ci ajoutés, on n'aura rejeté que les termes respectivement de l'ordre des quantités q^{16-4b} et q^{12-3b}. En mettant ou $b=0$ ou $x=0$, on aura le développement des autres fonctions qui entrent dans les formules établies ci-dessus et dont l'argument est u ou ia. On a, d'ailleurs

$$\Theta_1(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad H_1(0) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}.$$

Si la quantité q et le module k sont très-proches de l'unité, on se servira des transformations suivantes, par lesquelles les fonctions qui se rapportent au module k sont changées en d'autres qui se rapportent à son complément k', d'où suit que la quantité q sera remplacée par la quantité extrêmement petite $q' = e^{\frac{\pi^2}{\log q}}$,

$$\begin{aligned}
\Theta(u+ia) &= igH[u-i(K'-a)] = g'H_1(a-iu,k') \\
&= g''\Theta_1[a+i(K-u),k'] \\
H(u+ia) &= ig\Theta[u-i(K'-a)] = ig'H(a-iu,k') \\
&= g''\Theta[a+i(K-u),k'] \\
H_1(u+ia) &= g\Theta_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta(a-iu,k') \\
&= -ig''H[a+i(K-u),k'] \\
\Theta_1(u+ia) &= gH_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta_1(a-iu,k') \\
&= g''H_1[a+i(K-u),k']
\end{aligned}$$

où

$$g = e^{-\frac{\pi}{4K}(K'-2a+2iu)}, \quad g' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u+ia)^2}, \quad g'' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(K-u-ia)^2}.$$

Par cette transformation, les formules perdent leur caractère périodique, comme cela est bien propre à des formules par lesquelles doit être exprimé un mouvement extrêmement lent et dont la période est d'une durée quasi-infinie.

On peut aussi développer les valeurs fractionnaires des neuf cosinus α, β, etc., en séries très-simples et assez convergentes, quoique dépourvues de cette convergence extraordinaire dont jouissent le dénominateur et les numérateurs des fractions mêmes. On obtient ces développements en se servant des formules suivantes:

$$(1.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H(ia)\,\Theta u}$$

$$= \frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b} - 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})} + \frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})} + \cdots\right];$$

$$(2.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2H(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})} + \frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})} + \cdots\right];$$

$$(3.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u+ia)+H(u-ia)}{2\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{\sqrt{(q(1-q))}\sin x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1-q^3))}\sin 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})} + \cdots\right];$$

$$(4.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u+ia)-H(u-ia)}{2i\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{\sqrt{(q(1+q))}\cos x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1+q^3))}\cos 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})} + \cdots\right];$$

$$(5.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H_1(u-ia)+H_1(u+ia)}{2\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{\sqrt{(q(1+q))}\cos x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1+q^3))}\cos 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})} + \cdots\right];$$

$$(6.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H_1(u-ia)-H_1(u+ia)}{2i\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{\sqrt{(q(1+q))}\sin x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1+q^3))}\sin 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})} + \cdots\right];$$

$$(7.) \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)}{2H_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= \frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b} + 2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})} + \frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})} + \cdots,\right];$$

$$(8.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)}{2iH_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2\,(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\ldots\right];$$

$$(9.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\frac{H_1(u)}{\Theta u}=\frac{2kK}{\pi}\cos\mathrm{am}\,u=\frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q}+\frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3}+\ldots;$$

$$(10.)\quad H_1(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{Hu}{\Theta u}=\frac{2kK}{\pi}\sin\mathrm{am}\,u=\frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\ldots;$$

$$(11.)\quad \Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}=\frac{2K}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\,u=1+\frac{4q\cos 2x}{1+q^2}+\frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4}+\ldots.$$

Quant aux facteurs constants par lesquels il faut multiplier les formules précédentes pour obtenir les valeurs des neuf cosinus, j'observe qu'on a

$$\frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{1}{\cos\mathrm{am}(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{(A-C)l^2}}$$

$$\frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\Delta\,\mathrm{am}(ia)}{\cos\mathrm{am}(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2}}$$

$$\frac{H(ia)}{iH_1(ia)}=\frac{\sqrt{k'}\tan\mathrm{g}\,\mathrm{am}(ia)}{i}=\sqrt{k'}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{(A-C)l^2}}.$$

Les huit formules (1.) .. (8.) sont nouvelles et d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques; j'ai remarqué dans une lettre à Mr. *Hermite* (Mathematische Werke Vol. I. pg. 357) que, par leur moyen, on parvient, de la manière la plus aisée et la plus directe, aux formules de la transformation inverse et de la division des fonctions elliptiques.

On trouvera des séries analogues pour les valeurs des six quantités

$$\frac{\alpha}{\alpha''},\quad \frac{\alpha'}{\alpha''},\quad \frac{\beta}{\beta''},\quad \frac{\beta'}{\beta''},\quad \frac{\gamma}{\gamma''},\quad \frac{\gamma'}{\gamma''},$$

ou pour les tangentes des angles que les projections des axes des x',y', z' sur les plans des x, z et des y, z forment avec l'axe des z.

Pour les recherches générales et analytiques, il conviendra presque toujours de faire usage des formules fractionnaires. Ces formules remarquables pourront, dans le problème de la rotation, servir de point de départ pour résoudre des questions analogues à celles que *M. Gauſs* a traitées dans sa *Theoria motus corp. coel. etc.* par rapport au mouvement elliptique et hyperbolique.

Les mêmes formules donnent une nouvelle manière d'exprimer par trois quantités les neuf cosinus des angles que forment entre eux deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires. Ces trois quantités sont ici les deux arguments u et a, et le module k; ou, si l'on veut, les quantités x, b, q.

Démonstration *).

Exposé des notations dont on fait usage et des formules par lesquelles le problème est réduit aux quadratures.

Faisons voir à présent comment on peut tirer les résultats précédents des formules connues et dont on trouve la démonstration dans les traités de Mécanique. Pour plus de commodité, on a emprunté ces formules au Traité de Mécanique de M. ***Poisson***. On ne s'est écarté des notations de cet auteur que dans la définition des axes des x et des y, lesquels, chez M. ***Poisson***, sont supposés fixes dans le plan invariable et qui ont été supposés ici faire dans ce plan, autour du point fixe, une rotation uniforme, dans le sens de la rotation initiale du corps. On supposera, avec M. ***Poisson***, que l'axe des x parvient dans la direction de l'axe des y, après une rotation de 90^0, faite dans le même sens; de sorte que, d'après la notation employée dans nos formules, les quantités désignées par x et y dans le Traité de M. ***Poisson***, devront être remplacées, par

$$\cos \Psi(t-t_0).x - \sin \Psi(t-t_0).y$$
$$\cos \Psi(t-t_0).y + \sin \Psi(t-t_0).x,$$

Ψ et t_0 désignant des quantités constantes.

J'observe encore que la lettre k désignant dans le Traité de M. ***Poisson*** le moment principal, a été remplacé ici par l, k étant employé comme module des fonctions elliptiques qui entrent dans nos formules.

Nommons donc,

x', y', z' les coordonnées parallèles aux axes principaux du corps;

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ les moments du corps par rapport à ces axes, et dont $\boldsymbol{B}$ soit le moment moyen;

ψ l'angle que l'intersection du plan des x', y', et du plan invariable, fait avec une droite fixe, menée dans ce dernier plan par le point fixe;

φ l'angle que cette intersection fait avec l'axe des x';

---

*) On a cru faire plaisir aux géomètres, en ajoutant la démonstration des formules précédentes, laquelle n'avait pas été donnée dans la lettre à l'Académie de Paris. On a changé les directions des axes des x' et des y dans les directions opposées, afin qu'elles s'accordent parfaitement avec celles qui ont été supposées dans la Mécanique de M. ***Poisson***. En outre, on a corrigé quelques fautes qui s'étaient glissées dans les formules relatives à la détermination de l'axe instantané de rotation.

ϑ l'angle que l'axe des z' fait avec une droite perpendiculaire au plan invariable, laquelle sera prise pour l'axe dec z;

p, q, r les vitesses de rotation autour des axes des x', y', z'.

Connaissant les angles ψ, φ, ϑ, on déterminera la direction des axes des x', y', z', de la manière suivante. Supposons que le plan invariable soit horizontal et menons à ce plan une verticale, par le point fixe O, dirigée en bas ou dans le sens de la pesanteur. Soit OA la droite fixe prise à l'arbitraire dans le plan invariable; soient OB, OC, OD trois autres droites dans le même plan, telles que les angles BOA, BOC, BOD, comptés dans le même sens dans lequel le choc primitif a fait tourner le corps, soient respectivement égaux a ψ, φ, $\varphi + \frac{1}{2}\pi$. Faisons tourner le plan et la perpendiculaire qu'on lui a menée, supposée fixement liée avec lui, autour de la droite OB, de manière que la partie adjacente à OB et dirigée dans le même sens dans lequel les trois angles ψ, φ, $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ ont été comptés, s'élève, au commencement de son mouvement, au dessus du plan horizontal. Quand le plan et l'axe perpendiculaire au plan, auront décrit l'angle ϑ, les directions qu'occuperont alors les droites OC et OD, et l'axe perpendiculaire au plan, seront celles des axes des x', y', z'. La direction de la verticale, perpendicnlaire au plan invariable, sera prise pour l'axe des z. (*Poisson* Méc. II. p. 62—64.)

Les quantités p, q, r sont liées entre elles par les deux équations,

$$1. \quad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2; \end{cases}$$

les mêmes quantités sont liées avec le temps, par les formules différentielles,

$$2. \quad dt = \frac{A}{B-C}\frac{dp}{qr} = -\frac{B}{A-C}\frac{dq}{rp} = \frac{C}{A-B}\frac{dr}{pq};$$

l'angle ψ s'obtient au moyen d'une autre formule différentielle,

$$3. \quad d\psi = \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} l\,dt;$$

enfin les angles ϑ et φ sont données par les formules algébriques,

$$4. \quad \frac{Ap}{l} = -\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \frac{Bq}{l} = -\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \frac{Cr}{l} = \cos\vartheta.$$

Les quantités h et l sont des constantes arbitraires; deux autres constantes arbitraires entreront dans les formules du problème par l'intégration des équations (2.) et (3.). (*P.* M. II. 139—144.)

Limites des quantités p, q, r.

Substituant les valeurs (1.), de h et de l^2, on voit que les deux constantes,

$$(A-C)(Ah-l^2), \qquad (A-C)(l^2-Ch)$$

sont positives, parceque, B étant moyen entre A et C, les quantités $A-B$ et $B-C$ ont le même signe que $A-C$. Comme on est maître de choisir pour A le plus grand ou le plus petit moment, supposons que l'on ait fait l'un ou l'autre choix, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif. Il suit de là, que les six constantes,

$$A-C, \quad A-B, \quad B-C,$$
$$Ah-l^2, \quad Bh-l^2, \quad l^2-Ch$$

auront toutes le même signe, ou que le produit de deux d'entre elles sera toujours positif. J'observe que quand on employera, dans les calculs suivants, le signe ambigu $\pm$ ou $\mp$, on supposera toujours que le signe supérieur ait lieu, lorsque $Bh > l^2$, et le signe inférieur, dans le cas contraire. On prendra les radicaux toujours avec le signe positif, de sorte qu'on devra mettre, par exemple,

$$\frac{1}{A-C}\sqrt{\frac{(A-C)(Ah-l^2)}{C}} = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}.$$

Exprimons p^2 et r^2 par q^2, on aura

$$5. \quad \begin{cases} p^2 = \dfrac{l^2-Ch-B(B-C)q^2}{A(A-C)} \\ r^2 = \dfrac{Ah-l^2-B(A-B)q^2}{C(A-C)}. \end{cases}$$

On voit par là, que q^2 doit être plus petit que la plus petite des deux quantités,

$$\frac{l^2-Ch}{B(B-C)} \quad \text{et} \quad \frac{Ah-l^2}{B(A-B)}.$$

Or comme, suivant la supposition faite, la différence

$$\frac{Ah-l^2}{A-B} - \frac{l^2-Ch}{B-C} = \frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(A-B)(B-C)}$$

est positive, on aura

$$\frac{Ah-l^2}{B(A-B)} > \frac{l^2-Ch}{B(B-C)} > q^2.$$

Nous verrons que q^2 peut atteindre la valeur limite, pour laquelle la quantité p s'évanouit; mais la quantité r ne saura jamais s'évanouir et conservera, par suite, toujours le même signe. Comme le choix de ce signe est arbitraire, supposons que r ait le même signe que $Bh-l^2$ ou $A-C$.

Sur la marche que suivent les variables p, q, r, avec le temps croissant, et comment le mouvement proposé se compose de deux mouvements périodiques.

Nommons q' la limite supérieure de q,

$$q' = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}},$$

et supposons qu'à un certain temps, le signe de p soit négatif. Le signe de dq sera alors positif ou q croissant, à cause de la formule,

$$dq = -\frac{(A-C)rp.dt}{B},$$

et de ce que l'élément du temps, est toujours positif. Le facteur p ne pouvant changer de signe avant de s'évanouir, q devra continuer à croître jusqu'à ce qu'on ait, $p = 0$, et par suite, $q = +q'$.

A cause de la formule

$$dp = \frac{(B-C)qr\,dt}{A},$$

et parceque $q = q'$ est positif, on aura alors dp positif; donc p devant continuer à croître, changera de signe, en passant du négatif au positif. La quantité q, par suite, commencera à décroître, dq devenant négatif, et elle devra continuer à décroître tant que p reste positif. Au contraire, p devra continuer à croître, tant que q, en décroissant, à partir de sa limite supérieure $+q'$, restera positif. Lorsque q s'évanouit, en passant du positif au négatif, p aura atteint sa limite supérieure

$$p' = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}},$$

et devra commencer à décroître, dp devenant négatif. Lorsque p, en décroissant, atteint la valeur zéro et repasse au négatif, la variable q, en décroissant aussi, atteint sa limite inférieure $-q'$, et recommencera à croître jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à sa limite supérieure $+q'$, et lorsqu'elle, dans cette marche, en s'évanouissant, repassera au positif, la variable p, de son côté, aura atteint sa limite inférieure $-p'$. C'est ainsi que les variables p et q, avec le temps croissant, passent et repassent, d'une de leurs limites à l'autre, de manière que, q prenant successivement les valeurs,

$$\ldots \quad -q', \quad 0, \quad +q', \quad 0, \quad -q', \quad +q', \quad \ldots$$

la quantité p obtiendra les valeurs correspondantes,

$$\ldots \quad 0, \quad -p', \quad 0 \quad +p', \quad 0, \quad -p', \quad \ldots$$

La limite inférieure de r, est

$$r^0 = \pm\sqrt{\frac{Bh-l^2}{C(B-C)}},$$

la limite supérieure,

$$r' = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{B(A-B)}},$$

et l'on démontre aisément qu'aux valeurs précédentes de p et q, correspondent les valeurs de la quantité r,

$$\ldots\ r',\ r^0,\ r',\ r^0,\ r',\ r^0,\ r',\ \ldots$$

Supposons que le temps dans lequel la variable q croit ou décroit d'une de ses limites à l'autre, soit égal à T; supposons de plus que, pendant que q croit constamment d'une valeur indéfinie q jusqu'à sa limite supérieure q' ou décroit constamment de q' à q, le temps t ait augmenté de la quantité $\tau - t$; on aura

$$m\int_{-q'}^{q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} = T$$

$$m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = \tau - t,$$

où l'on a posé $m = -\frac{B}{A-C}$. Généralement, la quantité pr ayant, pour la même valeur de q, des valeurs opposées, selon que q est croissant ou décroissant, il sera toujours permis d'échanger entre elles les deux limites de l'intégrale. On aura donc successivement,

$$m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = \tau - t$$

$$m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = \tau - t$$

$$m\int_{q}^{-q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = T-(\tau-t)$$

$$m\int_{-q'}^{q}\frac{dq}{pr} = m\int_{-q'}^{q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = T-(\tau-t),$$

où l'on suppose toujours, que la variable q croit ou décroit constamment, en passant d'une limite de l'intégrale à l'autre. La variable q étant retournée à sa valeur primitive et à l'état de croître, elle recommencera de nouveau les mêmes tours et retours, et l'on retrouvera, pour les différents intervalles, les mêmes valeurs de l'intégrale que précédemment.

Ajoutant successivement, au temps t correspondant à la valeur primitive

de q, les différentes intégrales dont on vient de donner les valeurs, on aura le tableau suivant, des valeurs correspondantes du temps t et de la variable q,

$$\begin{array}{cccccccc} q, & q', & q, & -q', & q, & q', & q, & \ldots \\ t, & \tau, & 2\tau - t, & \tau + T, & t + 2T, & \tau + 2T, & 2\tau + 2T - t, & \ldots \end{array}$$

On voit par ce tableau que, le temps ayant augmenté de la quantité $2T$, la variable q sera retournée à la même valeur et aura repris la même direction de sa marche. La même chose aura lieu par rapport aux quantités p et r et, par suite, comme il résulte des formules (4.), par rapport aux cosinus et sinus des angles φ et ϑ.

Venons à l'examen de l'intégrale par laquelle on a exprimé l'angle ψ,

$$\psi = -l\int \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt.$$

Si l'on prend la constante l avec le signe positif, cette intégrale montre que ψ décroit constamment. Considérons l'expression par laquelle, sous le signe intégral, se trouve multiplié dt, comme fonction de t, il suit, des remarques précédentes, que cette fonction reprend les mêmes valeurs quand t augmente de la constante $2T$. On aura donc, en désignant cette fonction par $F(t)$, pour deux limites quelconques de l'intégrale, t_0 et t_1,

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \int_{t_0+2T}^{t_1+2T} F(t)\,dt,$$

ou, en ajoutant aux deux membres la même intégrale étendue de t_1 à $t_0 + 2T$,

$$\int_{t_0}^{t_0+2T} F(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_1+2T} F(t)\,dt.$$

On voit, par cette formule, que l'intégrale,

$$\int_{t}^{t+2T} F(t)\,dt,$$

est indépendante de la valeur de la variable t ou que cette intégrale est une quantité constante positive que nous désignerons par

$$\frac{2T\Psi}{l} = \int_{t}^{t+2T} \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt.$$

Supposons que la valeur $\psi = 0$, corresponde au temps $t = t_0$, on aura

$$-l\int_{t_0}^{t} \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt = \psi$$

$$-l\int_{t_0}^{t+2T} \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt = -l\int_{t_0}^{t} \frac{Ap^2 + Bp^2}{A^2p^2 + B^2p^2}\,dt - l\int_{t}^{t+2T} \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt$$

$$= \psi - 2T\Psi.$$

Donc, toutes les fois que le temps augmentera de la quantité constante $2T$, l'angle ψ décroîtra de la quantité constante $2T\Psi$. De là suit que, faisant

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0),$$

l'angle ψ' ne change pas du tout de valeur, quand le temps augmente de la constante $2T$, ou que ψ', de même que les quantités p, q, r, et les cosinus et sinus des angles φ et ϑ, est une fonction du temps *périodique* et qui jouit de la même période que ces quantités, $2T$.

Supposons que, dans le plan invariable, une droite, que je désignerai par (x), tourne uniformément, et avec une vitesse angulaire Ψ, autour du point fixe, dans le même sens dans lequel les angles ψ décroissent ou dans lequel se fait la rotation du corps autour de l'axe des z. Supposons de plus que, pour le temps $t = t_0$, cette droite coïncide avec la droite fixe, à partir de laquelle l'angle ψ est compté. Dans un temps indéfini t, la droite (x) fera avec la droite fixe, un angle égal à

$$-\Psi(t - t_0).$$

Donc, ψ étant l'angle que l'intersection du plan des x', y' et du plan invariable, fait avec la droite fixe, la même intersection fera avec la droite mobile (x), un angle égal à

$$\psi + \Psi(t - t_0) = \psi'.$$

On pourra donc, indifféremment, déterminer cette intersection, ou par l'angle ψ qu'elle fait avec la droite fixe, ou par l'angle ψ' qu'elle fait avec la droite mobile (x).

Soit fixement liée avec la droite (x) une autre droite (y), perpendiculaire à (x) dans le plan invariable, et dont la direction est la même que la droite (x) aurait après une rotation de 90^0, faite dans le sens de son mouvement. On connaîtra, à chaque instant, la position des droites (x) et (y), puisqu'elles tournent uniformément, dans le plan invariable, autour du point fixe, dans un sens donné, et avec une vitesse angulaire donnée. A un instant quelconque, prenons les droites (x) et (y) pour axes des coordonnées x et y, et pour axe des z, la perpendiculaire menée, par le point fixe, au plan invariable. Soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque du corps mobile, rapportées à ces axes; soient x', y', z', les coordonnées du même point, rapportées aux axes principaux fixes dans le corps; on aura

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

et l'on obtiendra les expressions des neuf quantités, α, β, etc., de celles données dans la Mécanique de Mr. ***Poisson*** (II. pg. 64), en remplaçant seulement l'angle ψ par l'angle

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0).$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi' + \cos\varphi \cos\psi' \\
\alpha' &= \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi' - \cos\varphi \sin\psi' \\
\alpha'' &= -\sin\vartheta \sin\varphi, \\
\beta &= \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi' - \sin\varphi \cos\psi' \\
\beta' &= \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi' + \sin\varphi \sin\psi' \\
\beta'' &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\
\gamma &= \sin\vartheta \sin\psi' \\
\gamma' &= \sin\vartheta \cos\psi' \\
\gamma'' &= \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Les cosinus et sinus des trois angles φ, ϑ, ψ', reprenant toujours les mêmes valeurs, après un accroissement du temps égal à $2T$, on voit, par ces formules, que les neuf quantités α, β, etc., sont des fonctions du temps périodiques et jouissent toutes de la même période $2T$. Connaissant donc les positions diverses que le corps mobile prend dans un temps limité $2T$, on en connaîtra la position pour tout le temps, futur ou passé. En effet, étant donnée une des positions du corps, correspondante à un temps t, pour en déterminer la position correspondante au temps $t + 2iT$, i étant un nombre entier quelconque, on n'aura qu'à faire tourner le corps, autour de l'axe des z, d'un angle constant égal à $2i\Psi T$, dans le sens de la rotation primitive. Le corps se trouvera dans la position correspondante au temps $t - 2iT$, après avoir fait la même rotation dans le sens opposé. On voit par là, que le mouvement du corps se compose de deux mouvements périodiques; après un temps égal à $\frac{2\pi}{\Psi}$, les droites (x) et (y), mobiles dans le plan invariable, auront repris la même position dans ce plan, l'axe des z restant toujours en repos; et après le temps $2T$, le corps aura repris la même position, par rapport aux axes des x, y, z.

Quand on est parvenu à réduire un problème aux quadratures, un grand avantage de cette réduction, consiste en ce qu'elle nous met à même de juger en général de la marche que suivent les variables. Mais il semble que l'on n'a pas assez fait ressortir cet avantage, dans tous les cas, des formules in-

tégrales, puisque si l'on a discuté cette marche des variables, ce n'a été presque toujours que dans les cas qui se prêtent aux solutions approximatives et que l'on aurait pu traiter, sans même connaître la solution générale.

Le raisonnement qu'on vient de faire sur la nature des variables qui, dans le problème proposé, déterminent à chaque instant la position du mobile, est indépendant de ce qu'on peut réduire ces variables aux fonctions elliptiques. Mais par le moyen de ces fonctions, on saura représenter ces mêmes variables par des séries périodiques simples et régulières et d'une convergence des plus rapides.

Réduction des neuf coefficients α, β etc. aux fonctions elliptiques.

Legendre, dans son Traité des Fonctions Elliptiques, a réduit les expressions du temps t et de l'angle ψ, à des intégrales elliptiques, respectivement de la première et de la troisième espèce. Les cos., sin., Δ de l'amplitude de ces intégrales, sont égaux aux cosinus des angles que les axes principaux du corps font avec l'axe des x, multipliés par des facteurs constants lesquels, comme le module et le paramètre des mêmes intégrales, sont déterminés par les moments principaux du corps et les données initiales du problème. On saura donc exprimer, réciproquement, en fonctions de t, les cosinus des angles que les axes principaux font avec l'axe des x, ou les quantités désignées ci-dessus par α'', β'', γ''. La théorie des fonctions elliptiques fait voir que ces expressions inverses peuvent être représentées par des ***fractions*** dont les numérateurs et le dénominateur sont des fonctions de la plus grande simplicité et lesquelles, à cause de l'extrême convergence des séries dans lesquelles elles peuvent être développées, pour toute valeur réelle ou imaginaire de leur argument, doivent être regardées, dans le calcul, comme des quantités finies, de même que les quantités algébriques, trigonométriques ou exponentielles. Par ces mêmes fonctions on a exprimé encore, d'une manière très simple, les intégrales elliptiques de la troisième espèce. On saura donc aussi exprimer l'angle ψ dépendant d'une intégrale elliptique de la troisième espèce, par ces fonctions simples et explicites du temps.

Les expressions en fonctions du temps, dont on vient de parler, des trois coefficients, α'', β'', γ'', et de l'angle ψ, ont été données par M. ***Rueb*** dans une savante thèse *) laquelle, en outre, contient plusieurs

*) Specimen inaugurale de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi accelatrici sollicitati auct. *Adolpho Stephano Rueb* Roterodamensi, Trajecti ad Rhenum 1834.

développements intéressants. Ces expressions suffisent pour déterminer la position des axes principaux du mobile, correspondante à un temps quelconque. Mais on a cru que, pour avoir une solution complète, il faudra donner les fonctions du temps, par lesquelles s'expriment tous les neuf coefficients, α, β etc. En remplissant cette tâche, on est parvenu à des expressions de ces quantités, qui par leur simplicité et leur caractère analogue à celui des fonctions algébriques rationnelles, sont éminemment propres à être traitées dans le calcul, circonstance d'autant plus importante, puisque ces mêmes quantités pourront et devront être un élément fondamental de la mécanique des mobiles à trois dimensions.

Rappelons les formules (3.) que j'écrirai de la manière suivante,

$$p^2 = \frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}\left(1 - \frac{B(B-C)}{l^2-Ch}q^2\right),$$

$$r^2 = \frac{Ah - l^2}{C(A-C)}\left(1 - \frac{B(A-B)}{Ah-l^2}q^2\right).$$

Le facteur de q^2 étant plus grand dans la valeur de p^2 que dans celle de r^2, on fera,

$$\sqrt{\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}}\cdot q = \sin\xi$$

$$\sqrt{\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}}\cdot q = k\sin\xi,$$

où k est une constante plus petite que l'unité et qui est donnée par l'équation,

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}},$$

d'où suit

$$k' = \sqrt{(1-k^2)} = \sqrt{\frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Posant, de plus,

$$\Delta(\xi) = \sqrt{(1-k^2\sin^2\xi)},$$

il viendra

$$p = -\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\cos\xi$$

$$q = \sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\sin\xi$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\cdot\Delta(\xi).$$

L'on a, dans ces formules, déterminé les signes de manière que l'angle ξ croit constamment avec le temps. En effet, on a vu que le signe de p doit être opposé à celui de dq, ou à celui de $\cos\xi d\xi$. Donc, pour que $d\xi$ soit toujours positif, ainsi que l'élément dt, on a dû donner à la valeur de p le signe —. Quant à la valeur de r, il a fallu lui donner le signe $\pm$, puisqu'on a supposé que r ait le même signe que $Bh - l^2$, et qu'on est convenu de prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que $Bh - l^2$ est positif ou négatif.

En substituant les valeurs de p, q, r, dans la formule différentielle,

$$dt = -\frac{B}{A-C}\frac{dq}{rp},$$

il viendra

$$\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\cdot dt.$$

Supposons que ξ s'évanouisse en même temps que ψ ou pour $t = t_0$, et faisons,

$$u = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\cdot(t-t_0) = n(t-t_0),$$

en posant

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}.$$

On aura donc

$$\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = du,$$

ou, d'après la notation dont on se sert dans l'analyse des fonctions elliptiques,

$$\xi = \operatorname{am}(u),$$

et, par suite,

$$p = -\frac{l}{A}\sin\vartheta\sin\varphi = -\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\cdot\cos\operatorname{am}u$$

$$q = -\frac{l}{B}\sin\vartheta\cos\varphi = \sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\cdot\sin\operatorname{am}u$$

$$r = \frac{l}{C}\cos\vartheta = \sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\cdot\Delta\operatorname{am}u,$$

le module des fonctions elliptiques étant la constante k dont on a donné ci-dessus la valeur.

L'angle ϑ est supposé entre 0 et 180°, d'où suit que $\sin\vartheta$ sera toujours positif. Cet angle sera entre 0 et 90°, si $Bh > l^2$, et entre 90° et 180°, dans le cas contraire. Donc, selon que $Bh - l^2$ est positif ou négatif, l'axe

des z' doit être mené au dessous ou au dessus du plan invariable supposé horizontal.

L'intersection qu'a, au temps $t = t_0$, le plan des x', y' avec le plan invariable, est la droite fixe dans ce dernier plan, parceque pour $t = t_0$ on a supposé $\psi = 0$. D'autre côté, pour $t = t_0$ ou $u = 0$, on a $\cos\varphi = 0$ et $\sin\vartheta \sin\varphi$ positif; par conséquence, $\sin\vartheta$ étant toujours positif, l'on doit avoir $\varphi = +\frac{1}{2}\pi$, c'est à dire, l'axe de x' fera, dans le sens convenu, l'angle $+\frac{1}{2}\pi$ avec l'intersection du plan des x', y', et du plan invariable, ou avec la droite fixe dans ce dernier plan. En augmentant cet angle, dans son plan et dans le même sens, de $\frac{1}{2}\pi$, on a la position de l'axe des y'. Cet axe fera donc avec la droite fixe dans le plan invariable, l'angle π. Donc, au temps $t = t_0$, l'axe des y' sera couché sur le plan invariable, et y' prendra une position opposée à la direction de la droite fixe dans ce plan.

Pour réduire aux fonctions elliptiques, l'angle ψ, substituons d'abord dans $A^2p^2 + B^2q^2$, les valeurs données ci-dessus, de p et de q. On aura par cette substitution,

$$A^2p^2 + B^2q^2 = (l^2 - Ch)\left\{\frac{A\cos^2 \mathrm{am}\, u}{A-C} + \frac{B\sin^2 \mathrm{am}\, u}{B-C}\right\}$$

$$= \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}\left(1 + \frac{C(A-B)}{A(B-C)}\sin^2 \mathrm{am}\, u\right).$$

En faisant

$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)} = -\sin^2 \mathrm{am}(ia') = \mathrm{tang}^2 \mathrm{am}(a', k'),$$

où l'on supposera a' entre 0 et K', cette expression se change dans la suivante,

$$A^2p^2 + B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}\left(1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\,(ia')}\right),$$

ou, comme on a $\sin \mathrm{am}(iK' - ia) = \frac{-1}{k \sin \mathrm{am}(ia)}$, dans celle-ci,

$$A^2p^2 + B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}(1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, i(K' - a') \sin^2 \mathrm{am}\, u).$$

Donc, étant posé,

$$K' - a' = a,$$

il viendra

$$A^2p^2 + B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}(1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u).$$

On tire de là,

$$\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} = \frac{1}{A}+\frac{A-B}{A}\cdot\frac{Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}$$
$$= \frac{1}{A}+\frac{(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)}\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

d'où suit

$$\psi = -l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt$$
$$= -l\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}}\cdot\Big(u+\frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\int_0^u\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}\Big).$$

Or, de ce qu'on a posé ci-dessus, l'on tire,

$$-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia) = \frac{C(A-B)}{A(B-C)},$$
$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = \frac{B(A-C)}{A(B-C)},$$
$$k^2\cos^2\mathrm{am}(ia) = \frac{A-B}{B-C}\Big(\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}+\frac{C}{A}\Big) = \frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\frac{l^2}{Ah-l^2},$$

et, par suite,

$$k^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\Delta\mathrm{am}(ia) = \frac{\pm il(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Donc, en posant

$$\nu = \frac{l}{An} = l\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}} = \pm i\frac{C}{A-C}\frac{\cos\mathrm{am}(ia)\Delta\mathrm{am}(ia)}{\sin\mathrm{am}(ia)},$$

il viendra

$$\psi = -\nu.u\pm i\int_0^u\frac{k^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\Delta\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

On tire la valeur de l'intégrale précédente, de la formule (*Fundamenta nova* page 146, 3.),

$$\int_0^u\frac{k^2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\Delta\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u.du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u} = \frac{d\log\Theta(a)}{da}u+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

dans laquelle la constante a peut avoir des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. En effet, il suit de cette formule, en y mettant ia au lieu de a,

$$\psi = \Big(\pm\frac{d\log\Theta(ia)}{da}-\nu\Big)u\pm\tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)},$$

ou

$$\psi = -n'u\pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

étant posé,

$$n' = \nu \mp \frac{d \log \Theta(ia)}{da}.$$

Pour parvenir aux valeurs précédentes, des quantités p, q, r, et de l'angle ψ, il suffit de remplacer les formules de ***Legendre*** par celles établies dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques. Ces valeurs ont été données, pour la première fois, dans le beau Mémoire de M. ***Rueb***. Mais, pour achever la solution du problème proposé, et pour arriver à des formules définitives, il faudra faire des calculs ultérieurs et pour lesquels les expressions trouvées précédemment, ne sont, pour ainsi dire, qu'un point de départ.

Substituant dans n' la valeur donnée ci-dessus de ν, et remarquant qu'on a

$$\frac{i \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)}{\sin \operatorname{am}(ia)} = \frac{d \log \sin \operatorname{am}(ia)}{da} = \frac{d \log H(ia)}{da} - \frac{d \log \Theta(ia)}{da},$$

on trouve

$$n' = \pm \left\{ \frac{C d \log H(ia)}{(A-C) da} - \frac{A d \log \Theta(ia)}{(A-C) da} \right\}.$$

La quantité q étant proportionelle au $\sin \operatorname{am} u$, lorsqu'elle croit constamment de sa limite inférieure à sa limite supérieure, l'argument u, croissant indéfiniment avec le temps, aura augmenté de $2K$, et, par suite, le temps $t = \frac{1}{n} u + t_0$, aura augmenté de $\frac{2K}{n}$. Or, on a ci-dessus appelé T cet intervalle du temps pendant lequel q, en croissant constamment, parvient d'une limite à l'autre; on aura donc

$$T = \frac{2K}{n}.$$

En augmentant u de $2K$ ou t de T, la fonction $\Theta(u \mp ia)$ ne change pas de valeur, donc l'angle ψ décroitra de $2n'K = nn'T$. Or, on a trouvé égale à ΨT cette quantité de laquelle ψ décroit chaque fois que le temps augmente de T, Ψ étant la vitesse angulaire de la droite (x); on aura donc

$$\Psi = nn' = \pm \left\{ \frac{nC}{A-C} \frac{d \log H(ia)}{da} - \frac{nA}{A-C} \frac{d \log \Theta(ia)}{da} \right\}.$$

Des formules données ci-dessus, l'on déduit aisément les suivantes,

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{A-C}{AC} = \pm \frac{i \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)}{\sin \operatorname{am}(ia)} = \pm \frac{d \log \sin \operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{A-B}{AB} = \pm \frac{k^2 \sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia)}{i \Delta \operatorname{am} ia} = \pm \frac{d \log \Delta \operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{B-C}{BC} = \pm \frac{i \cos \operatorname{am}(ia)}{\sin \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)} = \pm \frac{d \log \cos \operatorname{am}(K-ia)}{da}.$$

La première de ces formules donne,

$$\Psi \frac{d\log \sin \mathrm{am}(ia)}{da} = \frac{l}{A}\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{l}{C}\frac{d\log \Theta(ia)}{da},$$

d'où l'on tire, après quelques réductions faciles, les formules remarquables,

$$\Psi - \frac{l}{A} = \mp n \frac{d\log \Theta(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{B} = \mp n \frac{d\log \Theta_1(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{C} = \mp n \frac{d\log H(ia)}{da}.$$

L'argument constant a étant entre 0 et K', les quantités,

$$-\frac{d\log \Theta(ia)}{da}, \quad \frac{d\log H(ia)}{da}, \quad \frac{d\log H_1(ia)}{da}, \quad \frac{d\log \Theta_1(ia)}{da}$$

seront réelles et positives *). En vertu de cette remarque, on pourra conclure, des formules précédentes, que $\frac{l}{\Psi}$ est toujours contenu entre le plus grand et le plus petit moment, et que le moment moyen est toujours contenu entre $\frac{l^2}{h}$ et $\frac{l}{\Psi}$.

Posons

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0) = \psi + nn'(t - t_0) = \psi + n'u,$$

l'angle ψ' sera une fonction périodique de l'argument u ou du temps t, donnée par l'équation,

$$\psi' = \frac{\pm 1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u\mp ia)}{\Theta(u\mp ia)}.$$

L'angle ψ' étant exprimé ainsi par un logarithme divisé par l'unité imaginaire, le *sine* et le *cosine* de cet angle seront des fonctions algébriques de la quantité qui se trouve sous le signe logarithmique. Les expressions du sine et cosine d'une intégrale elliptique de la troisième espèce et au caractère trigonométrique, telle qu'elle sert à exprimer l'angle ψ', seront donc plus simples que celle de l'intégrale même. Or ce ne sont presque jamais les angles eux mêmes, mais leurs sines et cosines, dont on fait usage dans les calculs analytiques. En passant de l'expression logarithmique, de l'intégrale, aux ex-

*) C'est ce qui est clair par rapport à la troisième et la quatrième de ces quantités; par rapport à la première, on le démontre en développant $\Theta(ia)$ en produit infini, et par rapport à la deuxième, en la ramenant à la première par la formule, $\frac{d\log H(ia)}{da} = \frac{\pi}{2K} - \frac{d\log \Theta(ia')}{da'}$.

pressions de son sine et cosine, on aura donc réuni le double avantage, d'avoir des expressions algébriques, et d'avoir les expressions des quantités mêmes qui entrent dans le calcul. C'est ainsi qu'on franchit véritablement la barrière devant laquelle on a coutume de s'arrêter dans les cas nombreux où l'on parvient à ramener un angle à une intégrale elliptique de la troisième espèce. On verra, de plus, dans la question que l'on traite ici, et dans beaucoup d'autres, que, le sine et cosine de l'intégrale se trouvant divisés par un radical, ce radical s'en ira dans le cours du calcul, à l'aide d'un facteur par lequel ces mêmes sine et cosine seront multipliés; de sorte que l'on parviendra, finalement, à des expressions fractionnaires ***rationnelles*** et qui ont une manière d'être parfaitement analogue à celle des fonctions elliptiques, $\sin\mathrm{am}$, $\cos\mathrm{am}$, $\Delta\mathrm{am}$; seulement les arguments des numérateurs de ces fractions différeront avec celui de leur dénominateur d'une quantité constante qui pourrait être quelconque, pendant que, dans les expressions des fonctions elliptiques élémentaires, $\sin\mathrm{am}$, $\cos\mathrm{am}$, $\Delta\mathrm{am}$, les différences des arguments du numérateur et du dénominateur, ont des valeurs constantes particulières, savoir celles des demi-indices, iK', $K+iK'$ ou K.

Voici à présent les calculs mêmes qu'il reste à faire pour achever la solution du problème mécanique proposé.

De la valeur donnée ci-dessus, de l'angle ψ', on tire

$$e^{i\psi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u\mp ia)}{\Theta(u\pm ia)}} = \frac{\Theta(u\mp ia)}{\sqrt{N}},$$

où l'on a posé

$$\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = N.$$

On aura donc

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{N}}$$

$$\pm\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{N}}.$$

Les formules par lesquelles on a ci-dessus rappelé les variables p, q, r, aux fonctions elliptiques, donnent,

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{A-C}}\cdot\cos\mathrm{am}\,u$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{B-C}}\cdot\sin\mathrm{am}\,u$$

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \frac{\pm 1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}}\cdot\Delta\mathrm{am}\,u.$$

Ramenons, dans ces formules, les facteurs constants, aux fonctions elliptiques à l'argument imaginaire ia.

On aura d'abord, d'après les formules par lesquelles on a introduit le module k et les fonctions elliptiques de ia,

$$\frac{C(Ah-l^2)}{(A-C)l^2} = -\operatorname{tang}^2 \operatorname{am}(ia);$$

puis,

$$\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)} = k^2$$

$$\frac{B(A-C)}{C(A-B)} = -\frac{\Delta^2 \operatorname{am}(ia)}{k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia)}$$

$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)} = -\frac{1}{k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia)},$$

et, par suite,

$$\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2} = \frac{\operatorname{tang}^2 \operatorname{am}(ia)\,\Delta^2 \operatorname{am}(ia)}{\sin^2 \operatorname{am}(ia)} = \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(ia)}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}$$

$$\frac{A(l^2-Ch)}{(A-C)l^2} = \frac{\operatorname{tang}^2 \operatorname{am}(ia)}{\sin^2 \operatorname{am}(ia)} = \frac{1}{\cos^2 \operatorname{am}(ia)}.$$

On aura donc les valeurs suivantes, des cosinus des angles que les axes principaux du mobile font avec la perpendiculaire au plan invariable,

$$\alpha'' = -\sin\vartheta \sin\varphi = -\frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)}$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta \cos\varphi = \frac{\Delta \operatorname{am}(ia) \sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)}$$

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \pm \frac{\sin \operatorname{am}(ia)\,\Delta \operatorname{am} u}{i \cos \operatorname{am}(ia)}.$$

En y substituant les formules,

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{Hu}{\Theta u}, \qquad \sin \operatorname{am}(ia) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(ia)}{\Theta(ia)}$$

$$\cos \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1 u}{\Theta u}, \qquad \cos \operatorname{am}(ia) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(ia)}{\Theta(ia)}$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1 u}{\Theta u}, \qquad \Delta \operatorname{am}(ia) = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(ia)},$$

ces valeurs se changent dans celles-ci,

$$\alpha'' = -\sin\vartheta \cos\varphi = -\frac{\Theta(ia) H_1 u}{H_1(ia) \Theta u}$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta \cos\varphi = \frac{\Theta_1(ia) Hu}{H_1(ia) \Theta u}$$

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \pm \frac{H(ia) \Theta_1 u}{i H_1(ia) \Theta u}.$$

On déduit des formules précédentes,

$$\sin^2\vartheta = \frac{\cos^2\mathrm{am}\,u + \Delta^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}(ia)} = \frac{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}.$$

Or on a la formule suivante, qui est d'un grand usage dans l'analyse des fonctions elliptiques (Fund. p. 154. III.),

$$\frac{\Theta^2(0)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2 u} = \frac{\Theta^2(0).N}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2 u} = 1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u;$$

laquelle étant substituée dans l'équation précédente, donnera

$$\sin\vartheta = \frac{\Theta(0)\sqrt{N}}{\Theta(ia)\,\Theta u}\cdot\frac{1}{\cos\mathrm{am}(ia)},$$

ou

$$\sin\vartheta = \frac{H_1(0).\sqrt{N}}{H_1(ia)\,\Theta u}.$$

On tire de cette formule et des valeurs données ci-dessus, de $\cos\psi'$ et de $\sin\psi'$,

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u+ia)}{2\sqrt{N}}$$

$$\pm\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{N}},$$

les valeurs des cosinus des angles que l'axe des z' fait avec les droites (x) et (y), mobiles dans le plan invariable,

$$\gamma = \sin\vartheta\sin\psi' = \pm\frac{H_1(0)\{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta u}$$

$$\gamma' = \sin\vartheta\cos\psi' = \frac{H_1(0)\{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta u},$$

formules rationnelles et dans lesquelles le radical, $\sqrt{N}$, par lequel sont divisées les valeurs de $\cos\psi'$ et de $\sin\psi'$, s'en est allé par la multiplication faite avec le facteur $\sin\vartheta$.

En divisant par la valeur de $\sin\vartheta$ les équations données ci-dessus,

$$\sin\vartheta\sin\varphi = \frac{\Theta(ia)\,H_1 u}{H_1(ia)\,\Theta u}, \qquad \sin\vartheta\cos\varphi = -\frac{\Theta_1(ia)\,Hu}{H_1(ia)\,\Theta u},$$

on trouvera les valeurs suivantes, de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$,

$$\sin\varphi = \frac{\Theta(ia)\,H_1 u}{H_1(0).\sqrt{N}}, \qquad \cos\varphi = -\frac{\Theta_1(ia)\,Hu}{H_1(0).\sqrt{N}},$$

dans lesquelles on retrouve le radical, $\sqrt{N}$.

On vient d'exprimer par les fonctions elliptiques, les valeurs des *cinq* coefficients,

$$\alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma'', \quad \gamma', \quad \gamma.$$

Quant aux *quatre* restants, ils sont donnés par les angles φ, ϑ, ψ', au moyen des formules,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi' + \cos\varphi \cos\psi' \\
\alpha' &= \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi' - \cos\varphi \sin\psi' \\
\beta &= \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi' - \sin\varphi \cos\psi' \\
\beta' &= \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi' + \sin\varphi \sin\psi'.
\end{aligned}$$

En substituant dans ces expressions, les valeurs qu'on a trouvées, de

$$\cos\vartheta, \quad \sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi', \quad \cos\psi',$$

on voit tout d'abord, qu'encore dans les valeurs de α, β, α', β', s'en va le radical $\sqrt{N}$. Mais pour avoir les expressions les plus simples de ces coefficients, il faudra passer par quelques transformations et appeler à l'aide, les formules de l'addition des fonctions elliptiques.

En effet, en substituant dans les deux formules d'addition,

$$\operatorname{cos\,am}(u \pm ia) = \frac{\operatorname{cos\,am}(ia)\operatorname{cos\,am} u \mp \operatorname{sin\,am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\operatorname{sin\,am} u\,\Delta\operatorname{am} u}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am}(ia)\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}$$

$$\operatorname{sin\,am}(u \pm ia) = \frac{\operatorname{cos\,am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\operatorname{sin\,am} u \pm \operatorname{sin\,am}(ia)\operatorname{cos\,am} u\,\Delta\operatorname{am} u}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am}(ia)\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u},$$

les formules trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cos\,am}(u)}{\operatorname{cos\,am}(ia)} &= \sin\vartheta \sin\varphi \\
\frac{\Delta\operatorname{am}(ia)\operatorname{sin\,am} u}{\operatorname{cos\,am}(ia)} &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\
\frac{\operatorname{sin\,am}(ia)\,\Delta\operatorname{am} u}{\operatorname{cos\,am}(ia)} &= \pm i \cos\vartheta \\
\frac{1 - k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am}(ia)\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}(ia)} &= \sin^2\vartheta,
\end{aligned}$$

on parvient aux formules importantes,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cos\,am}(u \pm ia) &= \frac{\sin\varphi \pm i \cos\vartheta \cos\varphi}{\sin\vartheta} \\
\operatorname{sin\,am}(u \pm ia) &= \frac{-\cos\varphi \pm i \cos\vartheta \sin\varphi}{\sin\vartheta}.
\end{aligned}$$

On substituera aux signes ambigus $\pm$, dans les deux membres de chacune de ces

deux équations, ou le même signe ou des signes opposés, selon que $Bh - l^2$ est positif on négatif.

Introduisons à présent dans les valeurs données ci-dessus de α, α', β, β', au lieu de $\cos\psi'$ et $\sin\psi'$, les exponentielles, on aura,

$$\begin{aligned}
2\alpha &= (-i\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\varphi)e^{i\psi'} + (i\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\alpha' &= (\cos\vartheta\sin\varphi + i\cos\varphi)e^{i\psi'} + (\cos\vartheta\sin\varphi - i\cos\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\beta &= (-i\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\varphi)e^{i\psi'} + (i\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\beta' &= (\cos\vartheta\cos\varphi - i\sin\varphi)e^{i\psi'} + (\cos\vartheta\cos\varphi + i\sin\varphi)e^{-i\psi'},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en substituant les valeurs qu'on vient de trouver, de $\sin\mathrm{am}(u \pm ia)$ et $\cos\mathrm{am}(u \pm ia)$,

$$\begin{aligned}
2\alpha &= -\sin\vartheta e^{i\psi'}\sin\mathrm{am}(u \pm ia) - \sin\vartheta e^{-i\psi'}\sin\mathrm{am}(u \mp ia)\\
2\alpha' &= -i\sin\vartheta e^{i\psi'}\sin\mathrm{am}(u \pm ia) + i\sin\vartheta e^{-i\psi'}\sin\mathrm{am}(u \mp ia)\\
2\beta &= -\sin\vartheta e^{i\psi'}\cos\mathrm{am}(u \pm ia) - \sin\vartheta e^{-i\psi'}\cos\mathrm{am}(u \mp ia)\\
2\beta' &= -i\sin\vartheta e^{i\psi'}\cos\mathrm{am}(u \pm ia) + i\sin\vartheta e^{-i\psi'}\cos\mathrm{am}(u \mp ia).
\end{aligned}$$

Or on a,

$$\begin{aligned}
\sin\vartheta e^{i\psi'} &= \frac{H_1(0)\,\Theta(u \pm ia)}{H_1(ia)\,\Theta u}\\
\sin\vartheta e^{-i\psi'} &= \frac{H_1(0)\,\Theta(u \mp ia)}{H_1(ia)\,\Theta u},
\end{aligned}$$

et les formules elliptiques,

$$\begin{aligned}
H_1(0)\,\Theta(u \pm ia)\cos\mathrm{am}(u \pm ia) &= \Theta(0)\,H_1(u \pm ia)\\
H_1(0)\,\Theta(u \pm ia)\sin\mathrm{am}(u \pm ia) &= \Theta_1(0)\,H(u \pm ia).
\end{aligned}$$

En substituant ces équations dans les expressions précédentes de α, α', β, β', on parvient, finalement, aux expressions suivantes de ces coefficients:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta u}\\
\pm\alpha' &= \frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta u}\\
\beta &= -\frac{\Theta(0)\{H_1(u+ia)+H_1(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta u}\\
\pm\beta' &= \frac{\Theta(0)\{H_1(u+ia)-H_1(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta u}.
\end{aligned}$$

On a exprimé, dans ce qui précéde, les cosinus des angles que les trois axes principaux du corps font avec les droites (x) et (y), ou les

quantités,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',$$

par des fractions qui ont toutes le même dénominateur et dont les numérateurs, abstraction faite des facteurs constants qui ne sont que fonctions du module, sont formés, respectivement, à l'aide des trois fonctions Θ, H, H_1, d'une manière parfaitement analogue. On pourrait désirer, pour rendre complet le système de ces formules, de voir paraître encore, dans cette théorie, les fractions analogues dont les numérateurs sont formés à l'aide de la quatrième fonction, Θ_1. De pareilles fractions ne se sont pas trouvées parmi les valeurs des trois autres quantités, α'', β'', γ'', ou des cosinus des angles que les axes principaux font avec le troisième axe de coordonnées, celui des z; mais de telles expressions se présenteront, en cherchant les vitesses de rotation du corps autour des droites (x) et (y), ou les produits de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané, avec les cosinus des angles que cet axe fait avec ces mêmes droites, la vitesse de rotation autour de l'axe des z étant, comme on sait, une constante,

$$\frac{h}{l}.$$

On pourra parvenir à ces expressions de plusieurs manières différentes, et en faisant usage de telle ou telle formule d'addition des fonctions elliptiques. L'analyse suivante qui peut-être n'est ni la plus courte ni la plus symétrique, a paru pourtant celle qui s'offre le plus naturellement.

Détermination des vitesses de rotation du corps autour des axes des x et y.

Désignons les vitesses de rotation du corps, autour des droites (x) et (y) mobiles elles mêmes dans le plan invariable, par v et v', on aura

$$v = \alpha p + \beta q + \gamma r$$
$$v' = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r,$$

ou

$$v = l\left(\frac{\alpha\alpha''}{A} + \frac{\beta\beta''}{B} + \frac{\gamma\gamma''}{C}\right)$$
$$v' = l\left(\frac{\alpha'\alpha''}{A} + \frac{\beta'\beta''}{B} + \frac{\gamma'\gamma''}{C}\right).$$

Éliminons les valeurs de $\gamma\gamma''$ et de $\gamma'\gamma''$ au moyen des équations,

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

il viendra,

$$v = \frac{l}{C}\left(\frac{A-C}{A}\alpha\alpha'' + \frac{B-C}{B}\beta\beta''\right)$$
$$v' = \frac{l}{C}\left(\frac{A-C}{A}\alpha'\alpha'' + \frac{B-C}{B}\beta'\beta''\right).$$

En substituant la formule,

$$\Delta^2 \operatorname{am}(ia) = \frac{B(A-C)}{A(B-C)},$$

et en posant

$$\mu = \frac{(B-C)l}{BC},$$

ces expressions se changeront dans celles-ci,

$$v = \mu(\Delta^2 \operatorname{am}(ia)\,\alpha\alpha'' + \beta\beta'')$$
$$v' = \mu(\Delta^2 \operatorname{am}(ia)\,\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'').$$

Au lieu de considérer à part les quantités v et v', nous allons chercher la valeur de

$$v \pm iv',$$

où l'on prendra encore le signe $+$ ou $-$, selon que $Bh - l^2$ est positif ou négatif. Pour cet effet, je remarque qu'en mettant

$$m = H_1(ia)\,\Theta u,$$

l'on tire des valeurs trouvées ci-dessus de α, α', β, β' les deux formules suivantes,

$$m(\alpha \pm i\alpha') = -\Theta_1(0)\,H(u - ia)$$
$$m(\beta \pm i\beta') = -\Theta(0)\,H_1(u - ia).$$

Ces équations étant substituées dans la valeur de

$$v \pm iv' = \mu\{\Delta^2 \operatorname{am}(ia)(\alpha \pm i\alpha')\alpha'' + (\beta \pm i\beta')\beta''\},$$

on aura,

$$-\frac{m}{\mu}(v \pm iv') = \Theta_1(0)\,\Delta^2 \operatorname{am}(ia)\,H(u - ia)\alpha'' + \Theta(0)\,H_1(u - ia)\beta''.$$

Substituant les valeurs,

$$\alpha'' = -\frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)}$$
$$\beta'' = \frac{\Delta \operatorname{am}(ia) \sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am}(ia)},$$

et faisant usage des formules,

$$\Theta_1(0)\,H(u - ia) = H_1(0)\,\Theta(u - ia).\sin \operatorname{am}(u - ia)$$
$$\Theta(0)\,H_1(u - ia) = H_1(0)\,\Theta(u - ia).\cos \operatorname{am}(u - ia),$$

on trouvera

$$-\frac{m\cos\mathrm{am}(ia)}{\mu\,\Delta\mathrm{am}(ia)}\cdot\frac{v\pm iv'}{H_1(0)\,\Theta(u-ia)}$$
$$=\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}(u-ia)-\Delta\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u-ia).$$

Or d'après une formule d'addition que l'on déduit aisément des formules connues, on a

$$\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}(u-ia)-\Delta\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u-ia)$$
$$=\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(u-ia),$$

d'où l'on tire,

$$-\frac{m\cos\mathrm{am}(ia)}{\mu\,\Delta\mathrm{am}(ia)}\cdot\frac{v\pm iv'}{H_1(0)\,\Theta(u-ia)}=\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(u-ia).$$

Remarquons qu'on a,

$$\frac{\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)}{\cos\mathrm{am}(ia)}=\frac{\pm i}{l}\sqrt{\frac{BC(Ah-l^2)}{A(B-C)}},$$

et, par suite, multipliant par μ et substituant la valeur de μ et celle donnée ci-dessus du facteur n,

$$\frac{\mu\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)}{\cos\mathrm{am}(ia)}=i\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}=in.$$

Remarquons, de plus, qu'on a

$$H_1(0)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\qquad \Theta(u-ia)\,\Delta\mathrm{am}(u-ia)=\sqrt{k'}\,.\,\Theta_1(u-ia),$$

il viendra,

$$v\pm iv'=-in\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}\cdot\frac{\Theta_1(u-ia)}{H_1(ia)\,\Theta u}.$$

Changeant i en $-i$, on aura de même,

$$v\mp iv'=in\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}\cdot\frac{\Theta_1(u+ia)}{H_1(ia)\,\Theta u}.$$

Donc, les vitesses de rotation autour des droites mobiles (x) et (y) que l'on a choisies pour axes des x et y, deviendront,

$$v=\frac{f\{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta u}$$
$$v'=\mp\frac{f\{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta u},$$

où l'on a posé

$$f=n\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}=nH'(0),$$

en désignant par $H'(0)$ la valeur de $\frac{dHu}{du}$ pour $u=0$ (*Fund.* §. 61.).

Remarquons que partout où entrent dans les résultats trouvés les signes ambigus $\pm$ et $\mp$, on peut s'en passer et les remplacer par le signe supérieur, en ayant soin de donner aux axes des z' et des y les directions opposées quand $Bh < l^2$. C'est ce qui résulte des formules primitives desquelles on est parti et peut servir à vérifier ces signes dans les valeurs que l'on a trouvées des cosinus des angles que les axes principaux et l'axe instantané font avec les axes des x, y, z.

Le quarré de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané est la somme des quarrés de celles autour de trois axes rectangulaires quelconques. En prenant pour ces axes ceux des x', y', z' ou des x, y, z, on aura l'équation

$$p^2+q^2+r^2 = v^2+v'^2+\frac{h^2}{l^2},$$

laquelle peut servir à vérifier les valeurs trouvées de v et v'. C'est ce que nous allons faire de la manière suivante.

Des équations (5.),

$$p^2 = \frac{l^2-Ch-B(B-C)q^2}{A(A-C)}$$

$$r^2 = \frac{Ch-l^2-B(A-B)q^2}{A(A-C)},$$

il s'ensuit

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = \frac{(Ah-l^2)(l^2-Ch)-l^2(A-B)(B-C)q^2}{AC.l^2},$$

et comme on a,

$$q^2 = \frac{l^2-Ch}{B(B-C)}\sin^2\mathrm{am}\,u, \qquad n^2 = \frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC},$$

il viendra

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = \frac{l^2-Ch}{ABC.l^2}(B(Ah-l^2)-(A-B)l^2\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$= n^2\Big(\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2}-\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}\sin^2\mathrm{am}\,u\Big),$$

et comme on a de plus,

$$k^2 = \frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}, \qquad \frac{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}{\cos^2\mathrm{am}(ia)} = \frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2},$$

il résultera

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = n^2\Big(\frac{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}-k^2\sin^2\mathrm{am}(u)\Big).$$

D'autre côté, on trouve successivement,

$$v^2+v'^2 = \frac{f^2\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)}{H_1^2(ia)\,\Theta^2 u}$$

$$= \frac{f^2}{k'}\frac{\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}{H_1^2(ia)\,\Theta^2(u)}\,\Delta\,\mathrm{am}\,(u+ia)\,\Delta\,\mathrm{am}\,(u-ia)$$

$$= \frac{f^2}{k'}\frac{\Theta^2(ia)}{\Theta^2(0)\,H_1^2(ia)}(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)\,\Delta\,\mathrm{am}\,(u+ia)\,\Delta\,\mathrm{am}\,(u-ia)$$

$$= \frac{f^2(\Delta^2\mathrm{am}\,(ia)-k^2\cos^2\mathrm{am}\,(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)}{kk'\,\Theta_1^2(0)\cos^2\mathrm{am}\,(ia)}\;^*),$$

donc

$$v^2+v'^2 = n^2\left(\frac{\Delta^2\mathrm{am}\,(ia)}{\cos^2\mathrm{am}\,(ia)}-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\right)$$

$$= p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Au lieu de faire tourner les droites (x) et (y) dans le plan invariable autour du point fixe avec la vitesse angulaire Ψ, on peut donner ce mouvement de rotation au plan invariable même. La vitesse de rotation du corps, parallèle a ce même plan, étant $\frac{h}{l}$, on aura

$$\frac{h}{l}-\Psi$$

pour la vitesse ***relative*** de la rotation du corps parallèle au plan invariable, ce dernier de son côté étant supposé tournoyer autour du point fixe avec la vitesse angulaire Ψ. Cette vitesse relative, $\frac{h}{l}-\Psi$, peut être exprimée au moyen des fonctions Θ, d'une manière remarquable.

Pour trouver cette expression, on partira de la formule

$$\cos^2\mathrm{am}\,(ia) = \frac{(A-C)\,l^2}{A(l^2-Ch)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{h}{l} = l\left\{\frac{1}{C}-\frac{A-C}{AC\cos^2\mathrm{am}\,(ia)}\right\}.$$

Or on a trouvé ci-dessus la formule,

$$\frac{l}{n}\cdot\frac{A-C}{AC} = \pm\frac{i\cos\mathrm{am}\,(ia)\,\Delta\,\mathrm{am}\,(ia)}{\sin\mathrm{am}\,(ia)},$$

d'où suit

---

*) *Fund. N.* pag. 33. II.

$$\frac{(A-C)l}{AC\cos^2\mathrm{am}(ia)} = \pm\frac{in\Delta\mathrm{am}(ia)}{\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)}$$

$$= \pm n\frac{d\log\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ia)}{da} = \pm n\left\{\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{d\log H_1(ia)}{da}\right\}.$$

Ajoutons à cette équation la suivante à laquelle on est parvenu au même endroit,

$$\Psi - \frac{l}{C} = \mp n\frac{d\log H(ia)}{da},$$

on aura

$$\Psi - \frac{h}{l} = \mp n\frac{d\log H_1(ia)}{da}.$$

On voit par cette formule et par les valeurs données ci-dessus des quantités $\Psi - \frac{l}{A}$, $\Psi - \frac{l}{B}$, $\Psi - \frac{l}{C}$, que les quatre quantités,

$$\Psi - \frac{l}{A}, \quad \Psi - \frac{l}{B}, \quad \Psi - \frac{l}{C}, \quad \Psi - \frac{h}{l},$$

forment un système de quantités analogues entre elles, leurs valeurs étant exprimées, respectivement, par les produits de $\mp n$ avec les différentielles logarithmiques des quatre fonctions

$$\Theta(ia), \quad \Theta_1(ia), \quad H(ia), \quad H_1(ia).$$

Tableau de formules d'addition des fonctions elliptiques.

La formule d'addition dont on s'est servi dans l'article précédent, fait partie d'un système de *seize* formules semblables que l'on peut aisément déduire des formules connues ou les unes des autres et que je veux présenter ici dans un même tableau. Soit posé,

$$\mathrm{am}(a) = \alpha, \quad \mathrm{am}(b) = \beta, \quad \mathrm{am}(a+b) = \sigma,$$

ces seize formules qui sont autant d'équations entre les fonctions sine, cosine et Δ des amplitudes, α, β, σ, peuvent être distribuées dans quatre systèmes dont trois embrassent les équations dans lesquelles entrent deux des quantités, $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta\sigma$, et le quatrième les équations dans lesquelles entrent toutes ces quantités à la fois. On remarquera que les différents termes de ces équations sont composés de manière que l'on ne trouve jamais la même amplitude dans deux facteurs du même terme. La formule d'addition dont on a fait usage dans l'article précédent, s'obtient de la dernière formule du tableau, en posant

$$\alpha = \mathrm{am}(u), \quad \beta = -\mathrm{am}(ia), \quad \sigma = \mathrm{am}(u-ia).$$

$$[\mathrm{am}(a) = \alpha, \quad \mathrm{am}(b) = \beta, \quad \mathrm{am}(a+b) = \sigma].$$

$$1)\quad \Delta\alpha\ \Delta\beta\Delta\sigma - k^2\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma = k'^2$$

$$2)\quad \Delta\sigma + k^2\sin\alpha\sin\beta\cos\sigma = \Delta\alpha\ \Delta\beta$$

$$3)\quad \cos\alpha\cos\beta\Delta\sigma - \Delta\alpha\ \Delta\beta\cos\sigma = k'^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$4)\quad \sin\alpha\sin\beta\Delta\sigma + \cos\sigma = \cos\alpha\cos\beta$$

$$5)\quad \Delta\beta\Delta\sigma + k^2\cos\alpha\sin\beta\sin\sigma = \Delta\alpha$$

$$6)\quad \Delta\alpha\Delta\sigma + k^2\sin\alpha\cos\beta\sin\sigma = \Delta\beta$$

$$7)\quad -\sin\alpha\cos\beta\Delta\sigma + \Delta\alpha\sin\sigma = \cos\alpha\sin\beta$$

$$8)\quad -\cos\alpha\sin\beta\Delta\sigma + \Delta\beta\sin\sigma = \sin\alpha\cos\beta$$

$$9)\quad \cos\beta\cos\sigma + \Delta\alpha\sin\beta\sin\sigma = \cos\alpha$$

$$10)\quad \cos\alpha\cos\sigma + \Delta\beta\sin\alpha\sin\sigma = \cos\beta$$

$$11)\quad \Delta\alpha\sin\beta\cos\sigma - \cos\beta\sin\sigma = -\sin\alpha\Delta\beta$$

$$12)\quad \Delta\beta\sin\alpha\cos\sigma - \cos\alpha\sin\sigma = -\sin\beta\Delta\alpha$$

$$13)\quad \Delta\alpha\cos\beta\cos\sigma + k'^2\sin\beta\sin\sigma = \cos\alpha\Delta\beta\Delta\sigma$$

$$14)\quad \Delta\beta\cos\alpha\cos\sigma + k'^2\sin\alpha\sin\sigma = \cos\beta\Delta\alpha\Delta\sigma$$

$$15)\quad \sin\beta\cos\sigma - \Delta\alpha\cos\beta\sin\sigma = -\sin\alpha\Delta\sigma$$

$$16)\quad \sin\alpha\cos\sigma - \Delta\beta\cos\alpha\sin\sigma = -\sin\beta\Delta\sigma$$

Dans les quatre premières de ces formules on peut échanger entre elles les amplitudes α et β; par le même changement, les autres formules, deux à deux, se changeront l'une dans l'autre. Mais on peut aussi échanger entre elles les amplitudes α et σ, si l'on change en même temps β en $-\beta$. C'est ce qui suit de ce que par le changement de a en $a+b$ et de b en $-b$, $a+b$ se change réciproquement en a.

La formule (4.) qui long-temps a été la seule connue de celles du tableau précédent, à donné lieu à la célèbre construction de ***Lagrange***, laquelle fait voir qu'à chaque formule de trigonométrie sphérique répond une formule d'addition des fonctions elliptiques, et réciproquement. En effet, d'après cette construction, on peut supposer que α, β, σ, soient les côtés d'un triangle sphérique dont les angles, α', β', σ', respectivement opposés à ces côtés, sont donnés par les équations,

$$\sin\alpha' = k\sin\alpha, \quad \sin\beta' = k\sin\beta, \quad \sin\sigma' = k\sin\sigma$$
$$\cos\alpha' = \Delta\alpha, \quad \cos\beta' = \Delta\beta, \quad \cos\sigma' = -\Delta\sigma.$$

Or, comme dans chaque formule de trigonométrie sphérique, on peut échanger entre eux les trois côtés du triangle, en faisant le même échange entre les angles opposés, il suit que dans chaque formule d'addition des fonctions elliptiques, ou dans chaque équation entre les amplitudes α, β, σ, on peut échanger entre elles ces trois amplitudes, en ayant soin toutefois de prendre $\Delta\sigma$ avec le signe —, de manière qu'en permutant α, β, σ d'une manière quelconque, on doit permuter entre elles de la même manière, les quantités, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\sigma$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\sigma$; $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $-\Delta\sigma$. C'est ce qu'on peut déduire aussi de la théorie des fonctions elliptiques, en remarquant que si l'on change a en $2K+2iK'-a-b$, les quantités $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\Delta\alpha$ sont changées respectivement en $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $-\Delta\sigma$, et réciproquement.

D'après les remarques précédentes, les seize formules du tableau peuvent être ramenées à *cinq* d'entre elles, par exemple aux équations (1 — 4.) et (7.), desquelles on déduira les autres par de simples échanges de lettres et des changements de signes. La formule (1.) est unique en son genre; de chacune des formules (2, 3, 4.) on tire, par ces changements, trois formules du tableau, et de la formule (7.), les six autres. Mais on peut, de plus, réduire ces cinq formules et, par suite, toutes les seize, à une quelconque d'entre elles, au moyen des remarques suivantes.

Et d'abord, en divisant les formules (1 et 3.) par $\Delta\alpha\Delta\beta$ et en changeant a, b, $a+b$ en $K-a$, $K-b$, $2K-a-b$, l'on obtient respectivement les formules (2 et 4.). Il suffira donc, pour pouvoir déduire toutes les quatre formules (1 — 4.) d'une d'entre elles, de déduire l'une des formules (1 et 3.) d'une des formules (2 et 4.).

Pour cet effet, on remarquera qu'en changeant u en iu, et en même temps le module k dans son complément k', les fonctions $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\mathrm{am}\,u$ seront changées respectivement dans

$$\frac{i\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u},\quad \frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}.$$

D'où suit qu'en multipliant la formule (2.) par $\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma$, et changeant les quantités a, b, $a+b$, k en ia, ib, $ia+ib$, k', l'on obtiendra la formule (3.).

Il ne restera donc qu'à faire voir comment on peut déduire encore la formule (7.) d'une des formules (1 — 4.). On peut se servir, pour cet effet, d'une proposition qui se fonde sur la remarque importante et utile dans beaucoup d'autres occasions, *qu'en changeant q en $-q$ dans les expressions,*

$$\frac{2\sqrt[4]{q}(1+q^2+q^6+..)}{1+2q+2q^4+..} = \sqrt{k}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-..}{1+2q+2q^4+..} = \sqrt{k'}$$

$$\frac{1+2q+2q^4+..}{1+q^2+q^6+..}\cdot\frac{\sin x-q^2\sin 3x+q^6\sin 5x-..}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-..} = \operatorname{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-..}{1+q^2+q^6+..}\cdot\frac{\cos x+q^2\cos 3x+q^6\cos 5x+..}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-..} = \operatorname{cos\,am}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-..}{1+2q+2q^4+..}\cdot\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+..}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-..} = \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},$$

les quantités k^2, k'^2, $\operatorname{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\operatorname{cos\,am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, *seront changées respectivement dans les suivantes,*

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad \frac{k'\operatorname{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{\operatorname{cos\,am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},$$

et que si dans ces expressions l'on change à la fois q *en* $-q$ *et* x *en* $\frac{1}{2}\pi - x$, *les mêmes quantités seront changées, respectivement, dans*

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad \operatorname{cos\,am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \operatorname{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \frac{1}{k'}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.$$

Dans une équation quelconque entre les fonctions elliptiques des arguments a, b, $a+b$, mettons respectivement $-a$, $K-b$, $K-a-b$ au lieu de a, b, $a+b$, et considérant les quantités qui entrent dans cette équation comme des fonctions de q, $\frac{\pi a}{2K}$, $\frac{\pi b}{2K}$, changeons dans ces fonctions le signe de q, on aura, en profitant de la remarque précédente, la proposition, *que dans les formules d'addition ou dans les équations entre les amplitudes*

$$\alpha = \operatorname{am}(a),\quad \beta = \operatorname{am}(b),\quad \sigma = \operatorname{am}(a+b),$$

il est permis de mettre respectivement au lieu des quantités

$$k^2,\quad k'^2,\quad \sin\alpha,\quad \cos\alpha,\quad \Delta\alpha,$$

$$\sin\beta,\quad \cos\beta,\quad \Delta\beta,\quad \sin\sigma,\quad \cos\sigma,\quad \Delta\sigma$$

les quantités

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad -\frac{k'\sin\alpha}{\Delta\alpha},\quad \frac{\cos\alpha}{\Delta\alpha},\quad \frac{1}{\Delta\alpha},$$

$$\cos\beta,\quad \sin\beta,\quad \frac{1}{k'}\Delta\beta,\quad \cos\sigma,\quad \sin\sigma,\quad \frac{1}{k'}\Delta\sigma.$$

Au moyen de cette proposition, l'on obtiendra tout de suite la formule (7.) de la formule (4.) multipliée par $\Delta\alpha$. On aura donc déduit de la formule (1.) la formule (2.), en changeant a et b en $K-a$ et $K-b$; de la formule (2.) la formule (3.), en multipliant les arguments par i et en changeant k en k'; de la formule (3.) la formule (4.), en changeant encore a et b en $K-a$ et $K-b$; enfin de la formule (4.) la formule (7.), en changeant a en $-a$, b en $K-b$, et en imaginant que dans les développements des fonctions elliptiques et du module, on ait changé q en $-q$. On obtiendra ensuite, de ces cinq formules, les onze autres formules du tableau, en échangeant entre eux a et b, ou en changeant a et b en $a+b$ et $-b$.

Les projections sur le plan invariable de l'axe des z' et de l'axe instantané, de même que celles des axes des x' et des y', sont accouplées l'une à l'autre de manière que deux projections accouplées ont le même mouvement moyen et que l'une d'elles est donnée par la position que l'autre a avant ou après le temps $\frac{1}{2}T$.

Soient respectivement

$$\psi',\ \psi_1',\ \psi_2',\ \psi_3',$$

les angles que les intersections avec le plan invariable, du plan des x', y', du plan des y', z', du plan des z', x' et du plan instantané de rotation *), font avec l'axe mobile des x ou la droite (x). Ces angles sont respectivement égaux à ceux que les projections sur le plan invariable, des axes des z', x', y' et de l'axe instantané, font avec l'axe mobile des y ou la droite (y). Les quantités,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{v}{w},$$

étant respectivement les cosinus des angles que les axes principaux et l'axe instantané font avec l'axe des x, et les quantités

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \frac{v'}{w},$$

les cosinus des angles que ces mêmes axes font avec l'axe des y, on a

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{\gamma}{\gamma'},\quad \operatorname{tg}\psi_1' = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

$$\operatorname{tg}\psi_3' = \frac{v}{v'},\quad \operatorname{tg}\psi_2' = \frac{\beta}{\beta'},$$

*) C'est ainsi qu'on nomme le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation; on nommera plus bas, avec M. *Poisson*, w la vitesse de rotation du corps autour de l'axe instantané.

d'où l'on tire les expressions suivantes, des quatre angles mêmes,

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\gamma'+i\gamma}{\gamma'-i\gamma}, \qquad \psi_1' = \frac{1}{2i}\log\frac{\alpha'+ia}{\alpha'-i\alpha}$$

$$\psi_3' = \frac{1}{2i}\log\frac{v'+iv}{v'-iv}, \qquad \psi_2' = \frac{1}{2i}\log\frac{\beta'+i\beta}{\beta'-i\beta}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs trouvées ci-dessus, des quantités α, β, etc., on aura les équations,

$$\psi' = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi_1' = \pm\frac{1}{2i}\log-\frac{H(u+ia)}{H(u-ia)} = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}$$

$$\psi_2' = \pm\frac{1}{2i}\log-\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3' = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)},$$

dont la première est la même que celle que l'on a pris pour point de départ dans les recherches antérieures.

Les quantités logarithmiques,

$$\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}, \qquad \log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u+ia)},$$

peuvent être développées dans des séries convergentes, suivant les cosinus et sinus des multiples de l'angle

$$\frac{\pi u}{K} = \frac{2\pi}{T}(t-t_0).$$

Il suit de là, que les angles ψ' et ψ_3' sont des fonctions du temps *périodiques*. Mais la même chose n'a pas lieu par rapport aux quantités logarithmiques,

$$\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}, \qquad \log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)},$$

dont les développements contiendront chacun un terme proportionel au temps, en dehors des signes sinus ou cosinus. On peut séparer ces termes de la partie périodique, en se servant des formules, (*Fund.* §. 61.),

$$H(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\Theta u$$

$$H_1(u+iK') = e^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\Theta_1 u,$$

lesquelles peuvent être déduites l'une de l'autre en changeant u en $K-u$ et i en $-i$. En effet, on tire de ces formules en posant, comme ci-dessus, $a = K'-a'$,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} = \frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$
$$\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} = \frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}.$$

On aura donc, en remplaçant $\frac{u}{2K}$ par $\frac{t-t_0}{T}$, le système suivant de quatre équations dans lesquelles les seconds membres sont des fonctions du temps périodiques,

$$\mp\psi' = -\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$
$$\mp\psi_1' - \frac{\pi(t-t_0)}{T} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$
$$\mp\psi_2' - \frac{\pi(t-t_0)}{T} \mp \tfrac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}$$
$$\mp\psi_3' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}.$$

A cause de la multiplicité des valeurs des logarithmes, il est permis d'ajouter aux valeurs précédentes la quantité $\pm\pi$. Il faut donc examiner si, pour $t = t_0$ ou $u = 0$, les seconds membres des équations précédentes, ont les valeurs 0 ou $\pm\pi$. Pour cet effet, on remarquera que les neuf quantités α, β, etc., et les quantités v, v', v'', qui sont suffisantes et nécessaires pour déterminer les directions des axes principaux et de l'axe instantané, ont pour $t = t_0$ ou $u = 0$, les valeurs suivantes,

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0$$
$$\alpha' = \pm \operatorname{sin\,am}(a, k'), \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = \operatorname{cos\,am}(a, k')$$
$$\alpha'' = -\operatorname{cos\,am}(a, k'), \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = \pm \operatorname{sin\,am}(a, k')$$
$$v = 0, \quad v' = \mp n\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\cdot\Delta\operatorname{am}(a, k'), \quad v'' = \frac{h}{l},$$

où les quantités,

$$\operatorname{sin\,am}(a, k'), \quad \operatorname{cos\,am}(a, k'), \quad \Delta\operatorname{am}(a, k'), \quad n\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \frac{h}{l},$$

sont positives et où l'on a nommé v'' la vitesse de la rotation autour de l'axe des z. On conclut de ces valeurs, par de simples considérations géométriques, que, pour $t = t_0$, l'on doit avoir, lorsque $Bh > l^2$,

$$\psi' = 0, \quad \psi_1' = 0, \quad \psi_2' = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad \psi_3' = \pi,$$

et lorsque $Bh < l^2$,

$$\psi' = 0, \quad \psi_1' = \pi, \quad \psi_2' = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad \psi_3' = 0.$$

Il faudra donc ajouter la demi-circonférence du cercle, dans le second cas à la valeur de ψ_1' et dans le premier cas à la valeur de ψ_3'. Donc, si l'on désigne par π_1 et π_3 des quantités telles que l'on a

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_3 = \pi, \quad \text{si} \quad Bh > l^2 \quad \text{et}$$
$$\pi_1 = \pi, \quad \pi_3 = 0, \quad \text{si} \quad Bh < l^2,$$

et que l'on ajoute respectivement aux valeurs de ψ_1' et ψ_3' les quantités π_1 et π_3, on ne doit pas ajouter de terme constant aux développements des fonctions logarithmiques par lesquelles on a exprimé précédemment les angles ψ', ψ_1', ψ_2', ψ_3'.

On a déterminé l'intersection du plan des x', y' avec le plan invariable, ou par l'angle ψ qu'elle fait avec la droite fixe dans ce plan, ou par l'angle ψ' qu'elle fait avec la droite (x) mobile dans le même plan, les deux angles étant liés entre eux par l'équation

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0).$$

Les angles ψ_1', ψ_2', ψ_3' étant ceux qu'avec la droite (x) font les intersections du plan invariable avec le plan des y', z', celui des x', z' et le plan instantané de rotation, nommons respectivement

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3,$$

les angles que ces mêmes intersections font avec la droite fixe dans le plan invariable, on aura de même,

$$\psi_1' = \psi_1 + \Psi(t - t_0)$$
$$\psi_2' = \psi_2 + \Psi(t - t_0)$$
$$\psi_3' = \psi_3 + \Psi(t - t_0).$$

Donc, étant posé,

$$\Psi_1 = \Psi \pm \frac{\pi}{T},$$

on aura les équations,

$$\psi + \Psi(t - t_0) = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)}$$

$$\psi_1 + \Psi_1(t - t_0) = \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia')}{\Theta(u - ia')} + \pi_1$$

$$\psi_2 + \Psi_1(t - t_0) = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia')}{\Theta_1(u + ia')} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3 + \Psi(t - t_0) = \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia)}{\Theta_1(u + ia)} + \pi_3.$$

Supposons à présent qu'une droite (x_1) tourne uniformément avec la vitesse angulaire Ψ_1 autour du point fixe dans le plan invariable, dans le

même sens que (x), qui est opposé à celui dans lequel les angles ψ sont comptés. Supposons, de plus, que cette droite dans son mouvement de rotation soit avancée, d'un angle de 90°, par une droite (y_1) tournant autour du point fixe avec la même vitesse angulaire Ψ_1. Il suit des formules précédentes que les intersections des quatre plans avec le plan invariable, font des rotations oscillatoires, savoir

1) l'intersection du plan des x', y' autour de (x);
2) celle du plan des y', z' autour de (x_1) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh >$ ou $< l^2$;
3) celle du plan des x', z' autour de (y_1);
4) celle du plan instantané de rotation autour de (x) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh <$ ou $> l^2$.

On a supposé dans ce qui précéde que les directions des intersections des quatre plans, avec le plan invariable, coïncident avec celles des projections, sur le plan invariable, des axes perpendiculaires à ces plans, après avoir fait un tour de 90°, dans le sens convenu de leur rotation. Après la même rotation de 90°, les droites (x) et (x_1) coïncident avec les droites (y) et (y_1), et les droites (y) et (y_1) avec les droites opposées à (x) et (x_1). Les projections des quatre axes sur le plan invariable feront donc des rotations oscillatoires,

1) la projection de l'axe des z' autour de (y);
2) celle de l'axe des x' autour de (y_1) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh >$ ou $< l^2$;
3) celle de l'axe des y' autour de la droite opposée à (x_1);
4) celle de l'axe instantané autour de (y) ou de la droite opposée, selon que $Bh <$ ou $> l^2$.

Augmentant t de $\frac{1}{2}T$, l'argument u augmentera de K, et, par suite, les fonctions

$$\Theta(u \pm ia), \quad \Theta(u \pm ia') \quad \text{et} \quad \Theta_1(u \pm ia), \quad \Theta_1(u \pm ia')$$

se changeront les unes dans les autres. Nommant donc

$$O, \quad O_1, \quad O_2, \quad O_3,$$

les angles que les quatre projections font respectivement avec les droites mobiles autour desquelles elles ont leur mouvement d'oscillation, et

$$(O), \quad (O_1), \quad (O_2), \quad (O_3),$$

les valeurs que ces mêmes angles ont après un laps de temps égal au quart

de période, $\frac{1}{2}T$, on aura d'après les équations précédemment établies,

$$(O) = -O_3, \quad (O_1) = -O_2$$
$$(O_3) = -O, \quad (O_2) = -O_1.$$

La position des droites (x), (x_1), (y), (y_1), et des droites opposées, est connue pour chaque instant du temps, puisque ces droites tournent uniformément autour du point fixe dans le plan invariable avec des vitesses angulaires données. Il suffira donc pour déterminer, à un temps quelconque, les projections des quatre axes sur le plan invariable, de connaître, à ce même temps, les angles qu'elles font avec ces droites, autour desquelles elles font respectivement leurs oscillations. L'on tire par suite des équations précédentes le théorème, que si l'on connait à deux temps quelconques distants entre eux d'un quart de période, $\frac{1}{2}T$, les positions de la projection de l'axe des z', on connaîtra immédiatement, les positions de la projection de l'axe instantané aux mêmes temps et réciproquement, et que si l'on connait, à ces deux temps, les positions de la projection de l'un des axes des x' et des y', on connaîtra aux mêmes temps, les positions de la projection de l'autre.

Des trois axes principaux, celui que l'on a pris pour l'axe des z', ne se couche jamais sur le plan invariable; c'est l'axe auquel se rapporte le plus petit moment, quand $Bh > l^2$, ou le plus grand, quand $Bh < l^2$. Cet axe, comme on voit, est accouplé en quelque sorte à l'axe instantané, de même que les deux autres axes principaux, ceux des x' et des y', sont accouplés l'un à l'autre.

Il conviendra d'appeler l'angle

$$\frac{\pi(t-t_0)}{T} = \frac{\pi u}{2K},$$

le mouvement moyen de la rotation oscillatoire du corps, et les angles

$$\Psi(t-t_0), \quad \Psi_1(t-t_0)$$

les mouvements moyens de la rotation progressive des projections des quatre axes sur le plan invariable. Ceci convenu, on voit, par ce qui précède, *que les projections sur le plan invariable de deux axes accouplés, ont le même mouvement moyen et que l'on connait immédiatement à un temps donné la projection sur le plan invariable de l'un des axes d'un même couple, si l'on connait la projection de l'autre avant ou après un quart de période,* $\frac{1}{2}T$. On voit, de plus, par l'équation

$$\Psi_1(t-t_0) = \Psi(t-t_0) \pm \frac{\pi}{T}(t-t_0),$$

que les mouvements moyens des projections des deux couples diffèrent l'un de l'autre du mouvement moyen de la rotation oscillatoire.

Au moyen des formules

$$\frac{n\,d\log H(ia)}{da} = \frac{n\pi}{2K} - \frac{n\,d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{\pi}{T} - \frac{n\,d\log\Theta(ia')}{da'}$$
$$\frac{n\,d\log H_1(ia)}{da} = \frac{n\pi}{2K} - \frac{n\,d\log\Theta_1(ia')}{da'} = \frac{\pi}{T} - \frac{n\,d\log\Theta_1(ia')}{da'},$$

et en substituant Ψ_1 au lieu de $\Psi \pm \frac{\pi}{T}$, on tire des valeurs données ci-dessus des quantités $\Psi - \frac{l}{A}$, etc., les équations suivantes,

$$\Psi - \frac{l}{A} = \mp n\frac{d\log\Theta(ia)}{da}$$
$$\Psi - \frac{l}{B} = \mp n\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$
$$\Psi_1 - \frac{l}{C} = \pm n\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}$$
$$\Psi_1 - \frac{h}{l} = \pm n\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}.$$

Dans le cas particulier remarquable où

$$h = l^2\left\{\frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right\},$$

on aura

$$a = a' = \tfrac{1}{2}K',$$

et, par suite,

$$\Psi + \Psi_1 = \frac{l}{A} + \frac{l}{C} = \frac{l}{B} + \frac{h}{l}.$$

On aura de plus,

$$\psi + \psi_1 = -(\Psi + \Psi_1)(t - t_0) + \pi_1$$
$$\psi_2 + \psi_3 = -(\Psi + \Psi_1)(t - t_0) - \tfrac{1}{2}\pi + \pi_3.$$

Soient menées dans le plan invariable et par le point fixe deux droites dont l'une divise en deux parties égales, l'angle que font entre elles les projections, sur le plan invariable, des axes des x' et des z', et l'autre, l'angle que font entre elles les projections, sur le même plan, de l'axe des y' et de l'axe instantané, les deux formules précédentes font voir que dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{l}{A} + \frac{l}{C} = \frac{l}{B} + \frac{h}{l},$$

ces droites tournent autour du point fixe uniformément et avec la vitesse angulaire $\frac{1}{2}\left(\frac{l}{A} + \frac{l}{C}\right)$, en faisant l'une avec l'autre un angle de 45° ou de 225°.

Recherche des différentielles $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$.

De la formule (3.)

$$d\psi = \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\cdot l\,dt,$$

on déduit par un simple échange des lettres, les deux autres,

$$d\psi_1 = \frac{Bq^2+Cr^2}{B^2q^2+C^2r^2}\cdot l\,dt$$

$$d\psi_2 = \frac{Cr^2+Ap^2}{C^2r^2+A^2p^2}\cdot l\,dt.$$

Vérifions ces formules au moyen des valeurs trouvées ci-dessus de ψ_1 et ψ_2, et cherchons en même temps la valeur de $d\psi_3$.

D'après les formules données au commencement de l'article précédent, on a

$$\psi = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi_1 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)} + \pi_1$$

$$\psi_2 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)} + \pi_3,$$

où

$$n' = \frac{\Psi}{n} = \frac{l}{nA} \mp \frac{d\log\Theta(ia)}{da}.$$

Cherchons les différentielles des quatre équations précédentes, u étant la seule variable, au lieu de différentier, dans chaque cas, par rapport à u, le logarithme du *quotient* des deux fonctions aux arguments $u+ia$ et $u-ia$, on pourra différentier par rapport à ia, le logarithme du ***produit*** de ces mêmes fonctions. On obtiendra, de cette manière, les quatre équations suivantes,

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}{2\partial a}$$

$$\frac{d\psi_1}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)\,H(u+ia)\,H(u-ia)}{2\partial a}$$

$$\frac{d\psi_2}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)\,H_1(u+ia)\,H_1(u-ia)}{2\partial a}$$

$$\frac{d\psi_3}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)\,\Theta_1(u+ia)\,\Theta_1(u-ia)}{2\partial a}.$$

Or on a l'équation

$$\Theta^{-2}(ia)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = \Theta^{-2}(0)\,\Theta^2 u\,(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

et l'on en déduit aisément les trois autres analogues. Remarquons, pour cet effet, que des formules connues d'addition l'on tire les suivantes (***Fund.*** §. 18.),

$$\sin\mathrm{am}(u+ia)\sin\mathrm{am}(u-ia) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\cos\mathrm{am}(u+ia)\cos\mathrm{am}(u-ia) = \frac{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\Delta\mathrm{am}(u+ia)\;\Delta\mathrm{am}(u-ia) = \frac{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}(u)},$$

lesquelles étant multipliées par l'équation précédente, on obtient le système suivant de formules,

$$\Theta^{-2}(ia)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = \Theta^{-2}(0)\,\Theta^2 u\,(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$\Theta^{-2}(ia)\,H(u+ia)\,H(u-ia) = k\,\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2 u\,(\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia))$$

$$\Theta^{-2}(ia)\,H_1(u+ia)\,H_1(u-ia) = \frac{k}{k'}\,\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2 u\,(\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}\,u)$$

$$\Theta^{-2}(ia)\,\Theta_1(a+ia)\,\Theta_1(u+ia) = \frac{1}{k'}\,\Theta^{-2}(0)\,\Theta^2 u\,(\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u).$$

Substituant ces formules dans les équations différentielles précédentes et posant, pour plus de simplicité,

$$\frac{1}{i}\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia) = m,$$

on aura

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{k^2 m\sin^2\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{d\psi_1}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{m}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)}$$

$$\frac{d\psi_2}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{m\Delta^2\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)\Delta^2\mathrm{am}\,u}$$

$$\frac{d\psi_3}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{k^2 m\cos^2\mathrm{am}\,u}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u}.$$

Or, on a trouvé ci-dessus,

$$\mp k^2 m = -\frac{l}{nA}\cdot\frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}$$

$$\alpha'' = \frac{Ap}{l} = -\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}(ia)}$$

$$\beta'' = \frac{Bq}{l} = \frac{\Delta\mathrm{am}(ia)\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}(ia)} = \sqrt{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}(ia)}$$

$$\gamma'' = \frac{Cr}{l} = \pm\frac{\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}\,u}{i\cos\mathrm{am}(ia)} = \frac{\pm 1}{k}\sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}}\cdot\frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}(ia)},$$

d'où l'on tire les formules,

$$A^2p^2+B^2q^2 = \frac{l^2}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$B^2q^2+C^2r^2 = \frac{l^2}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}(\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia))$$

$$C^2r^2+A^2p^2 = \frac{l^2}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}(\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}\,u),$$

auxquelles on joignera cette autre trouvée ci-dessus,

$$v^2+v'^2 = \frac{n^2}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}(\Delta^2\mathrm{am}(ia)-k^2\cos^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$= \frac{n^2}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}(\Delta^2\mathrm{am}\,u\ -k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u).$$

Substituant ces formules dans les valeurs des différentielles des quatre angles, et remarquant qu'on a

$$\frac{l^2}{k^2\cos^2\mathrm{am}(ia)} = \frac{A(B-C)(Ah-l^2)}{(A-B)(A-C)} = \frac{AB(B-C)}{A-C}q^2+\frac{AC(B-C)r^2}{A-B},$$

on trouvera, en mettant $n\,dt$ au lieu de u,

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{B(A-B)q^2}{A^2p^2+B^2q^2} = -\frac{l(Ap^2+Bq^2)}{A^2p^2+B^2q^2}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2}{B^2q^2+C^2r^2} = -\frac{l(Bq^2+Cr^2)}{B^2q^2+C^2r^2}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{C(A-C)r^2}{A^2p^2+C^2r^2} = -\frac{l(Ap^2+Cr^2)}{A^2p^2+C^2r^2}$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{n^2(A-B)(A-C)}{l(B-C)}\cdot\frac{p^2}{v^2+v'^2}.$$

Les trois premières équations peuvent être déduites d'une d'entre elles par le seul échange des lettres. On donnera à la quatrième différentes formes, au moyen des équations,

$$l^2(v^2+v'^2) = l^2(p^2+q^2+r^2)-h^2$$

$$= (B-C)^2q^2r^2+(C-A)^2r^2p^2+(A-B)^2p^2q^2,$$

$$\frac{An^2}{B-C} = \frac{Ah-l^2}{BC} = \frac{1}{BC}\{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2\},$$

$$(A-B)(A-C)p^2 = l^2-(B+C)h+BC\left(v^2+v'^2+\frac{h^2}{l^2}\right),$$

desquelles on tire, après quelques réductions faciles, les expressions suivantes de $\frac{d\psi_3}{dt}$,

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -l\cdot\frac{\frac{(B-C)^2}{Ap^2}+\frac{(C-A)^2}{Bq^2}+\frac{(A-B)^2}{Cr^2}}{\frac{(B-C)^2}{p^2}+\frac{(C-A)^2}{q^2}+\frac{(A-B)^2}{r^2}} = -\frac{h}{l}-\frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABCl^3(v^2+v'^2)},$$

expressions symmétriques et qui n'avaient pas encore été données. En comparant entre elles les deux expressions égales à $\frac{d\psi_3}{dt}$, on trouve

$$\begin{aligned}&(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)\left(\frac{(B-C)^2}{Ap^2}+\frac{(C-A)^2}{Bq^2}+\frac{(A-B)^2}{Cr^2}\right)\\ &=(Ap^2+Bq^2+Cr^2)\left(\frac{(B-C)^2}{p^2}+\frac{(C-A)^2}{q^2}+\frac{(A-B)^2}{r^2}\right)\\ &+\frac{\{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2\}\{C(B-C)r^2+A(B-A)p^2\}\{A(C-A)p^2+B(C-B)q^2\}}{ABCp^2q^2r^2},\end{aligned}$$

équation identique et facile à vérifier.

Tableaux de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce.

Les formules de l'article précédent fournissent les équations suivantes, au moyen desquelles les quatre angles, ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, sont exprimés par des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère trigonométrique,

$$\begin{aligned}\mp\left(\psi+\frac{lu}{An}\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}\\ &= \int_0^u\frac{k^2m\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u}\\ \mp\left(\psi_1+\frac{lu}{An}-\pi_1\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}\\ &= \frac{d\log H(ia')}{da'}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}\\ &= \int_0^u\frac{m\,du}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)}\\ \mp\left(\psi_2+\frac{lu}{An}+\tfrac{1}{2}\pi\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}\\ &= \frac{d\log H(ia')}{da'}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}\\ &= \int_0^u\frac{m\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,du}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}(ia)\Delta^2\mathrm{am}\,u}\\ \mp\left(\psi_3+\frac{lu}{An}-\pi_3\right) &= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}\\ &= \int_0^u\frac{k^2m\cos^2\mathrm{am}\,u\,.\,du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u}.\end{aligned}$$

La double expression par les fonctions Θ des angles ψ_1 et ψ_2, se tire de ce que, si $a+a'=K'$, l'on a

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia')}{\Theta(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)}=\frac{\pi u}{2K}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)}=\frac{\pi u}{2K}$$

$$\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}+\frac{d\log H(ia)}{da}=\frac{\pi}{2K}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}+\frac{d\log H_1(ia)}{da}=\frac{\pi}{2K},$$

formules dans lesquelles il est permis d'échanger entre eux a et a'.

On obtiendra des expressions analogues et de la même simplicité que les précédentes, pour chaque somme des quatre angles et des trois quantités, $\frac{lu}{Bn}$, $\frac{lu}{Cn}$, $\frac{hu}{ln}$ correspondantes à $\frac{lu}{An}$. On tire ces expressions des quatre équations précédentes en y ajoutant les produits de u par les quantités

$$\mp\frac{l}{n}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)=-\frac{d\log\frac{H(ia)}{\Theta(ia)}}{da}=\frac{d\log\frac{\Theta(ia')}{H(ia')}}{da'}=\frac{\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)}{i\sin\mathrm{am}(ia)}$$

$$\mp\frac{l}{n}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)=-\frac{d\log\frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(ia)}}{da}=\frac{d\log\frac{H_1(ia')}{H(ia')}}{da'}=\frac{ik^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)}{\Delta\mathrm{am}(ia)}$$

$$\mp\frac{l}{n}\left(\frac{h}{l^2}-\frac{1}{A}\right)=-\frac{d\log\frac{H_1(ia)}{\Theta(ia)}}{da}=\frac{d\log\frac{\Theta_1(ia')}{H(ia')}}{da'}=\frac{i\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)}{\cos\mathrm{am}(ia)}.$$

On aura ainsi un système de *seize* formules analogues entre elles et au moyen desquelles on exprime chacun des quatre angles par les intégrales elliptiques et les fonctions Θ, de quatre manières différentes. Nous allons réunir ces seize formules dans un même tableau qui sera en même temps très utile et même nécessaire, dans la théorie des fonctions elliptiques. En effet, pour chaque intégrale elliptique de la troisième espèce et au caractère trigonométrique.

$$\int\frac{H\,du}{1+n\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

où H est ou une simple constante ou une constante multipliée par l'une des quantités $\sin^2\mathrm{am}\,u$, $\cos^2\mathrm{am}\,u$, $\Delta^2\mathrm{am}\,u$, on aura par ce tableau la formule la plus propre à ramener cette intégrale aux fonctions Θ. Dans ces expressions par les fonctions Θ, on a séparé la partie périodique et la partie proportionelle à u. L'argument u étant positif, toutes les intégrales réunies dans le tableau auront

des valeurs positives, pourvu qu'on ait a entre 0 et K', ce qu'on a supposé dans les recherches précédentes. Le même tableau donne la construction mécanique des seize intégrales, au moyen du mouvement proposé, c'est à dire, de la rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélatrice.

Tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisiéme espèce et au caractère trigonométrique.

$$[a' = K' - a]$$

$$1. \quad \int_0^u \frac{k^2 \sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia).\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{i(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \mp\left(\psi + \frac{lu}{An}\right)$$

$$2. \quad \int_0^u \frac{\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)\,du}{i(\sin^2\mathrm{am}\,u - \sin^2\mathrm{am}(ia))}$$

$$= \frac{d\log H(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1 + \frac{lu}{An} - \pi_1\right)$$

$$3. \quad \int_0^u \frac{\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia).\Delta^2\mathrm{am}\,u\,du}{i(\cos^2\mathrm{am}\,u - \sin^2\mathrm{am}(ia)\,\Delta^2\mathrm{am}\,u)}$$

$$= \frac{d\log H(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2 + \frac{lu}{An} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$4. \quad \int_0^u \frac{k^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia).\cos^2\mathrm{am}\,u\,du}{i(\Delta^2\mathrm{am}\,u - k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u)}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{lu}{An} - \pi_3\right)$$

$$5. \quad \int_0^u \frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia).\Delta^2\mathrm{am}\,u\,du}{i(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\sin^2\mathrm{am}\,u)}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi + \frac{hu}{ln}\right)$$

$$6. \quad \int_0^u \frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia).\cos^2\mathrm{am}\,u\,du}{i(\sin^2\mathrm{am}\,u - \sin^2\mathrm{am}(ia))}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1 + \frac{hu}{ln} - \pi_1\right)$$

$$7.\quad \int_0^u \frac{k'^2 \operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i(\cos^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2 + \frac{hu}{ln} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$8.\quad \int_0^u \frac{k'^2 \operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{i(\Delta^2\operatorname{am}u - k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{hu}{ln} - \pi_3\right)$$

$$9.\quad \int_0^u \frac{k^2 \sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{i(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi + \frac{lu}{Bn}\right)$$

$$10.\quad \int_0^u \frac{\sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{i(\sin^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia))}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1 + \frac{lu}{Bn} - \pi_1\right)$$

$$11.\quad \int_0^u \frac{k'^2 \sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia)\,du}{i(\cos^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2 + \frac{lu}{Bn} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$12.\quad \int_0^u \frac{k^2 k'^2 \sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i(\Delta^2\operatorname{am}u - k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{lu}{Bn} - \pi_3\right)$$

$$13.\quad \int_0^u \frac{i\operatorname{cotg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$= \frac{d\log H(ia)}{da}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi + \frac{lu}{Cn}\right)$$

$$14.\quad \int_0^u \frac{i\operatorname{cotg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{\sin^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}(ia)}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \pm\left(\psi_1 + \frac{lu}{Cn} - \pi_1\right)$$

$$15.\quad \int_0^u \frac{i\operatorname{cotg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}u}$$

$$=-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}=\pm\left(\psi_2+\frac{lu}{Cn}+\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$16.\quad \int_0^u \frac{i\operatorname{cotg}\operatorname{am}(ia)\,\Delta\operatorname{am}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u}$$

$$=\frac{d\log H(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}=\pm\left(\psi_3+\frac{lu}{Cn}-\pi_3\right).$$

Les trois axes principaux et l'axe instantané étant projetés sur le plan invariable, on a vu que les quantités,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},\qquad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)},\qquad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')},$$

dans lesquelles on a supposé $a<K'$, sont égales aux angles desquels s'écartent les mouvements effectifs de ces projections de leurs mouvements moyens. Or, afin que ces écarts de part et d'autre, puissent être regardés comme de véritables *oscillations,* autour de droites déterminées tournant uniformément autour du point fixe dans le plan invariable, il faut que les quantités précédentes ne surpassent jamais $\frac{1}{2}\pi$. C'est ce qui a effectivement lieu, comme on démontre de la manière suivante.

Et d'abord remarquons qu'il suffit de considérer une seule des quatre quantités précédentes, puisque les trois autres en dérivent, en changeant u en $u+K$ ou a en $K'-a$ ou en même temps u en $u+K$ et a en $K'-a$.

Les quatre quantités s'évanouissent pour $u=0,\ \pm K,\ \pm 2K$, etc.; elles ne changent pas de valeurs lorsque u augmente de $2K$; elles prennent des valeurs opposées si l'on change u en $-u$ ou $2K-u$. C'est ce qui suit des formules,

$$\Theta u=\Theta(-u)=\Theta(2K-u).$$

Il suffira donc, pour connaître toutes les valeurs des quatre quantités, de supposer u entre 0 et K.

Faisons

$$u=\frac{2Kx}{\pi},\qquad a=bK',$$

où $b < 1$, on aura

$$\frac{\pi a}{2K} = \tfrac{1}{2} b \cdot \frac{\pi K'}{K} = -\tfrac{1}{2} b \log q,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2i} \log \frac{1 - q^m e^{-\frac{i\pi}{K}(u+ia)}}{1 - q^m e^{\frac{i\pi}{K}(u-ia)}} = \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{m-b} \sin 2x}{1 - q^{m-b} \cos 2x}$$

$$\frac{1}{2i} \log \frac{1 - q^m e^{\frac{i\pi}{K}(u+ia)}}{1 - q^m e^{-\frac{i\pi}{K}(u-ia)}} = -\operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{m+b} \sin 2x}{1 - q^{m+b} \cos 2x}.$$

En donnant à m, dans ces deux équations, toutes les valeurs des nombres positifs entiers impairs, on aura, d'après le développement en produit infini de la fonction Θ (*Fund. N.* §. 61.),

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$= \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{1-b} \sin 2x}{1 - q^{1-b} \cos 2x} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1 - q^{3-b} \cos 2x} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{5-b} \sin 2x}{1 - q^{5-b} \cos 2x} + \text{etc.}$$

$$- \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{1+b} \sin 2x}{1 - q^{1+b} \cos 2x} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{3+b} \sin 2x}{1 - q^{3+b} \cos 2x} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{q^{5+b} \sin 2x}{1 - q^{5+b} \cos 2x} - \text{etc.}$$

Comme on suppose que pour $u = 0$ ou $x = 0$, la quantité

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

s'évanouisse, on pourra aussi supposer, dans le développement précédent de cette quantité, que pour $x = 0$, chaque *Arc tg* s'évanouisse séparément et ne devienne pas un multiple de $\pm\pi$. Dans tous ces arcs compris sous la forme générale,

$$\operatorname{Arc\,tg} \frac{q^n \sin 2x}{1 - q^n \cos 2x},$$

les exposants n sont positifs puisqu'on a supposé $b < 1$; on aura donc $q^n < 1$ et, par suite, aucun de ces arcs ne saura atteindre la valeur $\frac{1}{2}\pi$, leurs *maxima*, abstraction faite du signe, étant

$$\operatorname{Arc\,sin} q^n,$$

comme on voit aisément par la différentiation. Lorsque u est entre 0 et K ou x entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, comme il est permis de supposer d'après la remarque faite ci-dessus, tous ces arcs auront des valeurs positives. Si l'on ordonne le développement de manière que l'exposant n, dans les termes successifs, ait des valeurs toujours croissantes, ces termes décroîtront et, en même temps, leurs

signes alterneront constamment, d'où suit, d'après un raisonnement connu, que l'on aura une valeur trop grande, lorsque le développement est continué jusqu'à un terme quelconque positif, et que l'on aura une valeur trop petite, lorsque le développement est continué jusqu'à un terme quelconque négatif. Par suite, en réunissant les deux premiers termes, on trouve que la valeur de la quantité logarithmique proposée est positive et comprise entre les deux quantités,

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x}, \qquad \operatorname{Arc\,tg}\frac{(q^{1-b}-q^{1+b})\sin 2x}{1-(q^{1-b}+q^{1+b})\cos 2x+q^2}.$$

On aura donc, lorsque a est entre 0 et K', la quantité proposée

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} < \operatorname{Arc\,sin} q^{1-b} < \tfrac{1}{2}\pi,$$

et la même quantité pourra toujours croître au delà de

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{q^{1-b}(1-q^{2b})}{1-q^2}$$

valeur *maximum* de la somme des deux premiers termes. De même, les trois autres quantités logarithmiques seront $< \operatorname{Arc\,sin} q^{1-b}$ ou $\operatorname{Arc\,sin} q^b$ et, par suite, $< \frac{1}{2}\pi$, c. q. f. d.

On aurait pu déduire la même conséquence d'une quelconque des formules (7, 8, 11, 12.), du tableau présenté ci-dessus. En effet, ces formules donnent,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \frac{\pi u}{2K} - \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u - \int_0^u \frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,du}{\Delta(\alpha,k')\{1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\operatorname{am}u\}}$$

$$= \frac{\pi u}{2K} - \frac{d\log H_1(ia)}{da}u - \int_0^u \frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k').\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \frac{\pi u}{2K} - \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u - \int_0^u \frac{k^2k'^2\sin\alpha\cos\alpha.\sin^2\operatorname{am}u\,du}{\Delta(\alpha,k')\{\Delta^2(\alpha,k')-k^2\sin^2\operatorname{am}u\}}$$

$$= \frac{\pi u}{2K} - \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u - \int_0^u \frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k').du}{\Delta^2(\alpha,k')-k^2\sin^2\operatorname{am}u},$$

où l'on a posé

$$\alpha = \operatorname{am}(a,k'),$$

et où les deux quantités à retrancher de $\frac{\pi u}{2K}$ sont positives, lorsque u est positif.

La valeur $\frac{1}{2}\pi$ pourra être atteinte ou même surpassée par deux des quatre quantités logarithmiques, dans les cas où l'on a

$$a = K', \quad a' = 0 \quad \text{ou} \quad a' = K', \quad a = 0.$$

C'est ce qui suit en remarquant que des formules données ci-dessus,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia'-u)}{H(ia'+u)}=\frac{\pi u}{2K}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia')}{H_1(u+ia')}=\frac{\pi u}{2K},$$

l'on tire, en faisant $a'=0$, les valeurs

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u-iK')}=\frac{\pi(K-u)}{2K}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-iK')}{\Theta_1(u+iK')}=\frac{\pi u}{2K},$$

lesquelles deviendront égales à $\frac{1}{2}\pi$, quand on fait respectivement $u=0$ ou $u=K$. Lorsque a devient 0 ou K', il ne sera donc plus possible de supposer, comme ci-dessus, que pour $u=0$, toutes les quatre quantités logarithmiques s'évanouissent.

Du développement précédemment donné on déduit les trois autres analogues, en mettant ou $\frac{1}{2}\pi-x$ au lieu de x ou $1-b$ au lieu de b ou faisant l'un et l'autre changement. On aura ainsi les quatre formules,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$=\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x}-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1-q^{1+b}\cos 2x}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1-q^{3-b}\cos 2x}-\ldots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}$$

$$=\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1+q^{1-b}\cos 2x}-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1+q^{1-b}\cos 2x}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1+q^{3-b}\cos 2x}-\ldots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$

$$=\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{b}\sin 2x}{1-q^{b}\cos 2x}-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2-b}\sin 2x}{1-q^{2-b}\cos 2x}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2+b}\sin 2x}{1-q^{2+b}\cos 2x}-\ldots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}$$

$$=\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{b}\sin 2x}{1+q^{b}\cos 2x}-\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2-b}\sin 2x}{1+q^{2-b}\cos 2x}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{2+b}\sin 2x}{1+q^{2+b}\cos 2x}-\ldots,$$

auxquelles on joignera les suivantes,

$$-\frac{d\log\Theta(ia)}{da}=\frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{1-b}}{1-q^{1-b}}-\frac{q^{1+b}}{1-q^{1+b}}+\frac{q^{3-b}}{1-q^{3-b}}-\ldots\right\}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}=\frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{1-b}}{1+q^{1-b}}-\frac{q^{1+b}}{1+q^{1+b}}+\frac{q^{3-b}}{1+q^{3-b}}-\ldots\right\}$$

$$-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^b}{1-q^b} - \frac{q^{2-b}}{1-q^{2-b}} + \frac{q^{2+b}}{1-q^{2+b}} - \frac{q^{4-b}}{1-q^{4-b}} + \cdots\right\}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^b}{1+q^b} - \frac{q^{2-b}}{1+q^{2-b}} + \frac{q^{2+b}}{1+q^{2+b}} - \frac{q^{4-b}}{1+q^{4-b}} + \cdots\right\}.$$

Les quatre dernières formules jouissent de la même propriété que les quatre précédentes, de donner alternativement des valeurs trop grandes et trop petites.

Ajoutons quelques remarques sur la nature et l'usage du tableau de formules présenté ci-dessus.

Si l'on réduit à la forme

$$f(1 + n\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

où f est un facteur constant, les dénominateurs des différentes fractions qui dans les formules du tableau se trouvent sous le signe d'intégration, on a les quatre valeurs suivantes de n ou du *paramètre* des intégrales de la troisième espèce,

1) $n = -k^2\sin^2\mathrm{am}(ia) = k^2\mathrm{tg}^2\mathrm{am}(a, k') = \mathrm{cotg}^2\mathrm{am}(a', k')$;

2) $n = -\dfrac{1}{\sin^2\mathrm{am}(ia)} = \mathrm{cotg}^2\mathrm{am}(a, k') = k^2\mathrm{tg}^2\mathrm{am}(a', k')$;

3) $n = -\dfrac{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}{\cos^2\mathrm{am}(ia)} = -\Delta^2\mathrm{am}(a, k') = -\dfrac{k^2}{\Delta^2\mathrm{am}(a', k')}$;

4) $n = -\dfrac{k^2\cos^2\mathrm{am}(ia)}{\Delta^2\mathrm{am}(ia)} = -\dfrac{k^2}{\Delta^2\mathrm{am}(a, k')} = -\Delta^2\mathrm{am}(a', k')$.

Lorsque le paramètre n est une quantité quelconque positive, on peut lui donner indifféremment l'une ou l'autre des deux premières formes, et l'on peut lui donner indifféremment l'une ou l'autre des deux dernières formes, lorsque ce paramètre est une quantité négative entre $-k^2$ et -1. Dans l'un et l'autre cas, les deux formes d'un même paramètre se changent l'une dans l'autre, en mettant $K' - a$ au lieu de a, on pourra donc toujours faire, entre les deux formes du paramètre, un tel choix que l'on ait $a < \frac{1}{2}K'$. Or

$$\mathrm{tg}^2\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K', k') = \frac{1}{k}, \qquad \Delta^2\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K', k') = k,$$

donc, si l'on veut que la valeur de a soit comprise entre 0 et $\frac{1}{2}K'$ et, par suite, celle de b entre 0 et $\frac{1}{2}$, on aura cette règle que l'on doit poser

1) $n = -k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)$ lorsque n est entre 0 et k;

2) $n = -\dfrac{1}{\sin^2\mathrm{am}(ia)}$ lorsque n est entre k et ∞;

3) $n = -\dfrac{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}{\cos^2\mathrm{am}(ia)}$ lorsque n est entre -1 et $-k$;

4) $n = -\dfrac{k^2\cos^2\mathrm{am}(ia)}{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}$ lorsque n est entre $-k$ et $-k^2$.

Soit proposé, à présent, de réduire aux fonctions Θ, une intégrale au caractère trigonométrique,

$$\int \frac{H\,du}{1+n\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

le numérateur H sous le signe d'intégration étant une quelconque des quantités,

$$1, \quad \sin^2\mathrm{am}\,u, \quad \cos^2\mathrm{am}\,u, \quad \Delta^2\mathrm{am}\,u,$$

multipliée par une constante, si d'après la règle énoncée l'on donne à la valeur de n la forme correspondante à l'intervalle dans lequel se trouve compris ce paramètre, on connaîtra par cette forme de n et par celle du numérateur H, la formule du tableau à prendre et, dans cette formule, l'on aura toujours $a < \frac{1}{2}K'$.

Les intégrales comprises dans les formules (1, 4, 9, 12.) du tableau, s'évanouissent pour $k=0$ ou $q=0$. Pour tirer, dans ce cas, les valeurs des autres intégrales des formules du tableau, on remarquera que, K' et b passant pour ce même cas à l'infini, l'on a $\log q = -2K'$ et, par suite,

$$q^b = e^{-2a},$$

ce qui étant substitué dans les développements donnés ci-dessus, on aura, pour $k=0$,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia'-u)}{H(ia'+u)} = \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia')}{H_1(u+ia')} = u, \qquad \frac{d\log H(ia')}{da'} = \frac{d\log H_1(ia')}{da'} = 1$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} - u = \mathrm{Arc\,tg}\frac{e^{-2a}\sin 2u}{1-e^{-2a}\cos 2u}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = -\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} + u = \mathrm{Arc\,tg}\frac{e^{-2a}\sin 2u}{1+e^{-2a}\cos 2u}$$

$$-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{d\log H(ia)}{da} - 1 = \frac{2e^{-2a}}{1-e^{-2a}}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'} = -\frac{d\log H_1(ia)}{da} + 1 = \frac{2e^{-2a}}{1+e^{-2a}}.$$

Nous allons rendre complet le système des formules les plus propres pour ramener aux fonctions Θ les intégrales elliptiques de la troisième espèce, en joignant ci-dessous les formules relatives aux intégrales ***au caractère logarithmique***, formules que l'on déduit aisément ou de celles établies dans le tableau précédent, en mettant a au lieu de ia, ou directement des formules démontrées dans les ***Fundamenta Nova***.

Tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère logarithmique.

1. $$\int_0^u \frac{k^2 \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a \cdot \sin^2\operatorname{am} u\, du}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u} = \frac{d\log\Theta(a)}{da} u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

2. $$\int_0^u \frac{k^2 \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a \cdot \cos^2\operatorname{am} u\, du}{\Delta\operatorname{am} a (1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u)} = -\frac{d\log\Theta_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

3. $$\int_0^u \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a \cdot \Delta^2\operatorname{am} u\, du}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u} = -\frac{d\log H_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

4. $$\int_0^u \frac{\Delta\operatorname{am} a \operatorname{cotg}\operatorname{am} a\, du}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u} = \frac{d\log H(a)}{da} u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

---

5. $$\int_0^u \frac{\sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a\, du}{\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} u} = -\frac{d\log\Theta(a)}{da} u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

6. $$\int_0^u \frac{\sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a \cdot \Delta^2\operatorname{am} u\, du}{\Delta\operatorname{am} a (\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} u)} = -\frac{d\log\Theta_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

7. $$\int_0^u \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a \cdot \cos^2\operatorname{am} u\, du}{\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} u} = -\frac{d\log H_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

8. $$\int_0^u \frac{\Delta\operatorname{am} a \operatorname{cotg}\operatorname{am} a \cdot \sin^2\operatorname{am} u\, du}{\sin^2\operatorname{am} a - \sin^2\operatorname{am} u} = -\frac{d\log Ha}{da} u + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

5*. $$\int_u^K \frac{\sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a\, du}{\sin^2\operatorname{am} u - \sin^2\operatorname{am} a} = \frac{d\log\Theta a}{du}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

6*. $$\int_u^K \frac{\sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a \cdot \Delta^2\operatorname{am} u\, du}{\Delta\operatorname{am}(a)(\sin^2\operatorname{am} u - \sin^2\operatorname{am} a)} = \frac{d\log\Theta_1 a}{du}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

7*. $$\int_u^K \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a \cdot \cos^2\operatorname{am} u\, du}{\sin^2\operatorname{am} u - \sin^2\operatorname{am} a} = \frac{d\log H_1 a}{du}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

8*. $$\int_u^K \frac{\Delta\operatorname{am} a \operatorname{cotg}\operatorname{am} a \cdot \sin^2\operatorname{am} u\, du}{\sin^2\operatorname{am} u - \sin^2\operatorname{am} a} = \frac{d\log Ha}{da}(K-u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{H(u+a)}{H(u-a)}.$$

Il paraît que l'on pourrait se passer entièrement d'une notation particulière des intégrales elliptiques de la troisième espèce. Leurs valeurs, en effet, exprimées par les fonctions Θ, sont assez simples pour entrer elles-mêmes dans le calcul et sans se cacher sous une notation laquelle ne saurait mettre en évidence ni leur nature logarithmique ni la liaison intime entre leur argument

et celui du paramètre ni, enfin, leur décomposition en deux parties l'une proportionelle à leur argument et l'autre périodique.

Pour la même valeur de la fonction elliptique $\sin^2 \mathrm{am}\, u$, les intégrales elliptiques de la troisième espèce et au même argument u, peuvent augmenter des multiples de *trois* quantités constantes et indépendantes entre elles. En effet, la fonction $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ ne changera pas de valeur pendant que les intégrales elliptiques de la troisième espèce dont une valeur est,

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta a}{da}u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

$$\text{ou} \quad -\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

prendront toutes les valeurs comprises sous les formes générales,

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta a}{da}u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-ia)} + m\cdot\frac{K\,d\log\Theta a}{da} + m'i\left(\frac{K'd\log\Theta a}{da} + \frac{\pi a}{K}\right) + m''i\pi,$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} + m\cdot\frac{K\,d\log\Theta(ia)}{da} + m'i\left(\frac{K'd\log\Theta(ia)}{da} - \frac{\pi a}{K}\right) + m''\pi,$$

m, m', m'' désignant des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques. C'est ce qui résulte de la multiplicité des valeurs du logarithme et de ce que la fonction Θu ne change pas de valeur lorsque u est augmenté de $2K$ et qu'elle est multipliée par

$$-q^{-1}e^{-\frac{i\pi u}{K}}$$

lorsque u est augmenté de $2iK'$ (*Fund.* p. 174. 8)).

Les expressions précédentes font connaître les trois constantes dont les multiples peuvent être ajoutés aux valeurs des intégrales proposées de la troisième espèce, et l'on voit que de ces constantes une est réelle et deux imaginaires ou deux réelles et une imaginaire selon que l'intégrale a le caractère logarithmique ou trigonométrique. Il suit de là, par un raisonnement connu, que telle est la variété des valeurs de ces intégrales que si l'on ramene chacune d'elles à la forme $P+iQ$, où P et Q sont des quantités réelles, l'une des quantités P et Q sera arbitraire ou pourra approcher indéfiniment d'une quantité donnée quelconque, les valeurs de l'autre formant une série arithmétique, et celle de ces quantités qui restera arbitraire, sera ou P ou Q selon que l'intégrale a le caractère trigonométrique ou logarithmique *).

*) J'avais fait connaître autrefois aux élèves géomètres de l'université de Koenigsberg,

Le résultat précédent peut être étendu à l'intégrale plus générale,

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}},$$

dans laquelle a, α, β, γ, δ, ε sont des constantes réelles. Si l'on ramene chacune des valeurs dont cette intégrale est susceptible, à la forme $\boldsymbol{P}+i\boldsymbol{Q}$, la quantité arbitraire sera ou $\boldsymbol{P}$ ou $\boldsymbol{Q}$ selon que la constante

$$\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4$$

est positive ou négative.

Si ce n'est pas la fonction $\operatorname{sin am} u$ mais l'argument u lui même qui est donné, l'indétermination des intégrales elliptiques de la troisième espèce ne peut naître que de la multiplicité des valeurs du logarithme qui entre dans l'expression de ces intégrales par les fonctions Θ. Ce dernier cas a lieu dans l'application que l'on vient de faire, de ces intégrales, au problème mécanique proposé, l'argument u y étant proportionel au temps qui dans les problèmes de mécanique est considéré comme la variable donnée.

Remarquons, en finissant, que les fonctions elliptiques dont l'argument est proportionel au temps, manifestent ici géométriquement, d'une manière singulière, leurs deux périodes l'une réelle et l'autre imaginaire. Les axes des x' et y' étant ceux des axes principaux qui se couchent alternativement sur le plan invariable, on a vu qu'il y a une corrélation entre ces axes et une autre entre celui des z' et l'axe instantané, corrélations lesquelles correspondent l'une et l'autre à la période réelle des fonctions elliptiques. Mais il y a aussi des corrélations semblables des axes des x' et y' avec l'axe des z' et l'axe instantané et ces corrélations répondent à la période imaginaire des fonctions elliptiques ou à une augmentation du temps d'une constante imaginaire.

Berlin Hôtel de Londres ce 17 Mars 1850.

---

ces affections fondamentales des intégrales elliptiques de la troisième espèce par lesquelles la nature de ces intégrales est rapprochée de celle des intégrales Abéliennes ou hyperelliptiques. C'est ce qui a engagé M. *Rosenhain*, l'un de ces élèves dont cette université se glorifie à juste titre, à soumettre, dans une thèse académique, les intégrales elliptiques de la troisième espèce au même traitement analytique que j'avais proposé pour les intégrales Abéliennes. Depuis, ce savant géomètre est parvenu à établir d'une manière explicite les fonctions qui dans la première classe des fonctions hyperelliptiques jouent le rôle des fonctions Θ, grande et belle découverte qui vient d'être couronnée par l'académie des sciences de Paris.

27.

Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze.

(Von Herrn Dr. *G. Eisenstein*, Docent an der Universität zu Berlin.)

---

§. 1.

Obwohl bei den höheren Reciprocitätssätzen das wahre wissenschaftliche Interesse ohne Zweifel in den ***Beweisen*** liegt, so möchte es doch nicht überflüssig sein, hier zu zeigen, wie die ***Sätze selbst*** durch eine eigenthümliche Art von Induction ohne alle ermüdende Rechnung leicht herausgebracht werden können; auf dem eingeschlagenen Wege wird man aufserdem unwillkürlich zur Anknüpfung mehrerer anderer interessanter Betrachtungen veranlafst.

Um nicht den allgemeinsten, jedoch einen Fall von grofser Allgemeinheit zu behandeln, aus dem die unbeschränkte Anwendbarkeit des Verfahrens erhellen wird, sei λ eine positive ungerade Primzahl, ζ eine primitive λte Wurzel der Einheit. Die lateinischen Buchstaben sollen im Allgemeinen ganze complexe Zahlen aus solchen Wurzeln der Einheit bezeichnen, also ganze ganzzahlige Functionen von ζ; und zwar wird noch vorausgesetzt, dafs dieselben den Factor $1-\zeta=\eta$ ***nicht*** enthalten; endlich sollen die Symbole $\left(\frac{A}{B}\right)$ u. s. w.*) sich auf die Theorie der λten Potenzreste beziehen. Alles kommt darauf an, das Verhältnifs $\left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right)$ zu ermitteln, welches ich durch (A, B) bezeichne. Da beide Symbole gewisse Potenzen von ζ vorstellen, so ist auch ihr Verhältnifs eine Potenz von ζ, und man kann daher $(A, B) = \left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right) = \zeta^{\varphi(A, B)}$ setzen, wo man den Exponenten $\varphi(A, B)$ zwar *nicht* gradezu als Function von A und B, aber doch als Function der in beiden complexen Zahlen vorkommenden ganzzahligen Elemente ansehen kann; es versteht sich, dafs A und B ohne gemeinschaftlichen Theiler angenommen werden.

Der eigentliche Nerv der hier anzustellenden Betrachtungen besteht in der Zurückführung des Verhältnisses $\left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right) = (A, B)$ auf das analoge

---

*) Über die Definition dieser Symbole sehe man weiter unten.

Verhältnifs $\left(\frac{A'}{B'}\right):\left(\frac{B'}{A'}\right)=(A', B')$ für zwei möglichst einfache complexe Zahlen A', B', von der Art, dafs $(A, B)=(A', B')$ wird. Diese Relation wird Statt finden, wenn man A', B' so bestimmen kann, dafs $\varphi(A, B)\equiv\varphi(A', B')\pmod{\lambda}$ wird. Wie complicirt die Function $\varphi(A, B)$, der Exponent des Umkehrungsfactors, auch sein mag, so ist es doch naturgemäfs, sie als eine ganze Function der in A und B vorkommenden Elemente (Factoren der Potenzen von ζ) mit rationalen Zahlen-Coëfficienten anzunehmen *). Wenn nun die numerischen Coëfficienten in $\varphi(A, B)$ entweder ganze Zahlen sind, oder doch nicht den Nenner λ enthalten, so reicht es hin, $A\equiv A'$, $B\equiv B'\pmod{\lambda}$ zu setzen, um daraus $\varphi(A, B)\equiv\varphi(A', B')\pmod{\lambda}$ schliefsen zu können; wenn aber jene numerischen Coëfficienten, wie es doch sein könnte, den Nenner λ enthalten, und es bedeutet λ^μ die höchste in ihrem Generalnenner aufgehende Potenz von λ, so wird es nothwendig sein, die Congruenzen $A\equiv A'$, $B\equiv B'$ in Bezug auf mod. $\lambda^{\mu+1}$, oder auf eine noch höhere Potenz von λ gelten zu lassen, um aus denselben $\varphi(A, B)\equiv\varphi(A', B')\pmod{\lambda}$ zu folgern. Da jede Potenz von λ, wenn sie als Modul auftritt, auch durch eine $\lambda-1$mal so hohe Potenz von $\eta=1-\zeta$ ersetzt werden kann, so wird $\varphi(A, B)\equiv\varphi(A', B')\pmod{\lambda}$, also $(A, B)=(A', B')$ sein, wenn in den Congruenzen $A\equiv A'\pmod{\eta^\sigma}$, $B\equiv B'\pmod{\eta^\sigma}$ der Exponent σ eine gewisse Grenze überschreitet. Eine obere Grenze für diesen Exponenten von η existirt nicht, weil die Folgerung *a fortiori* richtig sein wird, wenn man den Exponenten vergröfsert.

Um die untere Grenze für den Exponenten σ möglichst zu reduciren, was jetzt geschehen soll, dient die leicht zu beweisende Bemerkung, dafs für jede complexe Zahl A in Bezug auf mod. $\eta^{\lambda+1}$ immer eine Congruenz von folgender Form angenommen werden kann:

$$A\equiv P=g^\alpha(1-k_1\eta)^{\alpha_1}(1-k_2\eta^2)^{\alpha_2}\ldots(1-k_\lambda\eta^\lambda)^{\alpha_\lambda}\pmod{\eta^{\lambda+1}},$$

wo g eine reelle primitive Congruenzwurzel mod. λ, α eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots \lambda-2$, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots \lambda-1$ sind, während $k_1, k_2, \ldots k_\lambda$ beliebige, nicht durch η

*) Für das gewöhnliche quadratische Reciprocitätsgesetz, durch welches das Verhältnifs $\left(\frac{p}{q}\right):\left(\frac{q}{p}\right)$ bestimmt wird, ist diese Function $\frac{1}{4}(p-1)(q-1)$.

theilbare ganze complexe Zahlen bedeuten; dafs ferner, wenn man

$$A \equiv g^{\alpha}(1-k_1\eta)^{\alpha_1'}(1-k_2\eta^2)^{\alpha_2'} \ldots (1-k_\lambda\eta^\lambda)^{\alpha_\lambda'} \pmod{\eta^\sigma}$$

setzt, wo σ eine beliebige Zahl $>\lambda+1$ ist, die Exponenten α_1', α_2', ... α_λ' sich resp. von α_1, α_2, ... α_λ nur um Vielfache von λ unterscheiden, so dafs dieselbe Zahl A, welche $\equiv P \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ ist, in Bezug auf eine beliebige hohe Potenz von η als Modul $\equiv L^\lambda P$ gesetzt werden kann. Ist Q ein ähnliches Product, wie P, von der Art, dafs $B \equiv Q \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, so wird in derselben Weise $B \equiv M^\lambda Q \pmod{\eta^\sigma}$. Sind ferner a und b irgend zwei complexe Zahlen, welche den Congruenzen $A \equiv a \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, $B \equiv b \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ Genüge leisten, so wird auch $a \equiv P \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, $b \equiv Q \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ und hieraus wieder $a \equiv l^\lambda P$, $b \equiv m^\lambda Q \pmod{\eta^\sigma}$ sein. Nimmt man hier σ hinreichend grofs an, damit die obige Folgerung, nach welcher $(A, B) = (A', B')$ aus $A \equiv A'$, $B \equiv B' \pmod{\eta^\sigma}$ gezogen werden kann, zuläfslich sei, so hat man aus $A \equiv L^\lambda P$ und $B \equiv M^\lambda Q \pmod{\eta^\sigma}$ die Gleichung $(A, B) = (L^\lambda P, M^\lambda Q)$, und eben so aus $a \equiv l^\lambda P$, $b \equiv m^\lambda Q \pmod{\eta^\sigma}$ die Gleichung $(a, b) = (l^\lambda P, m^\lambda Q)$; da nun nach der Natur der Symbole für die λten Potenzreste die λten Potenzen, so oft sie als Factoren vorkommen, also hier L^λ, M^λ, l^λ und m^λ, weggelassen werden können, so wird endlich $(A, B) = (P, Q) = (a, b)$, wenn $A \equiv a \equiv P \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ und $B \equiv b \equiv Q \pmod{\eta^{\lambda+1}}$. Hieraus folgt, dafs es vollkommen hinreicht, oben λ selbst als untere Grenze für σ anzunehmen, und dafs man allgemein folgenden Satz hat:

I. „*Das Verhältnifs* $\left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right)$ *ändert sich nicht, wenn man A und B durch ihre Reste* (*mod.* $\eta^{\lambda+1}$) *oder* (*mod.* $\lambda\eta^2$) *ersetzt;*" wobei man nur darauf zu achten hat, dafs diese Reste ebenfalls relative Primzahlen zu einander werden.

Da, wie dies bereits bemerkt und bei der Ableitung des eben aufgestellten Satzes benutzt worden ist, jede ganze complexe Zahl einem Producte von der Form $P \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ congruent gesetzt werden kann, so wird nach eben jenem Satze die Vergleichung irgend zweier complexen Zahlen auf die Vergleichung der Factoren des Productes P unter einander und mit ähnlichen, etwa für andere Werthe der Gröfsen k, zurückgeführt. Um das Product P noch etwas zu vereinfachen, schreibe man g^λ, welches ebenfalls eine primitive Wurzel ist, statt g, dann kann man den ersten Factor von P als eine λte Potenz in den Symbolen ganz weglassen. Die allgemeine Bestimmung von (A, B) ist dann allein auf die Untersuchung aller Gröfsen von der Form $(1-k_\mu\eta^\mu, 1-k_\nu'\eta^\nu)$ für die Werthe 1, 2, 3, ... λ von μ und ν zurückge-

führt. Von diesen Gröfsen ist zu bemerken, dafs sie sich nicht ändern, wenn k_μ um ein Vielfaches von $\eta^{\lambda+1-\mu}$, oder k_ν' um ein Vielfaches von $\eta^{\lambda+1-\nu}$ geändert werden, wie dies ebenfalls aus obigem Satze hervorgeht, indem hierdurch die Zahlen $1-k_\mu\eta^\mu$ und $1-k_\nu'\eta^\nu$ nur eine Änderung um Vielfache von $\eta^{\lambda+1}$ erleiden. Die Willkürlichkeit von k_μ und k_ν' wird man dazu benutzen, um, wie dies bei der Bedeutung des Zeichens $(1-k_\mu\eta^\mu,\ 1-k_\nu'\eta^\nu)$ nöthig ist, gemeinschaftliche Theiler der beiden in demselben vorkommenden Zahlen zu vermeiden. Zur Vereinfachung der Resultate nehme ich $k_\mu \equiv 1 \pmod{\eta^{\lambda+1-\mu}}$, $k_\nu' \equiv 1 \pmod{\eta^{\lambda+1-\nu}}$ an; dann wird $1-k_\mu\eta^\mu \equiv 1-\eta^\mu \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, $1-k_\nu'\eta^\nu \equiv 1-\eta^\nu \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ und $(1-k_\mu\eta^\mu,\ 1-k_\nu'\eta^\nu)$ wird eine blofs von μ und ν abhängige Gröfse $= \varepsilon_{\mu,\nu}$, welche geradezu $= (1-\eta^\mu,\ 1-\eta^\nu) = \varepsilon_{\mu,\nu}$ gesetzt werden kann, wenn $1-\eta^\mu$ zu $1-\eta^\nu$ relative Primzahl ist. Dies letztere findet übrigens Statt, wie leicht zu zeigen, wenn μ zu ν relative Primzahl ist. Setzt man nun, den eben gemachten Annahmen entsprechend,

$$(1.)\qquad A \equiv \mathfrak{a}^\lambda (1-\eta)^{\alpha_1}(1-\eta^2)^{\alpha_2}(1-\eta^3)^{\alpha_3}\ldots(1-\eta^\lambda)^{\alpha_\lambda} \pmod{\eta^{\lambda+1}},$$

$$(2.)\qquad B \equiv \mathfrak{b}^\lambda (1-\eta)^{\beta_1}(1-\eta^2)^{\beta_2}(1-\eta^3)^{\beta_3}\ldots(1-\eta^\lambda)^{\beta_\lambda} \pmod{\eta^{\lambda+1}},$$

wo beiläufig die reellen ganzen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Summe der Elemente in A respective B congruent werden (mod. λ) und die Exponenten von $1-\eta$, $1-\eta^2$, u. s. w. der Reihe 0, 1, 2, $\ldots\ \lambda-1$ entnommen sind, so wird allgemein

$$(3.)\qquad \left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right) = (A,B) = \Pi\varepsilon_{\mu,\nu}^{\alpha_\mu\beta_\nu} = \varepsilon_{1,1}^{\alpha_1\beta_1}\cdot\varepsilon_{1,2}^{\alpha_1\beta_2}\cdot\varepsilon_{2,1}^{\alpha_2\beta_1}\ldots\varepsilon_{\lambda,\lambda}^{\alpha_\lambda\beta_\lambda}.$$

Durch ganz analoge Betrachtungen findet man den Ergänzungssatz:

II. „*Dafs* $\left(\frac{\eta}{A}\right)$ *unverändert bleibt, wenn* A *um Vielfache von* $\eta^{\lambda+1}$ *geändert wird,*" und dafs unter Voraussetzung der Congruenz (1.) die Formel

$$(4.)\qquad \left(\frac{\eta}{A}\right) = \left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\eta}{1-\eta^2}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\frac{\eta}{1-\eta^\lambda}\right)^{\alpha_\lambda}$$

gilt. Diese letzteren Behauptungen können auch leicht als Folgerungen aus dem ersten Satze vollkommen streng abgeleitet werden, indem man, wie ich wegen Mangel an Raum nur kurz andeuten kann, aus einer Gleichung von der Form $A-a=\eta^{\lambda+1}.c$, oder von der Form $(A+a\eta^{\lambda+1})-a=\eta^{\lambda+1}.(c+a)$, wenn c durch η theilbar sein sollte, drei Congruenzen und aus diesen wiederum Gleichungen zwischen Symbolen hervorgehen läfst, durch welche $\left(\frac{\eta}{A}\right)$ in $\left(\frac{\eta}{a}\right)$ ausgedrückt werden kann.

§. 2.

Die Gröfsen ε haben merkwürdige und leicht abzuleitende Eigenschaften, durch welche ihre Berechnung ungemein vereinfacht wird. Es ist zunächst allgemein

$$(5.) \qquad \varepsilon_{\mu,\nu} = \varepsilon_{\mu,\mu+\nu} \cdot \varepsilon_{\mu+\nu,\nu} \cdot \left(\frac{\eta}{1-\eta^{\mu+\nu}}\right)^{\nu}.$$

Denn setzt man $1-\eta^{\mu} = h_{\mu}$, $1-\eta^{\nu} = h_{\nu}$, $1-\eta^{\mu+\nu} = h_{\mu+\nu}$, so ergiebt sich die identische Gleichung $h_{\mu+\nu} - h_{\nu} = \eta^{\nu} h_{\mu}$. Die aus ihr hervorgehenden Congruenzen $h_{\mu+\nu} \equiv h_{\nu} \pmod{h_{\mu}}$, $h_{\mu+\nu} \equiv \eta^{\nu} h_{\mu} \pmod{h_{\nu}}$ und $(-1)^{\lambda} h_{\nu} \equiv \eta^{\nu} h_{\mu} \pmod{h_{\mu+\nu}}$ liefern die Gleichungen zwischen Symbolen resp. $\left(\frac{h_{\mu+\nu}}{h_{\mu}}\right) = \left(\frac{h_{\nu}}{h_{\mu}}\right)$, $\left(\frac{h_{\mu+\nu}}{h_{\nu}}\right) = \left(\frac{\eta^{\nu}}{h_{\nu}}\right)\left(\frac{h_{\mu}}{h_{\nu}}\right) = \left(\frac{h_{\mu}}{h_{\nu}}\right)$, $\left(\frac{h_{\nu}}{h_{\mu+\nu}}\right) = \left(\frac{\eta}{h_{\mu+\nu}}\right)^{\nu}\left(\frac{h_{\mu}}{h_{\mu+\nu}}\right)$, durch deren geeignete Verbindung sich unmittelbar die Formel (5.) ergiebt, wenn man erwägt, dafs $\varepsilon_{\mu,\nu} = (h_{\mu}, h_{\nu}) = \left(\frac{h_{\mu}}{h_{\nu}}\right) : \left(\frac{h_{\nu}}{h_{\mu}}\right)$, u. s. w. ist. Gegen diesen Beweis ist nichts einzuwenden, so lange μ zu ν, also auch zu $1-\eta^{\mu}$ zu $1-\eta^{\nu}$ relative Primzahl ist*); im entgegengesetzten Falle sind, um der vollkommenen Strenge zu genügen, h_{μ}, h_{ν} und $h_{\mu+\nu}$ durch andere Zahlen zu ersetzen, welche ihnen $\equiv \pmod{\eta^{\lambda+1}}$ sind. Setzt man $h_{\mu} = 1-\eta^{\mu} - l\eta^{\lambda+1}$, $h_{\nu} = 1-\eta^{\nu}$, so wird wieder $h_{\mu+\nu} - h_{\nu} = \eta^{\nu} h_{\mu}$, wenn $h_{\mu+\nu} = 1-\eta^{\mu+\nu} - l\eta^{\nu}.\eta^{\lambda+1}$ angenommen wird, und man erreicht es hier sicher, dafs h_{μ} mit h_{ν} keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, wenn man $l\eta^{\lambda+1}$ als Potenz von η annimmt, deren Exponent $> \lambda$ und durch ν ***theilbar*** ist; denn es wird dann $1-l\eta^{\lambda+1}$ durch $1-\eta^{\nu}$ theilbar und also $1-l\eta^{\lambda+1}-\eta^{\mu} = h_{\mu}$ zu $1-\eta^{\nu}$ relative Primzahl. Die ferneren Schlüsse erleiden nur leichte Modificationen, bei denen auch Satz II. zu Hülfe zu nehmen ist. Uebrigens ist stets $\varepsilon_{\mu,\nu} = 1$, wenn μ mit ν einen gemeinschaftlichen Theiler hat; auch wenn $\mu = \nu$ ist.

Eine zweite Eigenschaft besteht darin, dafs immer

$$(6.) \qquad \varepsilon_{\mu,\nu} = 1 \text{ ist,}$$

wenn einer der beiden Indices μ oder ν die Primzahl λ an Gröfse übertrifft. Denn setzt man $h_{\mu} = 1-\eta^{\mu} - l\eta^{\lambda+1}$, $h_{\nu} = 1-\eta^{\nu} - l'\eta^{\lambda+1}$, so wird $\varepsilon_{\mu,\nu} = (h_{\mu}, h_{\nu})$. Ist nun $\mu > \lambda$, so wird $h_{\mu} \equiv 1 \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, also nach Satz I., $\varepsilon_{\mu,\nu} = (1, h_{\nu}) = 1$, und ist $\nu > \lambda$, so wird $h_{\nu} \equiv 1 \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, also nach Satz I., $\varepsilon_{\mu,\nu} = (h_{\mu}, 1) = 1$.

Die Formel (5.) vereinfacht sich, wenn man die Symbole von der Form $\left(\frac{\eta}{1-\eta^{\mu}}\right)$ einer genauern Betrachtung unterwirft. Ein solches Symbol

*) Der gemeinschaftliche Factor $1-\eta$ zählt nicht mit, weil er der Einheit ζ gleich ist, da aus $\eta = 1-\zeta$, $\zeta = 1-\eta$ folgt.

wird stets $=1$; mit Ausnahme des einzigen speciellen Falles $\mu=\lambda$. Denn für $\mu>\lambda$ hat man, wenn wieder $1-\eta^\mu=h_\mu$ gesetzt wird, $h_\mu\equiv 1 \pmod{\eta^{\lambda+1}}$, also nach Satz II. $\left(\frac{\eta}{h_\mu}\right)=\left(\frac{\eta}{1}\right)=1$. Ferner ist im Allgemeinen $\eta^\mu\equiv 1 \pmod{h_\mu}$, also $\left(\frac{\eta^\mu}{h_\mu}\right)=\left(\frac{\eta}{h_\mu}\right)^\mu=1$; woraus leicht folgt, dafs auch $\left(\frac{\eta}{h_\mu}\right)=1$, aufser wenn $\mu\equiv 0 \pmod{\lambda}$. Setzt man das noch unbekannte Symbol $\left(\frac{\eta}{1-\eta^\lambda}\right)=\delta$, so wird aus (5.) $\varepsilon_{\mu,\nu}=\varepsilon_{\mu,\mu+\nu}\cdot\varepsilon_{\mu+\nu,\nu}$, wenn $\mu+\nu\leqslant\lambda$, und $\varepsilon_{\mu,\nu}=\varepsilon_{\mu,\mu+\nu}\cdot\varepsilon_{\mu+\nu,\nu}\cdot\delta^\nu$, wenn $\mu+\nu=\lambda$ ist. Setzt man ferner allgemein $\varepsilon_{\mu,\nu}=\delta^{\varkappa_{\mu,\nu}}$, so ergeben sich folgende Formeln zur Bildung der Exponenten $\varkappa$:

$$(7.)\quad\begin{cases}1^\circ.\ \varkappa_{\mu,\nu}\equiv\varkappa_{\mu,\mu+\nu}+\varkappa_{\mu+\nu,\nu} \pmod{\lambda}, \text{ wenn } \mu+\nu<\lambda,\\ 2^\circ.\ \varkappa_{\mu,\nu}\equiv 0, \text{ wenn } \mu+\nu>\lambda,\\ 3^\circ.\ \varkappa_{\mu,\nu}\equiv\nu, \text{ wenn } \mu+\nu=\lambda.\end{cases}$$

Nach diesen Formeln können die Werthe der Zahlen $\varkappa_{\mu,\nu}$ sehr leicht und zwar auf doppelte Weise berechnet werden, indem man entweder jedes zu berechnende *individuelle* $\varkappa$ nach 1°. durch neue $\varkappa$ mit wachsenden Indices so lange ersetzt, bis man zu lauter solchen gelangt, welche durch 2°. resp. 3°. bestimmt sind; oder auch indem man, was für *tabellarische* Zusammenstellung vorzuziehen ist, auf dem umgekehrten Wege, von denjenigen Combinationen μ, ν anfangend, für welche $\mu+\nu$ am gröfsten ist, zu solchen zurückgeht, denen nach und nach immer kleinere Werthe der Summe $\mu+\nu$ entsprechen. In Betreff ausführlicher Untersuchung dieser merkwürdigen Zahlen mufs ich wegen Mangel an Raum auf eine der Akademie neuerdings vorgelegte Mittheilung verweisen; auch mufs ich mich jedes Beispiels enthalten.

Die noch nöthige Bestimmung des Symbols $\delta=\left(\frac{\eta}{1-\eta^\lambda}\right)$ ergiebt sich durch Betrachtung einer speciellen Combination μ, ν, für welche $\varepsilon_{\mu,\nu}$ ***a priori*** und unabhängig von den hier angestellten Untersuchungen ermittelt und auch das zugehörige $\varkappa_{\mu,\nu}$ leicht angegeben werden kann, in ähnlicher Weise, wie man in der Theorie der Functionen die willkürlichen Constanten zu bestimmen pflegt. Am Besten eignet sich hierzu die Combination $\mu=1$, $\nu=\lambda-1$; denn da für diese $\mu+\nu=\lambda$ ist, so wird nach 3°. in (7.) $\varkappa_{1,\lambda-1}\equiv\lambda-1\equiv-1 \pmod{\lambda}$, also $\varepsilon_{1,\lambda-1}=\delta^{-1}$, $\delta=\varepsilon_{1,\lambda-1}^{-1}$; ferner wird $\varepsilon_{1,\lambda-1}=(1-\eta,\ 1-\eta^{\lambda-1})=(\zeta,\ 1-\eta^{\lambda-1})=\left(\frac{\zeta}{1-\eta^{\lambda-1}}\right):\left(\frac{1-\eta^{\lambda-1}}{\zeta}\right)=\left(\frac{\zeta}{1-\eta^{\lambda-1}}\right)$. Bezeichnet man allgemein das Product der $\lambda-1$ Werthe der complexen Zahl A durch $\mathfrak{N}(A)$

$\equiv 1+\lambda A(A)$, so wird $\left(\frac{\zeta}{A}\right)=\zeta^{A(A)}$, also speciell $\varepsilon_{1,\lambda-1}=\zeta^{A(1-\eta^{\lambda-1})}$. Um den Exponenten dieser Potenz von ζ zu finden, hat man nur $\mathfrak{N}(1-\eta^{\lambda-1})\equiv(1-(1-\zeta)^{\lambda-1})(1-(1-\zeta^2)^{\lambda-1})\ldots(1-(1-\zeta^{\lambda-1})^{\lambda-1})$ in Bezug auf mod. λ^2 zu bestimmen. Da in diesem Producte $\prod_{\mu=1}^{\mu=\lambda-1}\{1-(1-\zeta^{\mu})^{\lambda-1}\}$ das zweite Glied $(1-\zeta^{\mu})^{\lambda-1}$ jedes Factors durch λ theilbar ist, so wird das Product $\equiv 1-\sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda-1}(1-\zeta^{\mu})^{\lambda-1}$ (mod. λ^2). Entwickelt man $(1-\zeta^{\mu})^{\lambda-1}$ nach dem binomischen Satze und überträgt die Summation nach μ auf die einzelnen Glieder dieser Entwicklung, so erhält man $\mathfrak{N}(1-\eta^{\lambda-1})\equiv 1-(\lambda-1)+(\lambda-1)\Sigma\zeta^{\mu}-\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)\Sigma\zeta^{2\mu}+\ldots-\Sigma\zeta^{(\lambda-1)\mu}$ (mod. λ^2). Die sämmtlichen hier vorkommenden Summen nehmen den Werth -1 an, daher wird $\mathfrak{N}(1-\eta^{\lambda-1})\equiv 1-\lambda+\{1-(\lambda-1)+\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)-\ldots+1\}$ (mod. λ^2) $\equiv 1-\lambda+(1-1)^{\lambda-1}\equiv 1-\lambda$, mithin endlich $A(1-\eta^{\lambda-1})\equiv -1$ (mod. λ), $\varepsilon_{1,\lambda-1}=\zeta^{-1}$, und $\delta=\varepsilon_{1,\lambda-1}^{-1}=\zeta$. Vereinigen wir dieses Resultat mit der frühern Bemerkung über die Symbole $\left(\frac{\eta}{1-\eta^{\mu}}\right)$ in der Formel

$$(8.)\qquad \left(\frac{\eta}{1-\eta^{\mu}}\right)=1 \text{ oder } =\zeta,$$

je nachdem $\mu\leqq\lambda$ oder $\mu=\lambda$.

§. 3.

Nach Einsetzung des sehr einfachen Werthes $\delta=\zeta$ und mit Benutzung der Zahlen $\varkappa$ wird $\varepsilon_{\mu,\nu}=\zeta^{\varkappa_{\mu,\nu}}$; daher läfst sich die Formel (3.) folgendermafsen darstellen:

$$(9.)\qquad \varphi(A,B)=\Sigma\varkappa_{\mu,\nu}\alpha_{\mu}\beta_{\nu}=\varkappa_{1,1}\alpha_1\beta_1+\varkappa_{1,2}\alpha_1\beta_2+\varkappa_{2,1}\alpha_2\beta_1+\ldots,$$

und die Formel (4.) wird wegen (8.) ganz einfach

$$(10.)\qquad \left(\frac{\eta}{A}\right)=\zeta^{\alpha_{\lambda}}.$$

Wegen der verschwindenden $\varkappa$ nach (7.) 2°. fallen aus der Summe rechts in (9.) alle diejenigen Glieder weg, für welche $\mu+\nu>\lambda$ ist; namentlich fehlen alle Glieder, welche α_{λ} oder β_{λ} enthalten. Man kann deshalb die Congruenzen (1.) und (2.), welche zu Bestimmung der α und β dienen, durch folgende aus ihnen hervorgehenden einfacheren

$$(11.)\qquad \begin{cases} A\equiv \mathfrak{a}^{\lambda}(1-\eta)^{\alpha_1}(1-\eta^2)^{\alpha_2}(1-\eta^3)^{\alpha_3}\ldots(1-\eta^{\lambda-1})^{\alpha_{\lambda-1}} \\ B\equiv \mathfrak{b}^{\lambda}(1-\eta)^{\beta_1}(1-\eta^2)^{\beta_2}(1-\eta^3)^{\beta_3}\ldots(1-\eta^{\lambda-1})^{\beta_{\lambda-1}} \end{cases} (\text{mod. }\eta^{\lambda})$$

ersetzen, und die Kenntnifs von α_{λ} ist nur zur Aufstellung des Werthes von

$\left(\frac{\eta}{A}\right)$ nach (10.) erforderlich. Eine noch gröfsere Vereinfachung dieser Congruenzen ist gestattet, wenn man A und B einer Beschränkung unterwirft, die sich immer durch Multiplication mit einer Potenz von ζ erreichen läfst, derjenigen nämlich, dafs die Exponenten von $1-\eta=\zeta$, d. h. α_1 und β_1 verschwinden (durch λ theilbar sind). Unter dieser Voraussetzung fallen auch noch die Glieder mit $\alpha_{\lambda-1}$ und $\beta_{\lambda-1}$ aus (9.) weg; und da diese beiden Exponenten sich als überflüssig erweisen, so genügt es, die Congruenzen blofs in Bezug auf mod. $\eta^{\lambda-1}$, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, auf mod. λ aufzufassen, und da noch aufserdem $\mathfrak{a}^\lambda \equiv \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^\lambda \equiv \mathfrak{b}$ (mod. λ) ist, blofs

$$(12.)\quad \begin{cases} A \equiv \mathfrak{a}(1-\eta^2)^{\alpha_2}(1-\eta^3)^{\alpha_3}\ldots(1-\eta^{\lambda-2})^{\alpha_{\lambda-2}} \\ B \equiv \mathfrak{b}(1-\eta^2)^{\beta_2}(1-\eta^3)^{\beta_3}\ldots(1-\eta^{\lambda-2})^{\beta_{\lambda-2}} \end{cases} (\text{mod. } \lambda)$$

zu schreiben. In diesem Falle sind A und B reellen Zahlen congruent (mod. η^2) und sollen als *primär* bezeichnet werden.

Ich will jetzt zeigen, wie die Exponenten α, β, welche in (9.) vorkommen, auch durch eine eigenthümliche Art logarithmischer Entwicklungen gefunden, und dadurch jene Congruenzen ganz vermieden werden können; doch beschränke ich mich, um unnöthige Complicationen zu vermeiden, auf primäre Werthe der Zahlen A, B. Da in der irreductibeln Gleichung, welcher η genügt, nämlich $\frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta} = \frac{1-(1-\eta)^\lambda}{\eta} = \lambda - \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\eta + \ldots - \lambda\eta^{\lambda-2} + \eta^{\lambda-1} = 0$, mit Ausnahme des höchsten Gliedes $\eta^{\lambda-1}$ alle Coëfficienten mit λ aufgehen, so werden, wenn man beide Seiten der Congruenzen (12.) nach steigenden Potenzen von η entwickelt und diese Entwicklungen vor den Gliedern mit $\eta^{\lambda-1}$ abbricht, die entsprechenden Coëfficienten sich nur um Vielfache von λ unterscheiden. Dasselbe wird gelten, wenn man vor der Entwicklung auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt. Schreibt man daher A und B zunächst als Functionen von η in der Form

$$A = A(\zeta) = A(1-\eta) = A(1) - A'(1)\eta + \tfrac{1}{2}A''(1)\eta^2 - \text{etc.}$$
$$B = B(\zeta) = B(1-\eta) = B(1) - B'(1)\eta + \tfrac{1}{2}B''(1)\eta^2 - \text{etc.},$$

wo das primäre Verhalten durch die Bedingungen $A'(1) = B'(1) = 0$ oder wenigstens $A'(1) \equiv B'(1) \equiv 0$ (mod. λ) ausgesprochen wird, und entwickelt dann, indem man η für einen Augenblick als unbestimmte Variable ansieht, $\log A(1-\eta)$ und $\log B(1-\eta)$ in folgender Weise:

$$(13.)\quad \begin{cases} \log A = \log A(1) + \alpha_1\log(1-\eta) + \alpha_2\log(1-\eta^2) + \alpha_3\log(1-\eta^3) + \ldots, \\ \log B = \log B(1) + \beta_1\log(1-\eta) + \beta_2\log(1-\eta^2) + \beta_3\log(1-\eta^3) + \ldots, \end{cases}$$

was immer nur auf eine Art möglich ist und wo α_1, β_1 mit $A'(1)$ resp. $B'(1)$ zugleich verschwinden: so werden die Coëfficienten, wenn man nur bis $\alpha_{\lambda-2}$ resp. $\beta_{\lambda-2}$ fortgeht, genau die oben durch dieselben Buchstaben bezeichneten Zahlen, oder sie werden ihnen wenigstens congruent, wenn man etwa vorkommende Nenner mit Hülfe des mod. λ beseitigt, und es wird daher

$$(14.) \quad \varphi(A,B) \equiv \varkappa_{2,2}\alpha_2\beta_2 + \varkappa_{2,3}\alpha_2\beta_3 + \varkappa_{3,2}\alpha_3\beta_2 + \text{etc.},$$

wo die Reihe wegen der verschwindenden $\varkappa$ von selbst abbricht und die Gröfsen α, β aus (13.) zu ziehen sind.

Die Coëfficienten der logarithmischen Entwicklungen in (13.), welche nur bis zu dem Gliede mit $\log(1-\eta^{\lambda-1})$ excl. fortgesetzt werden dürfen, sind lineare Verbindungen der in den gewöhnlichen Entwicklungen von $\log A(1-\eta)$ resp. $\log B(1-\eta)$ nach steigenden Potenzen von η vorkommenden Coëfficienten. Denn setzt man, immer noch η als unbestimmte Variable betrachtend,

$$\log A(1-\eta) \equiv \log A(1) + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \ldots$$
$$\log B(1-\eta) \equiv \log B(1) + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + \ldots,$$

so darf man nur noch aus den Formeln

$$\log(1-\eta) \equiv -\eta - \tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{3}\eta^3 - \text{etc.}, \quad \log(1-\eta^2) \equiv -\eta^2 - \tfrac{1}{2}\eta^4 - \tfrac{1}{3}\eta^6 - \text{etc.},$$

allgemein

$$\log(1-\eta^\mu) \equiv -\eta^\mu - \tfrac{1}{2}\eta^{2\mu} - \tfrac{1}{3}\eta^{3\mu} - \text{etc.},$$

umgekehrt die Potenzen von η durch die Gröfsen $\log(1-\eta)$, $\log(1-\eta^2)$ u. s. w. linear ausdrücken, um die Entwicklungen von der Form (13.) zu erhalten. Eine derartige Reihen-Umkehrung ist ein bekanntes, wenn ich nicht irre zuerst von *Moebius* im 9ten Bande dieses Journals S. 105 ff. behandeltes Problem. Es findet sich allgemein

$$\mathfrak{x} \equiv -\log(1-\mathfrak{x}) + \tfrac{1}{2}\log(1-\mathfrak{x}^2) + \tfrac{1}{3}\log(1-\mathfrak{x}^3) + \tfrac{1}{5}\log(1-\mathfrak{x}^5) - \tfrac{1}{6}\log(1-\mathfrak{x}^6) + \text{etc.},$$

wo rechts nur diejenigen Potenzen von $\mathfrak{x}$ vorkommen, deren Exponent keinen quadratischen Theiler enthält, und das Vorzeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem die Anzahl der in diesem Exponenten aufgehenden verschiedenen Primfactoren ungerade oder gerade ist. Hiernach wird $\alpha_1 \equiv -a_1$, $\alpha_2 \equiv -a_2 + \frac{1}{2}a_1$, $\alpha_3 \equiv -a_3 + \frac{1}{3}a_1$, u. s. w., $\alpha_6 \equiv -a_6 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{3}a_2$, u. s. w. Für den allgemeinen Ausdruck von α_μ durch die Coëfficienten a ergeben sich die Vorzeichen und Zahlenfactoren aus dem Anblick des entwickelten Products $-\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\ldots$, wenn $p, q, \ldots$ die verschiedenen Primfactoren von μ sind; auf dieselbe Weise werden die β durch die b ausgedrückt.

Der Exponent $\varphi(A, B)$ des Umkehrungsfactors $(A, B) = \left(\frac{A}{B}\right):\left(\frac{B}{A}\right)$ wird also ein Ausdruck, der sowohl aus den Coëfficienten der Entwicklung von $\log A = \log A(1-\eta)$ nach steigenden Potenzen von η, als auch aus denen der ähnlichen Entwicklung von $\log B$ *linear* und aus beiden Arten von Coëfficienten quadratisch zusammengesetzt ist; wobei man übrigens die Entwicklungen nur bis $\eta^{\lambda-1}$ excl. fortzusetzen hat. Die Zahlenfactoren jenes Ausdrucks können entweder aus dem Vorhergehenden zusammengesetzt, oder auch nach irgend einer Interpolations-Methode direct ermittelt werden. Setzt man $\varphi(A, B) = \Sigma k_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu$, so darf man, um $k_{\sigma,\tau}$ zu finden, nur zwei solche complexe Zahlen als specielle Werthe von A und B aufsuchen, für welche a_μ und b_ν, mit Ausnahme der stehenden Combination $\mu = \sigma$, $\nu = \tau$, stets verschwinden. Solche Zahlen sind

$$1 + \eta^\sigma + \tfrac{1}{2}\eta^{2\sigma} + \frac{\eta^{3\sigma}}{2.3} + \ldots + l\eta^{\lambda-1} = u_\sigma,$$

$$1 + \eta^\tau + \tfrac{1}{2}\eta^{2\tau} + \frac{\eta^{3\tau}}{2.3} + \ldots + l'\eta^{\lambda-1} = u_\tau,$$

wo die Reihen abzubrechen sind, sobald die Exponenten die Zahl $\lambda - 2$ übersteigen, und wo die beliebigen complexen Zahlen l und l' nur dazu dienen, um gemeinschaftliche Factoren zwischen u_σ und u_τ zu vermeiden. Mittels dieser Zahlen u wird $k_{\mu,\nu}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{u_\mu}{u_\nu}\right) = \zeta^{k_{\mu,\nu}}\left(\frac{u_\nu}{u_\mu}\right) \text{ oder } k_{\mu,\nu} = \varphi(u_\mu, u_\nu)$$

bestimmt.

Es wird nicht überflüssig sein, nochmals zu erinnern, dafs die letzten Resultate in dieser Einfachheit nur unter der Voraussetzung primärer Werthe von A, B gelten. Eine genauere Betrachtung zeigt, dafs ohne diese Voraussetzung die logarithmischen Entwicklungen um ein Glied weiter fortgesetzt werden müssen und dafs dann zu dem Ausdrucke für $\varphi(A, B)$ in (14.) aufser den Gliedern

$$\varkappa_{1,1}\alpha_1\beta_1 + \varkappa_{1,2}\alpha_1\beta_2 + \varkappa_{2,1}\alpha_2\beta_1 + \varkappa_{1,3}\alpha_1\beta_3 + \varkappa_{3,1}\alpha_3\beta_1 + \text{etc.},$$

noch die folgenden beiden

$$\alpha_1 \Lambda B(1) - \beta_1 \Lambda A(1) = \frac{1}{\lambda}\{\alpha_1(B(1)^{\lambda-1} - 1) - \beta_1(A(1)^{\lambda-1} - 1)\}$$

hinzutreten.

Für den speciellen Fall, wenn B einer reellen ganzen Zahl $= q = B(1)$ gleich ist, reducirt sich die ganze Entwicklung von $\log B$ auf das erste Glied

und es wird geradezu

$$\left(\frac{A}{q}\right) = \left(\frac{q}{A}\right),$$

wenn A primär, nämlich $A'(1) \equiv 0$ angenommen wird; ohne diese Voraussetzung wird

$$\left(\frac{A}{q}\right) = \zeta^{\alpha_1 \Lambda(q)} \left(\frac{q}{A}\right),$$

wo $\alpha_1 \equiv A'(1)$ und $\Lambda(q)$ die durch die Congruenz $q^{\lambda-1} \equiv 1 + \lambda \Lambda(q) \pmod{\lambda^2}$ definirte Function ist. Diesen speciellen Fall habe ich schon vor langer Zeit mittels einer gewissen Erweiterung der Principien der Kreistheilung streng erwiesen.

Die unmittelbare Reciprocität $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)$ findet allgemein dann Statt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ und ebenso $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ verschwinden; denn da die Factoren $\varkappa$ ihrerseits verschwinden, wenn μ und ν beide $> \frac{1}{2}(\lambda-1)$ sind, so reducirt sich in diesem Falle der ganze Werth von $\varphi(A, B)$ auf Null. Es geschieht dies, wenn in den Entwicklungen von $\log A$ und $\log B$ alle Potenzen von η bis incl. $\eta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ fehlen; wozu es wiederum hinreicht, dafs $A'(1), A''(1), \ldots A^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}(1)$, so wie $B'(1), B''(1), \ldots B^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}(1)$ verschwinden. Ob es aber immer möglich sein wird, diesen Bedingungen durch Multiplication der Zahlen mit complexen Einheiten zu entsprechen, mufs ferneren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Bezeichnet man durch $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein System von Fundamental-Einheiten, deren Anzahl nach ***Dirichlet*** $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ beträgt, so wäre zu zeigen, dafs die aus den Coëfficienten von $\eta, \eta^2, \ldots \eta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ in den Entwicklungen von $\log\zeta \equiv \log(1-\eta), \log e_1, \log e_2, \ldots \log e_{\frac{1}{2}(\lambda-3)}$ gebildete Determinante niemals $\equiv 0 \pmod{\lambda}$ werden kann. Wie dem auch sein mag, so wird zur Bestimmung der als Factor hinzutretenden Einheit immer auf die hier gegebene Theorie zurückzugehen sein; auch ist zu erwägen, dafs bei einer solchen Specialisirung der zu vergleichenden Zahlen neue Ergänzungssätze, betreffend den Character der complexen Einheiten selbst, hinzutreten müssen.

Man bemerke noch den ebenfalls aus diesen Principien hervorgehenden merkwürdigen Satz, dafs man $\Lambda(A)$ in $\mathfrak{N}(A) \equiv 1 + \lambda \Lambda(A) \pmod{\lambda^2}$ erhält, wenn man $\log A$ nach steigenden Potenzen von η entwickelt, in dieser Entwicklung die Glieder, deren Exponent $\geqq \lambda$ ist, wegläfst, sodann $\eta \equiv 1$ setzt und das erste Glied $\log A(1)$ durch $\Lambda A(1)$ ersetzt.

§. 4.

Zum Schlusse füge ich noch einige Worte über die Definition der Symbole $\left(\frac{A}{B}\right)$ hinzu. Die Schwierigkeiten, welchen eine solche Definition auf den ersten Blick zu unterliegen scheint, können sowohl auf anderen Wegen, als auch durch Benutzung der von ***Kummer*** eingeführten idealen Primfactoren beseitigt werden. Ist p eine von λ verschiedene gewöhnliche ungerade Primzahl, μ der kleinste Exponent, der $p^\mu \equiv 1 \pmod{\lambda}$ macht, und setzt man $p^\mu - 1 = \lambda q$, bezeichnet ferner durch $\psi(\zeta)$ irgend eine ganze ganzzahlige Function einer primitiven λten Wurzel der Einheit ζ, so ist $\psi(\zeta)^{p^\mu} = \psi(\zeta)^{\lambda q+1} \equiv \psi(\zeta) \pmod{p}$; wovon man sich leicht durch die polynomische Entwicklung der Potenz $\psi(\zeta)^{p^\mu}$ überzeugt. Die durch p theilbare Differenz $\psi(\zeta)^{\lambda q+1} - \psi(\zeta)$ läfst sich in das Product aus $\psi(\zeta)$ und λ andern Factoren von der Form $\psi(\zeta)^q - \zeta^\nu$ zerlegen, in denen ν die Zahlen 0, 1, 2, ... $\lambda - 1$ bedeutet. Im Allgemeinen wird sich p nicht auf diese $\lambda + 1$ Factoren vertheilen lassen: führt man aber ideale Primfactoren von p ein, deren Anzahl nach ***Kummer*** $\frac{\lambda - 1}{\mu}$ beträgt, so wird jeder dieser Primtheiler in einem und nur in einem der obigen $\lambda + 1$ Factoren aufgehen. Ist ϖ ein idealer Primfactor von p, welcher nicht in $\psi(\zeta)$ enthalten ist, so bezeichne ich diejenige ganze bestimmte Potenz von ζ, für welche die Congruenz $\psi(\zeta)^q \equiv \zeta^\nu \pmod{\varpi}$ erfüllt wird, durch $\left(\frac{\psi(\zeta)}{\varpi}\right) = \zeta^\nu$. Sind $\varpi, \varpi', \varpi'', \ldots$ die sämmtlichen idealen Primfactoren der beliebigen complexen Zahl $\chi(\zeta)$, welche mit $\psi(\zeta)$ keinen (auch keinen idealen) Factor gemein hat, so bezeichne ich ferner durch $\left(\frac{\psi(\zeta)}{\chi(\zeta)}\right)$ das Product $\left(\frac{\psi(\zeta)}{\varpi}\right)\left(\frac{\psi(\zeta)}{\varpi'}\right)\left(\frac{\psi(\zeta)}{\varpi''}\right)\ldots = \left(\frac{\psi(\zeta)}{\chi(\zeta)}\right)$. Das Symbol $\left(\frac{A}{B}\right)$ hat dann eine ganz bestimmte Bedeutung, B mag eine wirkliche oder eine ideale complexe Zahl sein; der Zähler A mufs aber eine wirkliche complexe Zahl sein. Übrigens mufs noch B zu λ relative Primzahl sein, darf also nicht durch $1 - \zeta = \eta$ theilbar sein. Bei der Aufstellung des Reciprocitätsgesetzes zur Vergleichung von $\left(\frac{A}{B}\right)$ mit $\left(\frac{B}{A}\right)$ werden A und B beide als ***wirkliche*** complexe Zahlen angenommen und die Betrachtung der idealen Primfactoren von B resp. A ist nur bei der ***Definition*** dieser Zeichen erforderlich; wenigstens vortheilhaft. Bei einer andern Gelegenheit werde ich zeigen, wie diese Symbole auch ohne Einführung idealer Primfactoren sehr einfach definirt werden können.

Die Betrachtungen dieser Abhandlung, die sich leicht auf beliebige zusammmengesetzte Werthe von λ ausdehnen lassen, gründen sich auf eine unbewiesene Voraussetzung, deren Wahrscheinlichkeit aber der Gewifsheit deshalb sehr nahe steht, weil man immer zu demselben Resultate kommt, man mag den Werth des Exponenten σ oben in η^σ (§. 1.) bei dieser Voraussetzung *so grofs* annehmen, als man will. Da jedoch mein Streben stets auf Erforschung strenger Beweise gerichtet war, so legte ich weniger Werth auf diese Untersuchungen, bis ich neuerdings erfuhr, dafs auch andere Mathematiker sich mit der Auffindung der höhern Reciprocitätsgesetze auf dem Wege der Induction beschäftigen. Dies besonders veranlafste mich zur Publication vorliegender Arbeit, um auch meinerseits Gelegenheit zu einigen Bemerkungen über einen Gegenstand zu finden, dem ich seit langer Zeit fast ausschliefslich alle meine Kräfte widme. Übrigens ist nicht zu verkennen, wie sehr der hier eingeschlagene, fast ganz theoretische Weg sich von einer gewöhnlichen Induction unterscheidet, bei welcher man für specielle Werthe von λ etwa die einfachsten complexen Zahlen bis zu einer gewissen Grenze mit einander vergleicht, um durch numerische Prüfung einer Anzahl von Fällen die Reciprocitätssätze herauszubringen.

Schliefslich in einigen Worten zusammengefafst, was durch die Betrachtungen dieser Abhandlungen geleistet ist, enthält dieselbe eine sichere Methode, nach welcher, unter der Voraussetzung, dafs überhaupt irgend eine, wenn auch noch so hohe Potenz von η existirt, um deren Vielfache $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ in dem Verhältnisse $\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}\right):\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}\right)$ geändert werden dürfen, der niedrigste dieser Bedingung genügende Exponent von η aufgefunden und mit Hülfe einer solchen Reduction sodann das Reciprocitätsgesetz für alle Fälle vollständig aufgestellt werden kann.

Da nach bereits vollendeter Abfassung dieser Arbeit wider Erwarten noch einiger Raum bleibt, so benutze ich denselben, um ein Paar Bemerkungen zu dem Vorhergehenden hinzuzufügen.

1) Es wurde oben im Vorbeigehen angedeutet, dafs $1-\eta^\mu$ mit $1-\eta^\nu$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben kann, wenn μ zu ν relative Primzahl ist. Ich will hier beweisen, dafs jene beiden complexen Zahlen den *gröfsten* gemeinschaftlichen Theiler $1-\eta^\theta$ haben, wenn θ den gröfsten gemeinschaft-

lichen Theiler von μ und ν bezeichnet. Setzt man allgemein $1-\eta^n=f(n)$, so folgt aus der oben bereits zum Grunde gelegten identischen Gleichung $f(\mu+\nu)=\eta^\nu f(\mu)+f(\nu)$, dafs jeder gemeinschaftliche Theiler von $f(\mu+\nu)$ und $f(\mu)$ auch in $f(\nu)$ aufgeht. Setzt man $\mu+\nu=\sigma$, so wird $\nu=\sigma-\mu$: es geht also jeder gemeinschaftliche Theiler von $f(\sigma)$ und $f(\mu)$ auch in $f(\sigma-\mu)$ auf, wenn $\sigma>\mu$ ist. Aus demselben Grunde geht ein solcher gemeinschaftlicher Theiler, da er in $f(\sigma-\mu)$ und $f(\mu)$ enthalten ist, auch in $f(\sigma-2\mu)$ auf, und allgemein in jedem Gliede der Reihe

$$f(\sigma-\mu),\ f(\sigma-2\mu),\ f(\sigma-3\mu),\ \ldots,$$

welche man so weit fortsetzen kann, als die Zahlen unter dem Functionszeichen f positiv bleiben. Es geht also namentlich, wenn man erst beim letzten Gliede einer solchen Zahlenreihe stehen bleibt, der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $f(a)$ und $f(b)$, wo $a>b$ ist, in $f(c)$ auf, wo c den kleinsten positiven Rest von a (mod. b) bedeutet. Bildet man die bei der Operation der Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen a und b sich ergebenden Reste c, d, e u. s. w. und nennt den vorletzten Rest, welcher zugleich der letzte Divisor ist, h, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dafs jeder gemeinschaftliche Theiler von $f(a)$ und $f(b)$ in $f(c)$, also auch in $f(d)$, also auch in $f(e)$ u. s. w., endlich in $f(h)$ aufgeht, während h der gröfste gemeinschaftliche Theiler von a und b ist. Andrerseits geht $f(h)$ wirklich in $f(a)$ und $f(b)$ auf, da h in den Exponenten a und b aufgeht: also ist $f(h)$ der *gröfste* gemeinschaftliche Theiler von $f(a)$ und $f(b)$. Dieser Beweis bleibt gültig, welche Art von complexer Zahl auch η sein mag.

2) Das in einer Notiz im Monatsberichte der Berliner Akademie (Märzheft 1850) bewiesene independente Gesetz der Zahlen $\varkappa_{\mu,\nu}$ (§. 2.), die mit den dortigen $f(\mu,\nu)$ (mod. λ) übereinstimmen, ist folgendes. Bezeichnet man durch μ^0, ν^0 die kleinsten positiven Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$\nu\mu^0-\mu\nu^0=1$$

und durch r den Inbegriff aller zwischen den Grenzen $\frac{\nu^0}{\nu}\lambda$ und $\frac{\mu^0}{\mu}\lambda$ liegenden ganzen Zahlen, so wird $\varkappa_{\mu,\nu}\equiv\Sigma\frac{1}{r}$ (mod. λ), wo die Nenner mittelst mod. λ wegzuschaffen sind, und die Summation sich auf die eben definirten Werthe von r bezieht; z. B. $\varkappa_{1,2}\equiv\sum_{r=\frac{1}{2}(\lambda+1)}^{r=\lambda-1}\frac{1}{r}$ (mod. λ).

28.

Lettre de Mr. G. Salmon de Dublin à l'éditeur de ce journal.

Puisque le mémoire très intéressant de Mr. ***Aronhold,*** publié dans le cahier 2 tome 39 de votre journal, a dirigé de nouveau l'attention de vos lecteurs sur les belles recherches de Mr. ***Hesse*** sur les points d'inflexion des courbes du troisième degré; vous trouverez peut être digne d'insertion la remarque, due à Mr. ***Hart,*** qu'un théorème fondamental de Mr. ***Hesse*** est une simple conséquence géométrique d'un théorème connu de Mr. ***Chasles.***

Le théorème de Mr. ***Hesse*** est le suivant (ce Journal tome 28 page 88):

„Si l'on ajoute à une fonction homogène du troisième degré, son déterminant, multiplié par une constante arbitraire; le déterminant de cette somme est aussi la somme de la fonction donnée et de son déterminant, chacun multiplié par une constante convenable."

L'interprétation géométrique de ce théorème est la suivante (ce Journal tome 28 page 107). Toutes les courbes de troisième ordre qui passent par les neuf points d'inflexion d'une courbe quelconque du même ordre, s'entrecoupent dans leurs points dinflexion.

Le théorème de Mr. ***Chasles*** d'où l'on tire facilement celui ci, est le suivant (Hist. géom.):

„Si l'on mene des rayons vecteurs par un point d'inflexion d'une courbe de troisième degré, et qu'on prend sur chacun la moyenne harmonique entre ses segmens; le lieu de ces moyennes sera une ligne droite."

Reciproquement, comme on le voit facilement:

„Si un tel lieu est une ligne droite, le point par où sont menés les rayons vecteurs, est un point d'inflexion."

Il s'ensuit que:

„Si l'on mene par un point d'inflexion (0) trois rayons vecteurs qui rencontrent la courbe en six points nouveaux, le point 0 sera également un

point d'inflexion sur toute courbe du troisième degré qui peut être menée par ces sept points."

Ces trois points du lieu des moyennes harmoniques sont communes à toutes les courbes, et puisqu'ils sont en ligne droite pour la courbe donnée, le lieu est la même ligne droite pour toutes les autres.

On en tire immédiatement le théorème de Mr. ***Hesse;*** car par un point quelconque d'inflexion, peuvent être menés quatre rayons vecteurs qui contiennent les huit autres.

De même:

Toutes les courbes de troisième degré qui passent par sept points d'inflexion d'une telle courbe, auront un de ces points pour point d'inflexion.

Oserais-je vous demander la permission de faire une remarque sur un théorème que Mr. ***Joachimsthal*** a publié dans le tome 38 page 138 de votre journal.

Ce même théorème a été publié par feu Mr. ***Mac Cullagh*** (Dublin. Universit. Calendar. An. 1837) et se trouve aussi dans mon „Traité des sections coniques" avec la même démonstration (due à Mr. ***Graves***), qu'a donnée Mr. ***Joachimsthal.***

Il n'est pas surprenant que Mr. ***Joachimsthal*** n'ait pas vu un ouvrage élémentaire, qui a été publié dans un pays lointain.

Mr. ***Mac Cullagh*** a donné de plus ce théorème sous une autre forme, sous laquelle il peut s'appliquer à la parabole.

Soient $c'c''c'''$ trois chordes menées par le foyer, parallèles aux côtés d'une triangle inscrit à une section conique; soit p le paramètre de cette courbe, R le rayon du cercle circonscrit au triangle: on aura

$$R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}.$$

Je ne crois pas que Mr. ***Mac Cullagh*** ait étendu son theorème sur l'ellipsoïde, comme Mr. ***Joachimsthal*** paraît l'avoir fait.

Trinity College. Dublin, Febr. 11. 1850.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 39. Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift vo

Formeln

die Veränderungen der Sinus
und Cotangenten, durch die Ver
kel, so genau als man will, a

von Georg Simon Klügel
Helmstädt. und Correspo

1. die Differentialrechnung
niß zwischen den Veränderungen
Linien und der dazugehörigen B
auch noch zu brauchen, wenn w
nicht unbeträchtliche Größe hab
wissen, mit welcher Sicherheit
endliche kleine Größenstatt un
bedienen können, um die vor
tigkeit nicht zu überschreiten.
fällen, wo die Differential=
genauere zu haben. Solche li
und werde dabey zeigen,
kit man aus den in den ge
trigonometrischen Größen
durch ~~die Interpolation~~ Propo
und wie man sich, wo diese

2. . . . . .

t von G. S. Klügel.

nus, Cosinus, Tangenten
Veränderungen ihrer Win-
, auszudrücken.

el, Prof. der Mathem. zu
spondenten der Königl. Gesellschaft.

ung lehrt das letzte Verhält-
n der trigonometrischen
Bogen zu finden. dieses ist
die Veränderungen einer
haben. Man muß aber doch
it man sich der Erlaubniß,
unendlich kleiner zu setzen,
rgesetzten Grenzen der Rich-
Es ist auch nöthig, in den
= formeln nicht zureichen,
liefere ich in diesem Aufsatze,
mit welcher Zuverlässig-
wöhnlichen Tafeln befindliche,
die zwischen ihnen liegenden
rtionaltheile finden können,
kein Genüge thun, helfen können

Fac-simile einer Handschrift v

Darstellung des $\sin x - B$ und $\sin x -$ von Lagrange.

Es sey $\sin x - \sin B = u \cos B$ gesetzt, wo u ne ist, wenn soll $x - B$ absolut einen Bogen bes

Da $\sin x - \sin B - u \cos B = 0$, so ist u (§112 p. 41) $z = \sin x - \sin B - u \cos B$, x Abstand von x, also $x = B$, und für diesen Abst so wird also

$$\frac{1}{A} = -\frac{dz}{dx} = -\cos x$$

$$\text{und } A = -(\cos x)^{-1}$$

hieraus folgt

$$\frac{dA}{dx} = -(\cos x)^{-2} \sin x$$

$$\text{und } \frac{A\,dA}{dx} = 1(\cos x^{-3} \sin x$$

ferner $$\frac{\partial . A\,dA}{dx^2} = 3\cos x^{-4} \sin x^2 +$$

also $$\frac{A\,\partial . A\,dA}{dx^2} = -3\cos x^{-5} \sin x^2 -$$

weiter $$\frac{\partial . A\,\partial . A\,dA}{dx^3} = -15\cos x^{-6} \sin x^3 -$$

$$= -15\cos x^{-6} \sin x^3 - 9$$

$$\text{u. } \frac{A\,dA\,\partial . A\,dA}{dx^3} = 15\cos x^{-7} \sin x^3 + 9$$

ferner $$\frac{\partial . A\,\partial . A\,\partial . A\,dA}{dx^4} = 105\cos x^{-8} \sin x^4 + 45$$

$$+ 45$$

$$= 105\cos x^{-8} \sin x^4 + 90$$

$$\text{u. } \frac{A\,dA\,\partial . A\,\partial . A\,dA}{\&c.\ dx^4} = -105\cos x^{-9} \sin x^4 - 90$$

Hiernach wird nach der Formel u. s.

$$x = x + zA + z^2 \frac{A\,dA}{2\,dx} + z^3$$

wo nachher $x = y = B$ gesetzt

$$x = B + u + \tfrac{1}{2} u^2 \tan B + \frac{u^3}{2.3}$$

$$+ \frac{u^4}{2.3.4} (15 \tan B^3$$

$$+ \frac{u^5}{2.3.4.5} (105 \tan B$$

$$+ \frac{u^6}{2.3.4.5.6} (945 \tan B$$

$$+ \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7} (10395 \tan B^6 +$$

wovon $x - B$ auf die Art $+ \&c.$ $\sin$

berechnet wird, ergiebt.

von Br. Mollweide.

— bis B [illegible] Tafeln. Trigonometr. Differenzen [illegible].

[illegible] sehr kleine Größe
[illegible] von u ausdrücken.
[illegible] (Paoli El. d. Algebr. P. III.
[illegible] B ein [illegible]
[illegible] von x, $z = -u\cos B$

$\cos x^{-2}$

$\cos x^{-3}$

$6\cos x^{-4}\sin x$

$-3\cos x^{-4}\sin x$

$\cos x^{-4}\sin x$

$9\cos x^{-5}\sin x$

$5\cos x^{-6}\sin x^2$

$5\cos x^{-6}\sin x^2 + 9\cos x^{-4}$

$\cos x^{-6}\sin x^2 + 9\cos x^{-4}$

$\cos x^{-7}\sin x^2 - 9\cos x^{-5}$

[illegible] 0.

$^3\ \frac{Ad.\ AdA}{2.3.\ dx^2} + \&c.$

[illegible] ist

$^3 - (3\tan B^2 + 1)$

$B^3 + 9\tan B)$

$B^4 + 90\tan B^2 + 9)$

$B^5 + 1050\tan B^3 + 225\tan B)$

$^6 + \overset{141}{\cancel{[illegible]}}75\,\zeta B^4 + 4725\,\zeta B^2 + 225)$

[illegible] so ausgedrückt [illegible]

. Fac-simile einer Handschrift v

à St: Petersbourg

Monsieur mon très chèr et très honoré On

En remettant d'un jour de poste à l'autre
n'ai pas cru devoir debuter enfin par un
qui me fois arrivés dans ma vie. C'ét
gendre Bernoulli, que nous pleurons, et
long temps. Ce fut mardi 3 de ce mo
qu'il finis la courte mais honorable et
ondes de la petite Nevka en se baign
gaiemens quelques tours de nâge et à
baigne aussi et qui alloit deja remettr
à peine râler. et voyans qu'il couloit
et risqua sa propre vie pour le retirer
soit pas nager, il ne pouvoit l'approc
quelques branches qu'il étoit obligé d'al
n'y avoit personne aux environs
secours Cependens, le corps ne pouvoit
de 5 minutes, et M. Trefs ne le tenoit qu
tous les jeunes pour le rappeller à la
Enfin croyant approcher de loin quelque
fus tout droit annoncer le triste ev
toute notre famille qui se trouvoient raf
Ameny, et en partis dans la maison de ca
y passer une agréable soirée et y songea
de suite sans consulter ses forces en vi
et en moins d'un heure
des nos plus habiles, mais qui declare
n'y avoit aucune esperance de le faire

t von J. A. Euler

urg le 6 Juillet 1789 = 17 nst.
reçu le 1 Aout

Oncle.

e le plaisir de Vous écrire, je
un evenement du plus affligeant
t la mort subite de mon cher
et que nous pleurerons encore
nois entre 5 et 6 heures du soir
t vertueuse carriere dans les
mans, et après avoir fait très
à la vue de M. Fuss qui s'étoit
ttre ses habits. Fuss l'entendit
it à fond, il se jetta dans l'eau
er de l'eau: car comme il ne
cher que par le moyen des
aller chercher au rivage; car il
s, qu'il auroit pu appeller au
t avoir été sous l'eau au delà
ueres au rivage qu'il employoit
vie qui etoient à sa portée
s hommes, il les appella et
venement à ma femme et à
ssemblée en partie chez Mad.
campagne de mes enfans, pour
. Pour lui il courois tous
ille pour appeller des Chirurgien
~~[illegible]~~ au arriverent deux
erent aussi tout de suite, qu'il
e revenir à la vie, le defunt

etans

étant mort d'un coup d'ap
Toutefois on continua, co
remedes connus et appr
corps dans la maison d
entre deux draps chauds
appliquoit des lavemen
et manifesta dès le le
force qu'on n'a pas pu
a fallu l'enterrer sans
Kraft, moi et mes deux
posé à la cimetiere de
de notre famille. Jugé
pauvre fille, qui l'aimo
payé du plus parfait
une oraison funebre, q
à toute la famille et en
nous lui ferons aussi pos
ses bons vieux parens à
s'étois proposé de faire
femme pour la présenta
entierement; car on lui
qu'il auroit acceptée au
je voudrois bien que vou
d'aller chez Votre Ber
bonne facon, et de lui
Comte Anhalt, qui a ver
l'a véritablement chér
qu'il m'avois remis p
le premier pacquet que
de lui écrire aujourd
emu, et il regne tous

Monsieur et

d'apoplexie qui lui est monté tout de suite à la tête.
, comme on l'avoit fait jusques là à employer tous les
éprouvés dans des pareils cas. On avoit transporté le
de M. Amay qui est la plus voisine, on l'avoit couché
nds, on le frottoit, on employoit des eaux fortes, on
ens de tabac, on saignoit &c &c le corps resta mort
lendemain déjà des marques de la putrefaction: on
ut le garder plus long temps que 30 heures, et qu'il
ans aucune ceremonie la nuit du 4 au 5. Notre ami
eux fils aînés accompagneront le cercueil qui fut
de notre isle, où il fut enterré près des personnes
gés mon très-honoré Oncle de l'affliction de, ma
noit le plus tendrement possible et qui en étoit bien
ais retour. Ce soir il y aura dans notre eglise
, que je compte de faire imprimer pour la distribuer
en envoyer des exemplaires à Bâle et à Berlin
over un pierre avec un épitaphe. —— Que diront
à Bâle, que dira son frère à Berlin! Le defunt
re l'année prochaine en tour en Suisse avec sa jeune
ter à ses parens, et peut-être pour s'y domicilier
i avoit fait esp[illegible] une bonne place à Neufchatel
avec plaisir. —— Agréent mon très-honoré Oncle,
ous prierez en mon nom en de Messieurs vos gendres,
ernoulli pour lui annoncer cette triste mort d'une.
i remettre ensuite la condoleance ci-jointe du bon
ené des larmes en apprenant ce coup fâtal, et qui
éri et estimé. J'y joins encore un billet du defunt
peu de jours avans sa mort pour l'inserer dans
ue je Vous adresserois. Je ne suis pas en état
d'hui: qu'il me le pardonne, je suis encore trop
s autour de moi une emotion continuelle ——.

—

l très-honoré Oncle

Votre

très-humble et très-obéissant
serviteur et Neveu L. A. Euler

Crelle. Journal d. Math. Bd. 39 Heft 4.

Fac-simile einer Hands

Livri 29 Mo

J'ai trois de vos lettres sous les y
a celle que j'ai eu l'honeur de vous ecri
du 14 fev. et du 27. Pardonnés si j
la derniere que depuis trois jours Je répo
réponse

J'ai remis les lettres et paquets que vous m
de machy. non il y avoit une copie de lettre
Les voeux que vous faites pour la paix ne
que les votres, sous la desirerions vous deux
sans aucun autre motif, mais nous en avons
même de personels Pour ce qui me regard
de 12. Cependant nous avons touché
academiques et j'ai reçu depuis peu de jour
de mil ecus et un ordre du Contrôleur génér
gnation ne fut que pour le 2v mai. Je vo
a propos. On reparle beaucoup de paix et malgré

Je ne conçois pas comment vous trouvés
matieres au milieu de vos occupations aud
bien regulierement aux lettres que je reçois, m
mes momens et ne m'en laisseroient pas un d
une correspondance qui n'est peutetre guere mo
révision et redaction des memoires d'une au
a presque suffi pour occuper un fonvenelle,
des feuilles pertodique et des livre de mo

dschrift von La Condamine

Mars 1761

yeux Monsieur, reçues toutes trois posterieurement
rire le 21 Janv.er Elles sont du 4 Janv.
je n'y ai pas encore repondue je n'ai reçu
épondrai par ordre aux articles susceptibles de

s m'avés adressés je crois que tout étoit pour M.
re p.r M. Loblée Toublet, il la reçut j'y reviendra.
e sont de ma part ni moins ardens ni moins sincères
comme amis du genre humain et cosmopolites
ns je pense vous et moi de plus particuliers et
erde je ne jouis que de 5 mil livres de rentes.
prés quelques mois de relasdement nos pensions
ais mon ordonnance pour ma pension particulier
réel pour me la faire avancer quoique l'assi-
vous avoue que cette petite faveur est venue bien
ré les hostilités les negociations vont leur train.
és le tems de faire des livres et sur differentes
udémiques et domestiques. si je répondois
mes seules correspondances remplirroient tous
donc je pâtis disposer a mon gré, tandis qu'avec
oins étendue que la mienne chargé de la
academie qui embrasse tous les genres, Lequi
lle, vous trouvés le tems de faire des traductions,
morale <u>miror et invidec</u>.

Lacondamine